Methoden Verkehrsökonometrie für Master-Studierende

Winter semester 2021/22, Tutorial No. 10

Aufgabe 10.1: Relevanz von Einflussfaktoren: Likelihood-Ratio-Test

Der *Likelihood-Ratio-Test* (LR-Test) testet die Relevanz von Einflussfaktoren bzw. Modellparametern und damit einen Teil der Modellspezifikation. Dabei wird das volle Modell mit J Parametern mit einem einfacheren Spezialfall dieses Modells mit $J_r < J$ Parametern (*restringiertes Modell*) verglichen. Das volle Modell beschreibt die Daten bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von α signifikant besser, wenn die Test-Statistik

$$\lambda = 2\left[\ln L(\hat{\vec{\beta}}) - \ln L^{\mathrm{r}}(\hat{\vec{\beta}}^{\mathrm{r}})\right] \sim \chi^2(J - J_r)$$

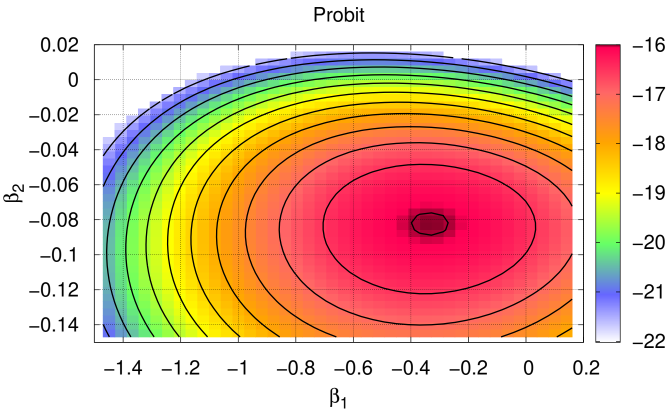
Realisierungen oberhalb des Quantils $\chi^2_{1-\alpha,\ J-J_r}$ ergibt. Zu untersuchen ist, ob man einen oder beide Parameter der deterministischen Nutzenfunktion

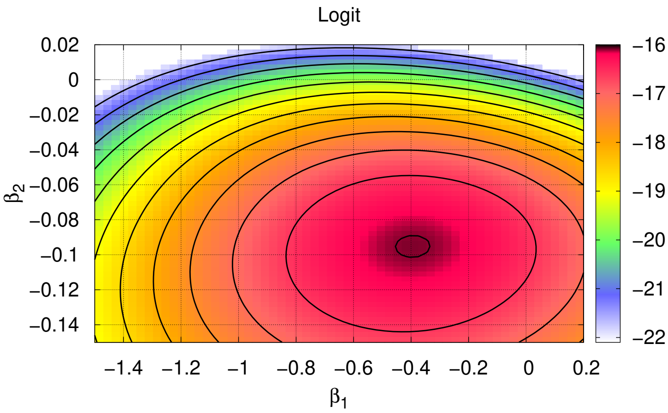
$$V_{ni}(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 \delta_{i1} + \beta_2 T_{ni}$$

bei Verwendung eines binomialen Logit bzw. Probit Modells weglassen kann, wenn die Modelle folgende *Revealed Choice*-Ergebnisse beschreiben sollen:

Person	Zeit Alternative 1 Fuß/Rad (min)	Zeit Alternative 2 motorisiert (min)	Wahl Alt. 1	Wahl Alt. 2
1	15	30	4	1
2	10	15	1	4
3	20	20	3	2
4	30	25	2	3
5	30	20	1	4
6	60	30	0	5

Die entsprechenden Likelihoodfunktionen sind graphisch gegeben (links: Probitmodell, rechts: Logitmodell, eine Höhenlinie entspricht 0.5 Log-Likelihood-Einheiten):

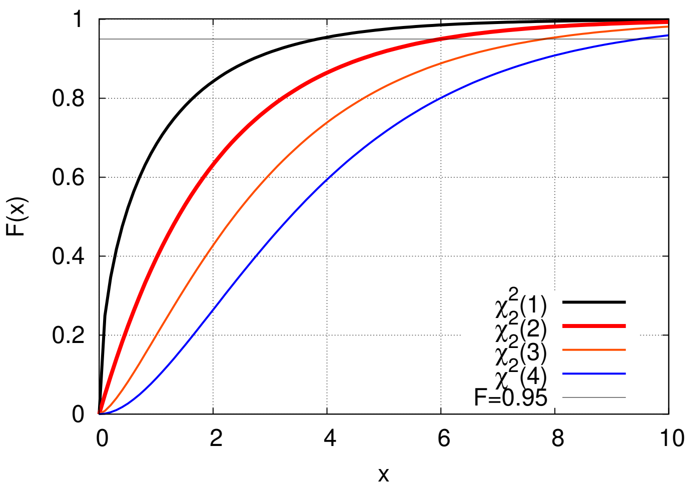




(a) Ist bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 5 % die globale Bevorzugung einer Alternative ein relevanter Einflussfaktor?

(b) Ist die Zeitsensitivität ein relevanter Einflussfaktor oder beschreibt das bei (b) eingeführte "Konstantenmodell" die Daten nahezu gleich gut ?

(c) Vergleichen Sie nun noch das "Konstantenmodell" und das volle Modell mit dem "Trivialmodell" $V_{ni} = 0$. Beschreibt das Trivialmodell bezüglich der anderen Modelle die Daten nicht signifikant schlechter?



Aufgabe 10.2: Likelihood-Ratio Test for regression models: $\lambda = T^2$

Der LR-Test kann nicht nur bei diskreten Modellen, sondern auch bei stetigen Modellen ("Regressionsmodellen") angewandt werden, sofern die Verteilung der Zufallskomponente definiert ist. Betrachtet wird das einparametrige stetige "Konstantenmodell" mit den Systemgleichungen

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \epsilon_i, \quad \epsilon \sim i.i.d.N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

im Vergleich mit dem stetigen "Trivialmodell"

$$\hat{y}_i = \mu_0 + \epsilon_i, \quad \epsilon \sim i.i.d.N(0, \sigma_\epsilon^2),$$

mit vorgegebener Konstante μ_0. Das Trivialmodell enthält also keine Parameter.

Diese Modelle sollen gegebene Daten der Form $\{y_i\}, i = 1, ..., n$ beschreiben. Der Datenumfang n sei so groß, dass Fehler bei der Varianzschätzung vernachlässigt werden können. Die Varianz σ_ϵ^2 ist also bekannt und es muss nur β_0 geschätzt werden.

(a) Enthalten ein oder beide dieser Modelle exogene Variable?

(b) Kalibrieren Sie das Konstantenmodell mit der Maximum-Likelihood Methode. Muss das Trivialmodell kalibriert werden?

(c) Zeigen Sie, dass die Testvariable des Likelihood-Ratio Tests dieser beiden Modelle exakt einer $\chi^2(1)$ - Verteilung gehorcht. *Hinweis:* Die $\chi^2(m)$-Verteilung ist definiert als die Verteilung einer Summe von m Quadraten unabhängiger standardnormalverteilter Zufallsvariablen.

(d) Vergleichen Sie den Likelihood-Ratio Test dieser Modelle mit dem Z-Test der Nullhypothese H_0: $\beta_0 = \mu_0$ (der Z-Test entspricht dem Student-t-Test bei bekannter Varianz). Zeigen Sie, dass der Likelihood-Ratio-Test genau dann dem Konstantenmodell eine signifikant bessere Beschreibung der Daten attestiert, wenn H_0 durch den symmetrischen Z-Test verworfen wird.