Lösungsvorschlag zur Klausur Verkehrsökonometrie

für Wiederholer

WS 2009/2010

Aufgabe 1 (30 Punkte)

(a) Da eine Zufalls-Stichprobe direkt aus der Grundgesamtheit gezogen wird (und nicht etwa aus abgeleiteten Mengen), ist der Schätzer "relative Häufigkeit der Ja-Antworten", $\hat{\mu} = f$, auch ohne Entzerrung erwartungstreu für den wahren Anteil μ. Die Realisierung ist hier gegeben durch

$$f = \hat{\mu} = \frac{522}{1000} = \underline{\underline{52.2\,\%}}.$$

(b) Es werden die Einwohner einer "große Stadt" befragt $\Rightarrow$ evtl. Korrekturfaktoren durch Abhängigkeiten zwischen den Antworten der befragten Personen sind irrelevant. Nimmt man (nur zur Bestimmung des Fehlers!) den wahren Wert $\mu = \hat{\mu} = f$ an,[1] ergibt sich die Varianz und damit die Standardabweichung des Schätzers zu

$$V(\hat{\mu}) = \sigma_f^2 = \frac{f(1-f)}{n}, \quad \sigma_f = \sqrt{\sigma_f^2} = 1.58\%.$$

Wegen der Unabhängigkeit und der Bedingung $nf(1-f) > 9$ ist $\hat{\mu}$ normalverteilt, so dass der Stichprobenfehler in $1 - \alpha = 95\%$ der Fälle kleiner ist als die halbe Breite des zugehörigen Konfidenzintervalls, also

$$\Delta f = \sigma_f z_{1-\alpha/2} = \sigma_f z_{0.975} = \underline{\underline{3.10\,\%}}.$$

(Das Quantil $z_{0.975}$ kann von S. 4 des Aufgabenblattes abgelesen werden)

(c) Die Stichprobe und die Grundgesamtheit wird nun gemäß den Ausprägungen des Schichtungsmerkmals "Beschäftigungsstatus" disaggregiert:

- $k = 1$: Erwerbstätige,
- $k = 2$: nicht Erwerbstätige,
- $k = 3$: Studenten

Der entzerrende Schätzer lautet

$$\hat{\mu}^{(\mathrm{E})}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3} E_k n_k \hat{\mu}_k = \sum_{k=1}^{3} \theta_k \hat{\mu}_k = \underline{\underline{55\,\%}} \tag{1}$$

mit

- den Anteilen n_k der einzelnen Schichten in der Stichprobe, $n_1 = 399$, $n_2 = 301$, $n_3 = 300$,
- Dem Stichprobenumfang $n = n_1 + n_2 + n_3 = 1000$,
- den wahren Anteilswerten $\theta_1 = 0.35$, $\theta_2 = 0.32$, $\theta_1 = 0.33$ aus der Aufgabenstellung,
- den relativen Häufigkeiten der Ja-Antworten in den einzelnen Schichten

$$\hat{\mu}_1 = \frac{79}{399}, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{180}{301}, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{263}{300}$$

[1] Damit macht man einen "Fehler des Fehlers", der für praktische Anwendungen wie die Bestimmung der Aussagekräftigkeit der Untersuchung oder die Planung des Stichprobenumfangs unerheblich ist.

– und den Entzerrungsfaktoren $E_k = \theta_k/(n_k/n) = n\theta_k/n_k$ (nur der Vollständigkeit halber; im vorletzte Ausdruck von (**??**) wurden diese bereits eingesetzt)

$$E_1 = \frac{350}{399} = 0.877, \quad E_2 = \frac{320}{301} = 1.063, \quad E_3 = \frac{330}{300} = 1.1.$$

Die Varianz des entzerrenden Schätzers ergibt sich gemäß einer Formel aus dem Skript:

$$V(\hat{\mu}^{(\mathrm{E})}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3} \theta_k E_k \sigma_k^2 = 0.0001698.$$

Hierbei wurde gemäß Aufgabenstellung die wahren Anteilswerte μ_k der einzelnen Schichten gleich den Schätzern $\hat{\mu}_k$ gesetzt, woraus sich die Einzelvarianzen der Ja-Nein-Antworten zu

$$\sigma_1^2 = \mu_1(1-\mu_1) = 0.159, \quad \sigma_2^2 = \mu_2(1-\mu_2) = 0.240, \quad \sigma_3^2 = \mu_3(1-\mu_3) = 0.108$$

ergeben.

