Methoden Verkehrsökonometrie für Master-Studierende

Winter semester 2021/22, Tutorial No. 2

Allgemeines

Vor den eigentlichen Aufgaben werden zunächst einige Konventionen und Bezeichnungsweisen für das Rechnen mit Vektoren (fette kursive Kleinbuchstaben) und Matrizen (fette serifenlose Großbuchstaben) vereinbart:

(1) Vektoren und Matrizen

"Normaler" Vektor = Spaltenvektor $\vec{a}$ mit n Komponenten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{“}n \times 1\text{-Matrix”}$$

Zeilenvektor = transponierter Spaltenvektor:

$$\vec{a}' = (a_1, \cdots, a_n) \qquad \text{“}1 \times n\text{-Matrix”}$$

$n \times m$-Matrix, also eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \qquad \text{“}n \times m\text{-Matrix”}$$

Transponierte Matrix: Die Zeilen und Spalten werden vertauscht (der transponierte Vektor von oben ist ein Sonderfall dieser Regel).

$$\underline{\underline{A}}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \left(\underline{\underline{A}}'\right)_{ij} = a_{ji}.$$

Einheitsmatrix $\underline{\underline{E}}$ (neutrales Element bezüglich der Multiplikation quadratischer Matrizen):

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Es gilt} \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

Matrixinverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$ einer quadratischen Matrix $\underline{\underline{A}}$:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$$

(Man beachte, dass im Allgemeinen bei der Matrixmultiplikation keine Kommutativität gilt!)

(2) Additionen und Multiplikationen (die Punkte für Skalar- und Matrixprodukte werden später teils weggelassen)

Operation	Definition	Bedingung	Ergebnis
Vektoraddition	$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_i = a_i + b_i$	$n_a = n_b$	Vektor mit n_a Komponenten
Matrixaddition	$(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$n_A = n_B,\ m_A = m_B$	$n_A \times m_A$-Matrix
Zahlen-multiplikation	$(c\vec{a})_i = ca_i, \quad (c\underline{\underline{A}})_{ij} = ca_{ij}$	keine	Vektor bzw. Matrix
Skalarprodukt	$\vec{a}' \cdot \vec{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$	$n_a = n_b$	Zahl ("Skalar")
Vektorprodukt	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$	$n_a = n_b = 3$	3-Vektor
Dyadisches (Tensor-) Produkt	$\vec{a} \cdot \vec{b}' = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \dots & a_1b_{n_b} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_a}b_1 & \dots & a_{n_a}b_{n_b} \end{pmatrix}$	keine	$n_a \times n_b$ - Matrix
Matrix mal Vektor	$\left(\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}\right)_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} b_j$	$\underline{\underline{A}} = n \times m$-Matrix, $\vec{b} = m$-Vektor	n-Vektor
Matrix-multiplikation	$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$	$\underline{\underline{A}} = n \times m$-Matrix, $\underline{\underline{B}} = m \times k$ - Matrix	$n \times k$-Matrix

Ein n-Vektor ist formal nichts anderes als eine $n \times 1$-Matrix und ein entsprechender Zeilenvektor eine $1 \times n$-Matrix. Damit sind die Rechenregeln für Skalar- und dyadische bzw. Tensorprodukte sowie die Regel für "Matrix mal Vektor" (und natürlich die gewöhnliche Zahlenmultiplikation) nichts anderes als Sonderfälle der Matrixmultiplikation!

Aufgabe 2.1: Matrix-Rechenregeln

Zeigen Sie durch Ausrechnen der linken und rechten Seiten, dass folgende Rechenregeln gelten:

(a) Kommutativität bei Skalarprodukten, $\vec{a}'\vec{b} = \vec{b}'\vec{a}$, aber im Allgemeinen keine Kommutativität bei Matrixprodukten: $\underline{\underline{AB}} \neq \underline{\underline{BA}}$

(b) Assoziativität bei Matrixprodukten: $(\underline{\underline{AB}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{BC}})$

(c) Distributivität bei diversen Produkten: $\underline{\underline{A}}(\vec{b}+\vec{c}) = \underline{\underline{A}}\vec{b} + \underline{\underline{A}}\vec{c}$
sowie $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{AB}} + \underline{\underline{AC}}$

(d) "Kippschalter-Eigenschaft" der Transposition: $\left(\underline{\underline{A}}'\right)' = \underline{\underline{A}}$

(e) Transpositionsregeln $\left(\underline{\underline{A}}\vec{b}\right)' = \vec{b}'\underline{\underline{A}}'$ sowie $\left(\underline{\underline{AB}}\right)' = \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{A}}'$

(f) Für beliebige $n \times m$-Matrizen $\underline{\underline{X}}$ ist $\underline{\underline{X}}'\underline{\underline{X}}$ eine symmetrische $m \times m$-Matrix, also

$$\left(\underline{\underline{X}}'\underline{\underline{X}}\right)_{ij} = \left(\underline{\underline{X}}'\underline{\underline{X}}\right)_{ji}$$

(g) Für beliebige reguläre Matrizen $\underline{\underline{A}}$ kann man die Operationen der Inversion und der Transposition vertauschen, also $\left(\underline{\underline{A}}'\right)^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)'$.

Aufgabe 2.2: Matrix-Inversion

(a) Geben Sie die Determinante der 2×2 Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

an. Zeigen Sie durch Matrixmultiplikation, dass die Inverse dieser Matrix gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(b) (zu Hause als Übung) zeigen Sie duch Einsetzen in $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$, dass für 3×3-Matrizen allgemein gilt

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

.

Aufgabe 2.3: Matrix-Ableitungsregeln

Auch das fortlaufende Ableiten einer (Skalar-)Funktion $f(\vec{\beta})$ nach den einzelnen Komponenten $\vec{\beta}$ des Parametervektors kann man kompakt in Vektor-Notation schreiben:

$$\frac{\partial f(\vec{\beta})}{\partial \vec{\beta}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_J} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch Anwendung auf $f_1(\vec{\beta}) = \vec{\beta}'\vec{a}$ und $f_2(\vec{\beta}) = \vec{\beta}'\underline{\underline{A}}\vec{\beta}$ ($\vec{a}$ und $\underline{\underline{A}}$ sind nicht von β abhängige Vektoren bzw. Matrizen geeigneter Dimension), dass folgende Ableitungregeln gelten:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}} \left(\vec{\beta}'\vec{a}\right) = \frac{\partial}{\partial \vec{\beta}} \left(\vec{a}'\vec{\beta}\right) = \vec{a},$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}} \left(\vec{\beta}'\underline{\underline{A}}\vec{\beta}\right) = \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}'\right) \vec{\beta}.$$