Methoden Verkehrsökonometrie für Master-Studierende

Winter semester 2021/22, Solutions to Tutorial No. 2

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.1: Matrix-Rechenregeln

(a) $\vec{a}'\vec{b} = \vec{b}'\vec{a} = \sum_i a_i b_i$, aber es gilt z.B. für die 11-Komponente der Matrixprodukte

$$(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})_{11} = \sum_k a_{1k} b_{k1}, \quad (\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}})_{11} = \sum_k b_{1k} a_{k1}.$$

Insbesondere werden also zur Berechnung der 11-Komponente einmal die Werte a_{11}, a_{12}, ... und einmal a_{11}, a_{21}, ... verwendet. Für nichtsymmetrische Matrizen ist dies nicht äquivalent. Vergleicht man weiterhin z.B. die 12-Komponente, sieht man, dass selbst für symmetrische Matrizen i.A. keine Komutativität gilt!

(b) Beide Seiten der Gleichung führen auf die Komponenten

$$\left[(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}\right]_{ij} = \left[\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}})\right]_{ij} = \sum_k \sum_l a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

so dass Assoziativität (Unabhängigkeit von der Klammerung) gilt.

(c) $\underline{\underline{A}}(\vec{b} + \vec{c}) = \underline{\underline{A}}\vec{b} + \underline{\underline{A}}\vec{c}$ sowie $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}}$ folgen direkt aus der elementweisen Addition von Vektoren und Matrizen sowie der dahinterliegenden Distributivität von Zahlen bezüglich Addition und Multiplikation ("Ausmultiplizieren"). Dies wird durch direktes Ausrechnen einzelner Komponentne offensichtlich.

(d) $\left(\underline{\underline{A}}'\right)' = \underline{\underline{A}}$, da die Transposition Zeilen und Spalten vertauscht und damit doppeltes Tauschen den Ursprungszustand wiederherstellt.

(e) Es sei wieder die j-te Spalte von $\underline{\underline{A}}'$ (und damit die j-te Zeile von $\underline{\underline{A}}$) mit $\vec{a}_j$ bezeichnet. Dann gilt

$$\left(\underline{\underline{A}}\vec{b}\right)' = \left[\begin{pmatrix} - & \vec{a}_1 & - \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ - & \vec{a}_n & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | \\ \vec{b} \\ | \end{pmatrix}\right]' = \begin{pmatrix} \vec{a}_1'\vec{b} \\ \vdots \\ \vec{a}_n'\vec{b} \end{pmatrix}' = \left(\vec{a}_1'\vec{b}, \dots, \vec{a}_n'\vec{b}\right).$$

sowie

$$\vec{b}'\underline{\underline{A}}' = (-\vec{b}-) \cdot \begin{pmatrix} | & \vdots & | \\ \vec{a}_1 & \vdots & \vec{a}_n \\ | & \vdots & | \end{pmatrix} = \left(\vec{b}_1'\vec{a}, \dots, \vec{b}_n'\vec{a}\right) = \left(\vec{a}_1'\vec{b}, \dots, \vec{a}_n'\vec{b}\right).$$

Hierbei wurde die Multiplikationsregel "Zeilen des ersten Objekts mal Spalten des zweiten Objekts" symbolisch durch waagerechte bzw. senkrechte Striche angedeutet. Die Matrixregel $\left(\underline{\underline{AB}}\right)' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}'$ geht analog.

Man kann es alternativ auch durch explizite Summenbildung zeigen. Für "Matrix mal Vektor transponiert" ergibt sich für jede Komponente i:

$$\left(\vec{b}'\underline{\underline{A}}'\right)_i = \sum_k b_k \left(\underline{\underline{A}}'\right)_{ki} = \sum_k b_k a_{ik} = \sum_k a_{ik} b_k = \left(\underline{\underline{A}}\vec{b}\right)'_i.$$

Die Zahlenwerte passen also. Ferner ist sowohl das Produkt "transponierter Vektor mal Matrix" als auch "(Matrix mal Vektor) transponiert" ein transponierter Vektor, es passt also auch die Art des Vektors.