Damit ergibt sich wie bei Teil (b) die halbe Breite des Konfidenzintervalls zu

$$\Delta f^{(\mathrm{E})}) = \sqrt{V(\hat{\mu}^{(\mathrm{E})})} z_{1-\alpha/2} = \underline{\underline{2.55\,\%}}.$$

(d) Die Genauigkeit nimmt mit $1/\sqrt{n}$ zu, also ergibt gleiche Genauigkeit wie bei Nichtberücksichtigung der Entzerrung den Faktor

$$r = \left(\frac{\Delta f}{\Delta f^{(\mathrm{E})}}\right)^2 = \frac{V(\hat{\mu}^{(\mathrm{E})})}{V(\hat{\mu})} = \underline{\underline{0.68}}.$$

Man benötigt also durch die Entzerrung bei gleicher Genauigkeit nur 68% des Stichprobenumfamgs, verglichen mit den nicht-entzerrten Schätzer f.

Aufgabe 2 (40 Punkte)

(a) Quelle-Ziel-Gruppe (QZG) WA: Bei ausschließlich Binnenverkehr gilt immer $u_i = v_i = 1$, also

$$Q_1^{\text{WA}} = H_1 = n_1^{\text{EWT}} \sigma^{\text{WA}} = 600 * 0.8 = \underline{\underline{480}}, \quad Q_2^{\text{WA}} = Q_3^{\text{WA}} = 0.$$

Vorläufige Zielsummen:

$$\tilde{Z}_1 = 0, \quad \tilde{Z}_2 = \epsilon^{\text{WA}} n_2^{\text{AP}} = 0.9 * 400 = 360, \quad \tilde{Z}_3 = \epsilon^{\text{WA}} n_3^{\text{AP}} = 0.9 * 100 = 90.$$

Der Korrekturfaktor beträgt

$$\alpha^{\text{WA}} = \frac{V^{\text{WA}}}{\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_3} = \frac{Q_1^{\text{WA}}}{\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_3} = 1.0667$$

und damit $Z_i^{\text{WA}} = \alpha^{\text{WA}} \tilde{Z}_i^{\text{WA}}$, also

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = \underline{\underline{384}}, \quad Z_3 = \underline{\underline{96}}.$$

Die Quelle-Ziel-Gruppe AW ist vom Typ II, es werden also anhand des Heimatverkehrsaufkommens die Zielsummen und nicht die Quellsummen bestimmt und der Korrekturfaktor für die Quellsummen bestimmt: Das Vorgehen ist 1:1 wie oben, wenn man die Ersetzungen

$$Q_i^{\text{WA}} \to Z_i^{\text{AW}}, \quad Z_i^{\text{WA}} \to Q_i^{\text{AW}}, \quad \tilde{Z}_i^{\text{WA}} \to \tilde{Q}_i^{\text{AW}}$$

vornimmt und ansonsten alle Superskripte WA durch AW ersetzt. Dies ergibt

$$Z_1^{\text{AW}} = H_1 = n_1^{\text{EWT}} \sigma^{\text{AW}} = 600 * 0.6 = \underline{\underline{360}}, \quad Z_2^{\text{AW}} = Z_3^{\text{AW}} = 0.$$

$$\tilde{Q}_1 = 0, \quad \tilde{Q}_2 = \epsilon^{\text{AW}} n_2^{\text{AP}} = 0.7 * 400 = 280, \quad \tilde{Q}_3 = \epsilon^{\text{AW}} n_3^{\text{AP}} = 0.7 * 100 = 70.$$

Der Korrekturfaktor beträgt

$$\alpha^{\text{AW}} = \frac{V^{\text{AW}}}{\tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3} = \frac{Z_1^{\text{AW}}}{\tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3} = 1.0286$$

und damit $Q_i^{\text{AW}} = \alpha^{\text{AW}} \tilde{Q}_i^{\text{AW}}$, also

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = \underline{\underline{288}}, \quad Q_3 = \underline{\underline{72}}.$$

(b) Quadratmeter Ladenfläche ziehen Kunden an $\Rightarrow$ Erzeugungsrate. In Fünfer-Einteilung gibt es keine QZG WE oder EW; diese werden auf die QZG WS bzw. SW abgebildet. Es gibt keine weiteren Strukturmerkmale, die Verkehrsströme von oder zu den Zielen "Sonstiges" erzeugen, also

$$\epsilon^{\text{WS}} = 0.4\,\text{m}^{-2}, \quad \epsilon^{\text{SW}} = 0.5\,\text{m}^{-2}.$$

