Methoden Verkehrsökonometrie für Master-Studierende

Winter semester 2021/22, Solutions to Tutorial No. 9

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.1: ML-Schätzung von Trivialen und Konstantenmodellen

(a) Im Trivialmodell ist $V_{ni} = 0$. Damit ergibt sich im binomialen Probitmodell

$$P_1 = \Phi\left(\frac{V_1 - V_2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}, \quad P_2 = 1 - P_1 = \frac{1}{2}$$

und im Binomialen Logitmodell

$$P_i = \frac{e^0}{\sum_{i'=1}^{I} e^0} = \frac{1}{I} = \frac{1}{2}$$

[*NB:* Im i.i.d. multinomialen Probitmodell kann man dies direkt nur mit Klimmzügen=partieller Integration zeigen:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon)\Phi^{I-1}(\epsilon)\ \mathrm{d}\epsilon \\ &= \left[\Phi^I(\epsilon)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\epsilon)(I-1)\Phi^{I-2}(\epsilon)f(\epsilon)\ \mathrm{d}\epsilon \\ &= 1 - (I-1)P_1 \quad \Rightarrow \quad IP_1 = 1 \text{ bzw. } P_1 = \frac{1}{I} \end{aligned}$$

und daraus $P_1 = 1/I$. Indirekt und einfacher natürlich durch Symmetrie.]

(b) Die für allen diskreten Wahlmodelle gültige Loglikelihood lautet (ohne die konstanten Logarithmen der Multinomialkoeffizienten)

$$\ln L(\vec{\beta}) = \tilde{L}(\vec{\beta}) \sum_n \sum_i y_{ni} \ln P_{ni}(\vec{\beta})$$

Bei Konstantenmodellen hängen die Nutzenfunktionen und damit die Auswahlwahrscheinlichkeiten nicht von exogenen Variablen und damit nicht von n ab, $P_{ni} = P_i$. Es gilt dann, unter Verwendung der Gesamtzahl $N_i = \sum_n y_{ni}$ der Wahlentscheidungen für Alternative i,

$$\tilde{L}(\vec{\beta}) = \sum_i N_i \ln P_i(\vec{\beta}), \quad N_i = \sum_n y_{ni}, \quad \sum_i P_i = 0 \tag{1}$$

bzw. bei zwei Alternativen ($P_1 + P_2 = 1$ sowie $\vec{\beta} = \beta_1$):

$$\tilde{L}(\beta_1) = N_1 \ln P_1(\beta_1) + N_2 \ln(1 - P_1(\beta_1))$$

Da im Konstantenmodell $V_{ni} = \beta_1 \delta_{i1}$ sowohl im Probit- wie im Logitmodell die Wahrscheinlichkeit P_1 streng monoton mit β_1 steigt, kann man zur Maximierung direkt nach P_1 (anstelle von β_1) ableiten und Nullsetzen:

$$\frac{\partial \tilde{L}(P_1)}{\partial P_1} = \frac{N_1}{P_1} - \frac{N_2}{1 - P_1} \stackrel{!}{=} 0$$

und damit (wenn man wieder $1 - P_1 = P_2$ setzt)

$$\frac{N_1}{P_1} = \frac{N_2}{P_2}$$

Zusammen mit der Normierungsbedingung ergibt dies

$$P_i = f_i = \frac{N_i}{N}$$

(mit $N = N_1 + N_2$ der Gesamtzahl an Entscheidungen), also Auswahlwahrscheinlichkeit = relative Häufigkeit.

Hinweis2: Im Logitmodell wird natürlich genau dann die zu β_1 geörige Merkmalssumme $X_1^{\text{data}} = N_1$ auch vom Modell richtig reproduziert: $X_1^{\text{Modell}} = NP_1 = N_1$.

Hinweis2: Mit Hilfe der sogenannten *Lagrange;schen Multiplikatoren* für die Minimieruing von Funktionen unter Nebenbedingungen lässt sich dieser Sachverhalt “die prognostiziertne Wahrscheinlichkeiten im Konstantenmodell sind gleich der beobachteten relativen Häufigkeiten auch allgemein zeigen. Wie starten von Gl. (1) und schreiben sie einschließlich der Wahrscheinlichkeits-Nebenbedingung in der Form

$$\tilde{L}(\vec{\beta}) = \sum_i N_i \ln P_i, \quad g(P_1, ..., P_I) = 0,$$

wobei die Nebenbedingung $g(\vec{P}) = \sum_i P_i - 1$ in der Form $g(\vec{P}) = 0$ formuliert ist. Die Extremwertbildung under Berücksichtigung der Nebenbedingung(en) ist eine Verallgemeinerung der “normalen” Minimierung/Maximierung unter Hinzunahme der Lagrange-Multiplikatoren λ_j (einen pro Nebenbedingung), welche zunächst unbestimmte reelle Zahlen sind und nachträglich aus den Nebenbedingungen bestimmt werden. Hier gibt es bei einer Nebenbedingung nur einen Lagrange-Multiplikator λ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial P_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial P_i} &= 0 \\ \frac{N_i}{P_i} + \lambda * 1 &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$P_i = -\frac{N_i}{\lambda}$$

und aus der Nebenbedingung

$$\sum_i P_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_i N_i = -\frac{N}{\lambda} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -N$$

und schließlich

$$P_i = -\frac{N_i}{\lambda} = \frac{N_i}{N}$$

gleich der relativen Häufigkeit.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.2: Autokauf

(a) Es ist eine Revealed-Choice-Befragung, da bereits durchgeführte Entscheidungen erfragt wurden.