Für "Matrix mal Matrix transponiert" ergibt sich für jede Komponente ij:

$$\left(\underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}'\right)_{ij} = \sum_k \left(\underline{\underline{B}}'\right)_{ik} \left(\underline{\underline{A}}'\right)_{kj} = \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \left(\underline{\underline{AB}}\right)_{ji} = \left(\underline{\underline{AB}}\right)'_{ij}.$$

(f) Man könnte es durch direktes Ausrechnen zeigen. Eleganter ist es jedoch, die bereits hergeleitete Transpositionsregel $(\underline{\underline{AB}})' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}'$ sowie die Kippschalter-Eigenschaft $(\underline{\underline{A}}')' = \underline{\underline{A}}$ auf $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{X}}$ und $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{X}}'$ anzusetxen

$$\left(\underline{\underline{X}}'\underline{\underline{X}}\right)' = \underline{\underline{X}}' \left(\underline{\underline{X}}'\right)' = \underline{\underline{X}}'\underline{\underline{X}}.$$

(g) Die Einheitsmatrix $\underline{\underline{1}}$ (manchmal auch als $\underline{\underline{E}}$ bezeichnet) ist eine quadratische Matrix mit Einsen auf den Diagonalelementen und Nullen sonst. Sie ist das "neutrale Element" der Multiplikation und definiert die Matrixinverse quadratischer Matrizen A. Falls diese invertierbar ("regulär") sind, gilt per Definition[1].

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{AA}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$$

Ferner gilt natürlich $\underline{\underline{1}}' = \underline{\underline{1}}$. Insbesondere gilt damit

$$\underline{\underline{E}} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\right)' = \underline{\underline{A}}' \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)'.$$

Dabei wurde die bereits hergeleitete Regel $(\underline{\underline{AB}})' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}'$ für die Transposition von Produkten von Matrizen ausgenutzt.

Multipliziert man nun diese Gleichung von links[2] mit $\left(\underline{\underline{A}}'\right)^{-1}$, erhält man für die linke Seite

$$\left(\underline{\underline{A}}'\right)^{-1} \underline{\underline{E}} = \left(\underline{\underline{A}}'\right)^{-1}.$$

[1] Man beachte, dass Multiplikation einer regulären Matrix mit ihrer Inversen sowie eine Multiplikation von quadratischen Matrizen mit der Einheitsmatrix die einzigen Fälle sind, in denen die Matrixmultiplikation kommutativ ist!

[2] Wegen der Nichtkommutativität der allgemeinen Matrixmultiplikation muss man immer spezifizieren, ob man "von links" oder "von rechts" multipliziert!

Die rechte Seite ergibt

$$\left(\underline{\underline{A}}'\right)^{-1}\left(\underline{\underline{A}}'\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)'\right) = \left(\underline{\underline{A}}'\right)^{-1}\underline{\underline{A}}'\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)' = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)',$$

also $\left(\underline{\underline{A}}'\right)^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)'$, was zu zeigen war. Im ersten Schritt der Auswertung der rechten Seite wurde übrigens die Assoziativität der Matrixmultiplikation ausgenutzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.2: Matrix-Inversion

(a) Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Die Matrixmultiplikation kann man per Hand z.B. mit dem *Falkschen Schema* durchführen, welches die Multiplikationsregel

$$(\underline{\underline{AB}})_{ij} = i\text{-te Zeile von } \underline{\underline{A}} \text{ mal } j\text{-te Spalte von } \underline{\underline{B}}$$

formalisiert. Für 2×2-Matrizen lautet das Schema

		e	f
		g	h
a	b	ae+bg	af+bh
c	d	ce+cg	cf+dh

. Hier ist die obere (d.h. in der Multiplikation rechts stehende) Matrix gleich $\underline{\underline{A}}^{-1}$, also

$$e = \frac{d}{\det \underline{\underline{A}}}, \quad f = -\frac{b}{\det \underline{\underline{A}}}, \quad g = -\frac{c}{\det \underline{\underline{A}}}, \quad h = \frac{a}{\det \underline{\underline{A}}}.$$

also z.B.

$$\left(\underline{\underline{AA}}^{-1}\right)_{11} = ae + bg = \frac{ad - bc}{ad - cb} = 1$$

Analog mit den weiteren Elementen, mit dem Ergebnis

$$\underline{\underline{AA}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{E}},$$

wie es für eine Matrixinverse zu fordern ist.

(b) Mit dem Falkschen Schema lässt sich elementweise prüfen, ob

				a	b	c
				d	e	f
				g	h	i
	ei-fh	ch-bi	bf-ce	1	0	0
$\frac{1}{aei+bfg+cdh-afh-bdi-ceg}$	fg-di	ai-cg	cd-af	0	1	0
	dh-eg	bg-ah	ae-bd	0	0	1

.