Einwohnerbezogen ergeben sich die spezifischen Verkehrsaufkommen, also nach Angabe

$$\sigma^{\text{WS}} = 0.5, \quad \sigma^{\text{SW}} = 0.6.$$

(c) Würden Ladenbesuche alle ausschließlich innerhalb der QZG WS und SW stattfinden, kämen mehr Leute aus den Läden heraus als in sie hineingingen, sozusagen Shopping-Center als "Weiße Löcher" (analog wären die Arbeitsplätze in Bezirk 2 "Schwarze Löcher"). In Wirklichkeit werden die Shopping-Ströme durch die QZG SS ausgeglichen. Diese beinhaltet in der Fünfer-Einteilung z.B. die Wege Arbeiten-Einkaufen (AE) und Einkaufen-Arbeiten (EA). Wie in (e) gezeigt werden wird, sind die SS-Ströme in die Läden (Z_3^{SS})

größer als die aus den Läden (Q_3^{SS}), was den Überschuss an den innerhalb der QZG WS/SW die Läden verlassenden Leute ausgleicht. Analog sind (siehe ebenfalls (e)) die SS-Ströme aus Bezirk 2 größer als die in den Bezirk 2, $Q_2^{\mathrm{SS}} > Z_2^{\mathrm{SS}}$. Beides zusammen entspricht hier im Wesentlichen, dass mehr Leute von der Arbeit zum Einkaufen gehen als umgekehrt. [Jede einigermaßen sinnvolle Argumentation ergibt volle Punktzahl].

(d) Die QZG WS ist vom Typ I und das Vorgehen ist genau wie bei WA. Man muss nur die spezifischen Verkehrsaufkommen und Erzeugungsraten anpassen und als Bezugspersonen die Einwohner (statt der Erwerbstätigen) sowie als Strukturmerkmal die Ladenfläche (statt der Arbeitsplätze) nehmen. Dies ergibt

$$Q_1^{\mathrm{WS}} = n_1 \sigma^{\mathrm{WS}} = 1000 * 0.5 = 500, \quad Z_3^{\mathrm{WS}} = Q_1^{\mathrm{WS}}.$$

Alle anderen Quell- und Zielsummen sind gleich Null.

Für die QZG SW vom Typ 2 ergibt sich durch die von (a) bekannte Tauschregel $Q^{\mathrm{WS}} \to Z^{\mathrm{SW}}$, $Z^{\mathrm{WS}} \to Q^{\mathrm{SW}}$

$$Z_1^{\mathrm{SW}} = n_1 \sigma^{\mathrm{SW}} = 1000 * 0.6 = 600, \quad Q_3^{\mathrm{SW}} = Z_1^{\mathrm{SW}}.$$

Wieder sind alle anderen Quell- und Zielsummen gleich Null.

(e) Der gesamte SS-Verkehr wird von den im Bezirk 1 wohnenden 1000 Einwohnern des Untersuchungsgebietes generiert:

$$V^{\mathrm{SS}} = n_1 \sigma^{\mathrm{SS}} = 1000 * 0.5 = 500.$$

Die Aufteilung dieses Verkehrs auf die einzelnen Bezirke ist proportional zu den Produkten aus den relevanten Strukturgrößen S_i^{SS} mit den Erzeugungsraten ϵ^{SS}. Diese ist in der Aufgabenstellung direkt durch die Aufteilung 1:2:2 gegeben. Also gemäß dem Skript

$$\tilde{Q}_1^{\mathrm{SS}} = \tilde{Z}_1^{\mathrm{SS}} = \frac{1}{5} V^{\mathrm{SS}} = 100, \quad \tilde{Q}_2^{\mathrm{SS}} = \tilde{Z}_2^{\mathrm{SS}} = \tilde{Q}_3^{\mathrm{SS}} = \tilde{Z}_3^{\mathrm{SS}} = \frac{2}{5} V^{\mathrm{SS}} = 200.$$

Nun folgt der Randausgleich über alle QZG. Nach dem Skript ergibt sich die additiven bzw. subtraktiven Korrekturbeiträge b_i zu

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{2}\left(Z_1^{\mathrm{AW}} + Z_1^{\mathrm{SW}} - Q_1^{\mathrm{WA}} - Q_1^{\mathrm{WS}}\right) = -10, \\
b_2 &= \frac{1}{2}\left(Z_2^{\mathrm{WA}} - Q_2^{\mathrm{AW}}\right) = 48, \\
b_3 &= \frac{1}{2}\left(Z_3^{\mathrm{WA}} + Z_3^{\mathrm{WS}} - Q_3^{\mathrm{AW}} - Q_3^{\mathrm{SW}}\right) = -38
\end{aligned}$$

(bzw. b_3 auch aus $\sum_i b_i = 0$). Damit gemäß dem Vorgehen im Skript

$$\begin{aligned}
Q_1^{\mathrm{SS}} &= \tilde{Q}_1^{\mathrm{SS}} + b_1 = 90, & Z_1^{\mathrm{SS}} &= \tilde{Z}_1^{\mathrm{SS}} - b_1 = 110, \\
Q_2^{\mathrm{SS}} &= \tilde{Q}_2^{\mathrm{SS}} + b_2 = 248, & Z_2^{\mathrm{SS}} &= \tilde{Z}_2^{\mathrm{SS}} - b_2 = 152, \\
Q_3^{\mathrm{SS}} &= \tilde{Q}_3^{\mathrm{SS}} + b_3 = 162, & Z_3^{\mathrm{SS}} &= \tilde{Z}_3^{\mathrm{SS}} - b_3 = 238.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (30 Punkte)

(a) Die Route 2, da sie zeitlich kürzer ist (20 min vs. 22 min).