(b)
- Alternativenspezifische Konstante: δ_{i1}
- Sozioökonomisch: Alter des bisherigen Kfz, ob er als Neu- oder als Gebrauchtwagen gekauft wurde und der Rabatt: Auch der Rabatt ist eine sozioökonomische Variable, da er vom Händler individuell mit dem potentiellen Käufer ausgehandelt wird, aber nicht von den Alternativen abhängt (bei Nichtkauf hat man den Rabatt nur nicht angenommen).
- Generische Variable: keine.

(c) Nein, das Fahrzeugalter muss alternativenspezifisch formuliert werden, da es eine sozioökonomische Variable ist bzw. sich nicht zwischen den Alternativen unterscheidet.

(d)
- Merkmalssumme X_1: Gesamte Zahl der gekauften Neuwagen
- Merkmalssumme X_2: Summe der Fahrzeugalter der Kunden, welche ein neues Auto kaufen (bei den Daten sind dies 3 Kunden)
- Merkmalssumme X_3: Summe des Rabatts, welcher den Käufern gewährt wurde (bei den Daten sind dies 3 Käufer)
- Merkmalssumme X_4: Wieviel der Käufer auch bisher einen Neuwagen fuhren

Allgemein gilt

$$x_m^{\text{data}} = \sum_{n,i} x_{ni}^{(m)} y_{ni}, \quad x_m^{\text{mod}} = \sum_{n,i} x_{ni}^{(m)} P_{ni}(\vec{\beta})$$

mit den Faktoren

$$x_{ni}^{(1)} = \delta_{i1}, \quad x_{ni}^{(2)} = T_n\delta_{i1}, \quad x_{ni}^{(3)} = R_n\delta_{i1}, \quad x_{ni}^{(4)} = \mathcal{N}_n\delta_{i1},$$

wobei $\mathcal{N}_n = 1$, wenn Kunde n bisher einen Neuwagen hatte, und =0 sonst. Ferner sind bei $\vec{\beta} = 0$ alle modellierten Auswahlwahrscheinlichkeiten $P_{ni}(\vec{0}) = 1/I = 1/2$. Damit

Daten:$X_1^{\text{data}} = \sum_{n,i} \delta_{i1} y_{ni} = \sum_n y_{n1} = N_1 = 3,\quad$ Modell $\vec{\beta} = 0 : X_1^{\text{mod}} = N/2 = 5$
Daten:$X_2^{\text{data}} = \sum_{n,i} T_n \delta_{i1} y_{ni} = \sum_n T_n y_{n1} = 27,\quad$ Modell $\vec{\beta} = 0 : X_2^{\text{mod}} = 75/2 = 37.5$
Daten:$X_3^{\text{data}} = \sum_{n,i} R_n \delta_{i1} y_{ni} = \sum_n R_n y_{n1} = 8,\quad$ Modell $\vec{\beta} = 0 : X_3^{\text{mod}} = 18/2 = 9$
Daten:$X_4^{\text{data}} = \sum_{n,i} \mathcal{N}_n \delta_{i1} y_{ni} = \sum_n \mathcal{N}_n y_{n1} = 2,\quad$ Modell $\vec{\beta} = 0 : X_4^{\text{mod}} = 5/2 = 2.5$

(e) Weil es unattraktiv ist, ein neues Auto zu kaufen, wenn man bereits einen 0 Jahre alten Wagen besitzt und vom Händler keinen Rabatt bekommt.

(f) Einsetzen der Wahrscheinlichkeit für das Binomial-Logitmodell für $T_n = 5$ (5 Jahre alt), $R_n = 2$ (2 000 € Rabatt), Neuwagen-Dummy=1 ("der Alte war damals ein Neuer") unter Verwendung des Parameterschätzers $\hat{\vec{\beta}} = (-9.2, 0.35, 2.2, 1.3)'$ der Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} V_1 &= \hat{\beta}_1 + 5\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 = -1.75, \\ N &= e^{V_1} + e^{V_2} = e^{-1.75} + 1 = 1.174, \\ P_1 &= \frac{e^{V_1}}{N} = \underline{\underline{0.148}} \end{aligned}$$

(g) Die nominalskalierte exogene Variable "bisher Neuwagen" wird zur dreiwertigen nominalskalierten Variable "Kauf des letzten Kfz" mit den Ausprägungen 0: "Gebrauchtwagen", 1: "Neuwagen" und 2: "Bisher kein Kfz". Wie immer (Modelle der diskreten Wahltheorie, aber auch Regressionsmodelle!) bildet man bei m-wertigen nominalskalierten Variablen $m-1$ quasilineare Einflussfaktoren, also hier 3-1=2 Faktoren. Die neuen deterministischen Nutzenfunktionen lauten also nun

$$V_{ni} = \beta_1\delta_{i1} + \beta_2 T_n \delta_{i1} + \beta_3 R_n \delta_{i1} + \beta_4 \delta_{i1} \begin{cases} 1 & \text{Neuwagen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} + \beta_5 \delta_{i1} \begin{cases} 1 & \text{Gebrauchtwagen} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei gibt β_4 die Attraktivität eines Neukaufs für bisherige Neuwagenbesitzer gegenüber Kfz-Nichtbesitzern und β_5 die Attraktivität eines Neukaufs für bisherige Gebrauchtwagenbesitzer gegenüber den Kfz-Nichtbesitzern unter *ceteris-paribus-Bedingungen* an.