Klausur zur Vorlesung Methoden Verkehrsökonometrie

für Master-Studenten

WS 2010/11

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (40 Punkte)

(a) Es ist eine Revealed-Choice-Befragung, da bereits durchgeführte Entscheidungen erfragt wurden.

(b)
- Generisch (von Person und Alternative abhängig): Ticketpreis C_{ni}
- Sozioökonomisch (nur von Person abhängig): Einkommen E_n
- Alternativenspezifische Konstante: δ_{n1}

Das Einkommen muss an $I-1=1$ Alternative gekoppelt werden (welche ist egal), da es bei Logitmodellen nur auf die Nutzerdifferenz ankommt und ohne Kopplung der Einkommensanteil der Nutzendifferenz immer =0 ist, wodurch das Einkommen nicht berücksichtigt würde.

(c)
- Merkmalssumme X_1: Gesamter Ticketpreis C bei allen 3*9=27 Fahrten. Realisierung anhand der Daten:

$$X_1^{\text{data}} = C^{\text{data}} = \sum_{n=1}^{9} (y_{n1}C_{n1} + y_{n2}C_{n2}) = 1\,494\,€.$$

Prognose durch das Modell falls $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, also $P_{ni} = 1/I = 1/2$:

$$X_1^{\text{model}} = C^{\text{model}} = \sum_{n=1}^{9} \left(\frac{3}{2}C_{n1} + \frac{3}{2}C_{n2}\right) = 1\,674\,€.$$

- Merkmalssumme X_2: Gesamtzahl N_1 der Entscheidungen für die erste Klasse. Realisierung durch die Daten und Prognose durch das Modell:

$$X_2^{\text{data}} = N_1^{\text{data}} = \sum_{n=1}^{9} y_{n1} = 11, \quad N_1^{\text{model}} = \frac{3}{2} * 9 = 13.5.$$

- Merkmalssumme X_3: Gesamteinkommen der Klasse-1-Fahrer:

$$X_3^{\text{data}} = \sum_{n=1}^{9} y_{n1}E_n = 41\,000\,€, \quad X_3^{\text{model}} = \sum_{n=1}^{9} \frac{3}{2}E_n = 31\,650\,€.$$

(d) Es kommt bei Logitmodellen nur auf die Nutzendifferenz an, deshalb wird der Preis der 2. Klasse einfach =0 und der der ersten Klasse gleich der in der Aufgabenstellung gegebenen Differenz ΔC zur 2. Klasse gesetzt. Dann ergibt sich

$$V_1(\Delta C, E) = \beta_1 \Delta C + \beta_2 + \beta_3 E, \quad V_2(\Delta C, E) = 0.$$

Damit für den angegebenen Parametervektor $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)^{\mathrm{T}}$ und die angegebenen Preisdifferenzen und Einkommen

$$V_1(40, 3000) = -2.66, \quad V_1(30, 3000) = -0.889.$$

und damit die Wahrscheinlichkeiten, erster Klasse zu fahren:

$$P_1(40, 3000) = \frac{e^{-2.66}}{e^{-2.66}+1} = 6.5\,\%, \quad P_1(30, 3000) = \frac{e^{-0.889}}{e^{-0.889}+1} = 29.1\,\%$$

Die Wahrscheinlichkeit nimmt um 22.6 % auf 29.1 % zu, wenn man die Preisdifferenz von 40 € auf 30 € reduziert.

(e) Die (asymptotischen) Konfidenzintervalle zur Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 5\,\%$:

$$\beta_j \in [\hat{\beta}_j - \Delta\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_j + \Delta\hat{\beta}_j], \quad \Delta\hat{\beta}_j = z_{1-\alpha/2}\sqrt{V_{jj}}$$

lassen sich direkt aus den angegebenen Schätzern $\hat{\beta}_j$, den Elementen V_{jj} der Varianz-Kovarianz-Matrix und dem Quantil $z_{0.975} = 1.96$ der Standardnormalverteilung berechnen:

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{\beta}_1 &= 0.149, & \beta_1 &\in [-0.326, -0.0286], \\
\Delta\hat{\beta}_2 &= 3.69, & \beta_2 &\in [-5.99, 1.39], \\
\Delta\hat{\beta}_3 &= 0.00211, & \beta_3 &\in [0.000132, 0.00436].
\end{aligned}$$

Damit sind die Einflussfaktoren Preisdifferenz und Einkommen relevant, nicht hingegen die alternativenspezifische Konstante.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) Hier muss man darauf achten, dass bei nominalskalierten exogenen Variablen, hier das Land, alle Ausprägungen bis auf eine separat durch Selektoren in das Regressionsmodell gekoppelt werden:

$$y(\boldsymbol{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 \delta_{x_2,\mathrm{USA}} + \beta_3 x_3 \delta_{x_2,\mathrm{D}} + \beta_4 x_3 \delta_{x_2,\mathrm{USA}} + \epsilon,$$

mit dem Achsabschnitt β_0, der Bevölkerungsdichte x_1 (kardinalskaliert), dem Land x_2 (nominalskaliert) und den variablen Autokosten x_3. Der Selektor $\delta_{x_2,\mathrm{USA}} = 1$ falls das Land ist die USA und =0 sonst. Die variablen Autokosten x_3 werden ebenfalls durch Selektoren auf jeweils eines der Länder eingegrenzt.