(b) Ja, da die Strecke von X nach B bei beiden Routen benutzt wird. Da es bei der Wahlentscheidung nur auf Differenzen ankommt, hebt sich die Reisezeit auf diesen Abschnitt weg.

(c) Wir lassen den Abschnitt X-B gemäß Teil (b) weg. Damit ergeben sich für die beiden Routen die Reisezeiten

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 12(1+Q_1/K_1) = 12(1+w_1 Q_{\mathrm{AB}}/K_1) = 12(1+qw_1), \\ \tau_2 &= 10(1+Q_2/K_2) = 10(1+2Q_2/K_1) = 10(1+2w_2 Q_{\mathrm{AB}}/K_1) = 10(1+2(1-w_1)q. \end{aligned}$$

Falls beide Routen benutzt werden, gilt

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2 \\ 12+12qw_1 &= 10+20q-20qw_1 \\ 32qw_1 &= 20q-2 \Rightarrow w_1(q) = \underline{\underline{\frac{10q-1}{16q}}}. \end{aligned}$$

Da $0 \le w_1 \le 1$ gelten muss, ist Zeigleichheit und damit eine Belastung beider Routen nur für $q \ge 0.1$ bzw. $\underline{\underline{Q_{\mathrm{AB}} \ge 100\,\mathrm{Kfz/h}}}$ gegeben. Ansonsten wird, wie schon bei (a) gefunden, nur Route 2 benutzt.

(d) Zur Ermittlung des Systemoptimums kann man entweder den gewichteten Erwartungswert

$$E(\tau) = w_1\tau_1(w_1) + (1-w_1)\tau_2(w_1)$$

minimieren, oder den Transformationsoperator $(1+Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q})$ auf die CR-Funktionen nehmen und wieder das Nutzergleichgewicht ausrechnen. Dieser Operator macht aus den Verlängerungsfaktor $(1+Q/K)$ der CR-Funktionen den Verlängerungsfaktor $(1+2Q/K)$. Wie man leicht sieht, ergibt sich daraus direkt

$$w_1^{\mathrm{sys}}(q) = w_1(2q) = \underline{\underline{\frac{20q-1}{32q}}}.$$

Ab einer Nachfrage von $q = 0.05$ bzw. für $\underline{\underline{Q_{\mathrm{AB}} \ge 50\,\mathrm{Kfz/h}}}$ wird auch die Umgehungsroute 1 verwendet, also eher als im Nutzergleichgewicht. Die "Opferlämmer", die diese Route verwenden, müssen allerdings eine etwas längere Zeit in Kauf nehmen.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

(a) (i) nichtlinear; (ii) linear in den exogenen Variablen T_k und C_1. Dasselbe gilt auch bezüglich der Parameter β, β_2 und β_3 (nur eine der beiden Antworten ergibt volle Punktzahl)

(b) Die Parameter β, β_2 und β_3.

(c) Die Indifferenzkurve konstanten Nutzens beim ÖPNV (nur da kann ein Geldwert gemessen werden) ergibt

$$dU_1 = -\ dT_1 + \beta_2\ dC_1 = 0\ \Rightarrow \frac{dC_1}{dT_1} = \frac{1}{\beta_2} = -12\ \text{€/h}$$

Für eine Ersparnis von 12 € (daher das negative Vorzeichen) würde man also eine Stunde mehr in Kauf nehmen. Also beträgt der implizite Zeitwert (für den ÖPNV) $\underline{\underline{12\,\text{€/h}}}$.

Die globale Bevorzugung des ÖPNV ist positiv, da β_3 positiv ist und beträgt $\underline{\underline{8\,\text{min}}}$. Dies entspricht einem Geldäquivalent von $-\beta_3/\beta_2 = \underline{\underline{1.60\,\text{€}}}$.

(d) Die tatsächlichen Kosten von 1.60 € entsprechen genau dem Geldäquivalent der ÖPNV-Bevorzugung. Da auch die Reisezeiten gleich sind, sind die (deterministischen) Nutzenfunktionen gleich, $U_1 = U_2$. Damit beträgt der Modal-Split 50:50 bzw. der ÖPNV-Anteil $\underline{\underline{50\,\%}}$.