Für das erste Element ist zu prüfen, ob

$$\frac{a(ei-fh)+d(ch-bi)+g(bf-ce)}{aei+bfg+cdh-afh-bdi-ceg}=1 \tag{1}$$

gilt. In gleicher Weise ist mit den anderen Elementen zu verfahren.

(c) Nach Aufgabenstellung sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ die *Spalten* der Matrix $\underline{\underline{A}}$, während die angegebenen Kreuzprodukte proportional zu den *Zeilen* der Matrixinversen sind. Nach der Matrixmultiplikationsregel "Zeile mal Spalte" erhält man unter Verwendung der in der Aufgabenstellungn angegebene Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ folgende schematische Darstellung:

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}=\frac{1}{\vec{a}_1'\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)}\begin{pmatrix} - & \vec{a}_2\times\vec{a}_3 & - \\ - & \vec{a}_3\times\vec{a}_1 & - \\ - & \vec{a}_1\times\vec{a}_2 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Für die erste Diagonalkomponente gilt

$$\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\right)_{11}=\frac{(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)'\vec{a}_1}{\vec{a}_1'(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)}=\frac{\vec{a}_1'(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)}{\vec{a}_1'(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)}=1$$

und analog für die beiden anderen Diagonalkomponenten (man beachte die Ringtauschregel für die Determinante in der Aufgabenstellung).

Für die Nichtdiagonalelemente wird immer ein Kreuzprodukt mit einem der Vektoren des Kreuzproduktes skalar mutlipliziert, was null ergibt. Beispielsweise

$$\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\right)_{12}\propto(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)'\vec{a}_2=0.$$

Weitere Info: Bedingungen für die Inversion einer Matrix

Es gibt im Wesentlichen zwei Bedingungen:

(i) Die Matrix muss quadratisch ($n=m$) sein, sonst könnte man nicht gleichzeitig $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{E}}$ und $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{E}}$ schreiben (vgl. die Bedingungen an die Matrixdimensionen bei der Matrixmultiplikation!)

(ii) Alle Zeilen (und Spalten) der Matrix müssen unabhängig voneinander sein. Man darf also nicht eine Zeile als Linearkombination anderer Zeilen schreiben können. Genau dann ist nämlich die Determinante=0 und das Inverse nicht definiert.

Letzteren Punkt kann man sich anhand der Darstellung der Inversen einer 3×3-Matrix durch Zeilenvektoren der ursprünglichen Matrix schön klarmachen. Deren Determinante lautet bekanntlich

$$\mathrm{Det}\underline{\underline{A}}=\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)$$

Kann man nun die erste Zeile von $\underline{\underline{A}}$ als Linearkombination der beiden anderen Zeilen schreiben, also

$$\vec{a}_1=\lambda\vec{a}_2+\mu\vec{a}_3,\quad \lambda,\mu\in I\!R$$

so gilt (unter Ausnutzung der Distributivitätsregeln)

$$\mathrm{Det}\underline{\underline{A}} = \lambda\vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) + \mu\vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = 0,$$

da in beiden Summanden das Kreuzprodukt mit einem der beiden daran beteiligten Vektoren skalar multipliziert wird, was bekanntlich null ergibt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.3: Matrix-Ableitungsregeln

Ableitung $\frac{\partial}{\partial\vec{\beta}}\left(\vec{\beta}'\vec{a}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial\vec{\beta}}\left(\vec{\beta}' \cdot \vec{a}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left(\sum_j \beta_j a_j\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_J}\left(\sum_j \beta_j a_j\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_J \end{pmatrix} = \vec{a}$$

Ableitung $\frac{\partial}{\partial\vec{\beta}}\left(\vec{\beta}'\underline{\underline{A}}\vec{\beta}\right)$ unter Beachtung der Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\vec{\beta}}\left(\vec{\beta}'\underline{\underline{A}}\vec{\beta}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left(\sum_j\sum_k \beta_j A_{jk}\beta_k\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_J}\left(\sum_j\sum_k \beta_j A_{jk}\beta_k\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k A_{0k}\beta_k + \sum_j \beta_j A_{j0} \\ \vdots \\ \sum_k A_{Jk}\beta_k + \sum_j \beta_j A_{jJ} \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{A}}\vec{\beta} + \underline{\underline{A}}'\vec{\beta}. \end{aligned}$$