(b) Elastizität der Autofahrer in den USA:

$$\bar{y} = \frac{55+44+51+41+50}{5} = 48.2, \quad \bar{x}_j = \frac{5+5+7+7+6}{5} = 6,$$

und damit

$$\epsilon_{\mathrm{USA}} = \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_j} = \frac{6}{48.2}\beta_4 \overset{\beta_4=3/\mathrm{km}}{=} \underline{\underline{-0.373.}}$$

Analog Elastizität der deutscher Autofahrer:

$$\bar{y} = 30.4, \quad \bar{x}_j = 20.4, \quad \epsilon_{\mathrm{D}} = \frac{20}{30.4}\beta_3 \overset{\beta_3=0.5/\mathrm{km}}{=} \underline{\underline{-0.336.}}$$

Die Nachfrageelastizität ist in den beiden Ländern nur um etwa 15%, nicht um den Faktor 6 unterschiedlich! Der Grund ist, dass ein Cent mehr bei den durch den billigen Treibstoff bedingten geringel variablen Kosten in den USA viel spürbarer ist und auch die Strecken länger sind. [Erklärung nicht verlangt]

(c) Aus den Daten:

$$\bar{y} = 39.3, \quad \bar{x}_1 = 168.5, \quad \bar{x}_2 = 0.5$$

Aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Varianzen und Kovarianzen,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 8220 & -33.75 \\ -33.75 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_y = \begin{pmatrix} -834 \\ 4.45 \end{pmatrix},$$

mit einer Formel aus dem Skript:

$$\det \mathbf{S} = s_{11}s_{22} - s_{12}^2 = \underline{\underline{916}}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{s_{1y}s_{22} - s_{2y}s_{12}}{\det(\mathbf{S})} = \underline{\underline{-0.0637}}, \\
\hat{\beta}_2 &= \frac{s_{2y}s_{11} - s_{1y}s_{21}}{\det(\mathbf{S})} = \underline{\underline{9.20}}, \\
\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 = \underline{\underline{45.4}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Matrix des vollen Aufwandes $\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ bei 2×2 Matrizen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & 1 - A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1 - A_{11})(1 - A_{22})} \begin{pmatrix} 1 - A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & 1 - A_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.14 & 0.0714 \\ 0.571 & 1.29 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Alles wird (Grundregel des Kapitalismus) in Geldeinheiten verrechnet.

- Nachfrage eines Autos vom Endverbraucher zu 20 000 €: $\Rightarrow$ $y_1 = 20\,000$
- Betriebskosten des Endverbrauchers währed des Autolebens:
  200 000 km * 0.2 €/km=40 000 €: $\Rightarrow$ $y_2 = 40\,000$

Wichtig: Diese Güterströme werden *direkt* vom Autobesitzer bzw. den Besitzern nachgefragt. Es handelt sich also um den externen *Nachfrage*vektor (in €)

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 20\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss von der Wirtschaft dafür der Erzeugungsvektor mit den Komponenten

$$\begin{aligned}
x_1 &= B_{11} y_1 + B_{12} y_2 = 25\,700, \\
x_2 &= B_{21} y_1 + B_{22} y_2 = 62\,900
\end{aligned}$$

erzeugt werden. Für die Produktion und den Betrieb eines Autos während seiner Lebenszeit müssen also durch die Verflechtungseffekte *zusätzlich* Autos im Wert von $x_1 - y_1 = 5\,700$ Euro bzw. 0.285 Autos sowie $x_2 - y_2 = 22\,900$ Euro an sonstigen Gütern bereitsgestellt werden.

(c) Die in der Aufgabenstellung gegebenen Emissionskoeffizienten der beiden Sektoren werden mit $a_1 = a_2 = 1$ kg CO_2/€ bezeichnet.

(i) Emission an CO_2 durch Betrieb des Autos während der Lebenszeit:

$$E_1 = a_2 y_2 = 40\,000\,\text{kg}$$

(ii) Emission an CO_2 durch Herstellung dieses Autos:

$$E_2 = a_1 y_1 = 20\,000\,\text{kg}$$

(iii) Zusätzliche Emission durch die Verflechtungseffekte:

$$E_3 = a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) = 28\,600\,\text{kg}$$

Die Emissionen E_1 durch den Betrieb sind im Wesentlichen die dem Autofahrer direkt bewussten Emissionen durch den Treibstoffverbrauch. Diese machen aber nur etwa 45 % der ursächlich diesem Auto zuzuordnenden Gesamtemissionen von $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 88\,600$ kg aus! [Erklärung nicht verlangt]