Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

Klausur zur Vorlesung Verkehrsökonometrie

für den Bachelor-Studiengang Verkehrswirtschaft, SS 2022 Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (10 Punkte)

$$y = \sum_j \beta_j x_j, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = v, \quad x_2 = v_l, \quad x_3 = v_0 - v$$

Das Modell enthält eine Multi-Kolinearität, da (bei vorausgesetzt konstantem v_0 der Faktor x_3 für alle Datenpunkte als Linearkombination anderer Faktoren geschrieben werden kann:

$$x_3 = v_0 x_0 - x_1$$

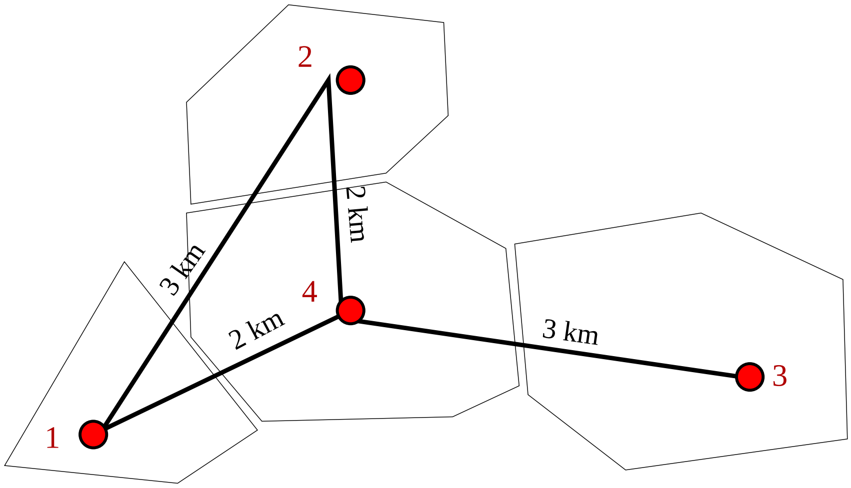
[*Nicht verlangt:*] Das von den Spezifikationen her valide Modell lautet also

$$y = \sum_{j=0}^{2} \beta_j x_j,$$

wobei das "neue" β_0 nun das "alte" $\beta_0 + \beta_3 v_0$ umfasst und das "neue" β_1 das "alte" $\beta_1 - \beta_3$

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Gegeben ist folgendes Untersuchungsgebiet mit 4 Bezirken, die alle Quell- und Zielsummen $Q_i = Z_i = 1\,000$ Wege haben:



(a) Bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h entspricht 1 km der eit von 2 min. Die Widerstandsmatrix der kürzesten Wege von i nach j ist demgemäß

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 0 & 10 & 4 \\ 10 & 10 & 0 & 6 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Die Wilson-Beweretung lautet $B_{ij} = e^{-\beta W_{ij}}$. Mit $\beta = 0.1$ Minuten^{-1} ergibt sich

$$B_{12} = B_{34} = 0.549, \quad B_{13} = B_{23} = 0.368, \quad B_{14} = B_{24} = 0.670,$$

sowie $B_{ji} = B_{ij}$ iund $B_{ii} = 0$. Damit

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.549 & 0.368 & 0.670 \\ 0.549 & 1.000 & 0.368 & 0.670 \\ 0.368 & 0.368 & 1.000 & 0.549 \\ 0.670 & 0.670 & 0.549 & 1.000 \end{pmatrix}$$

(c) Die Quelle-Zielgruppe WE (Wohnen-Einkaufen) ist quellseitig hart und zielseitig weich/frei. Die entsprechende Formel aus dem Skript für die Verkehrsstromanteile $v_{ij} = V_{ij}/V$ mit $V = \sum_i Q_i = \sum_i Z_i = 4\,000$ lautet also

$$v_{ij} = \frac{B_{ij} q_i \tilde{z}_j}{\sum\limits_k B_{ik} \tilde{z}_k}$$

mit $q_i = Q_i/V = 1/4$ den harten Quellanteilen und $\tilde{z}_i = Z_i/V = 1/4$ den Zielpotentialen, die aber über- oder unterschritten werden können.

(d) Die Berechnung nach dieser Formel (nicht nachrechnen!) ergibt folgende Verkehrsstrommatrix $\mathbf{V} = 4\,000\,\mathbf{v}$:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 387 & 212 & 142 & 259 \\ 212 & 387 & 142 & 259 \\ 161 & 161 & 438 & 240 \\ 232 & 232 & 190 & 346 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente V_{13} und V_{23} sind besonders klein, da die entsprechenden Wege weit und damit unattraktiv sind. Die Diagonalelemente haben zunächst einmal für den Binnenverkehr die maximale Attraktivität $B_{ii} = 1$ (Weglängen de-facto Null), deshalb sind alle groß. Besonders groß ist V_{33}, da für diesen Bezirk die Nachbarwege weit sind und damit noch mehr Leute im Bezirk 3 bleiben. Dennoch ist wegen der Unattraktivität für andere Bezirke die Zielsumme nach 3 kleiner als das Zielpotential. Der zentrale Bezirk 4 hat dementsprechend eine hohe Lagegunst. Aufgrund der harten Randsummenbedingungen ist jedoch die Quellsumme genau 1 000 Wege.

(e) Die Lagegunst bezüglich des *hereinkommenden* Verkehrs ist nach den Unterlagen gegeben durch

$$L_i^{\text{ein}} = \frac{1}{V} \sum_j B_{ji} Q_j$$

Diese lässt sich leicht berechnen, da sie nur von den Quell- und Zielsummen und der Bewwertungsmatrix, nicht jedoch von der ausgerechneten Verkehrsstrommatrix abhängt (deren Zielsummen bestätigen dann die Lagegunst). Da hier alle Q_i und Z_i gleich sind, vereinfacht sich die Formel zu 1/4 mal den jeweiligen Spaltensummen von $\mathbf{B}$:

$$L_i^{\text{ein}} = \frac{1}{4} \sum_j B_{ji}$$

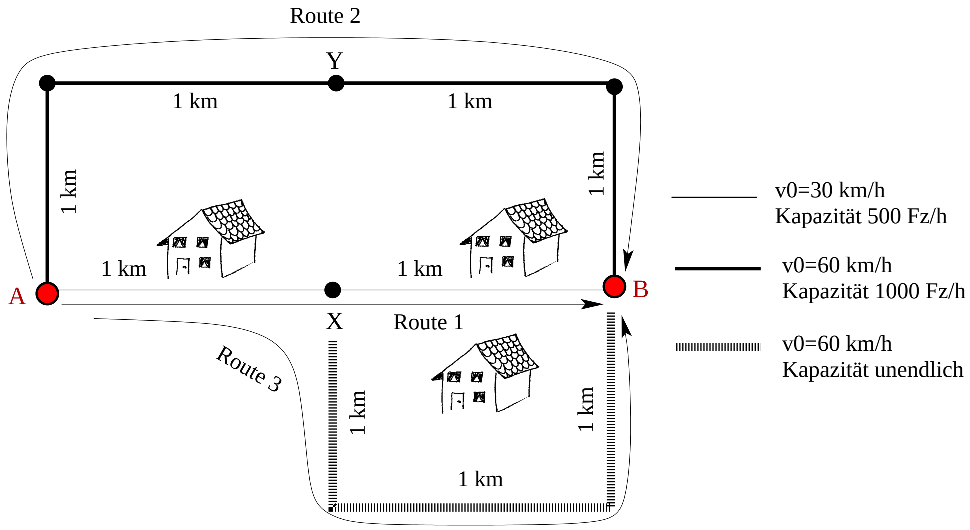
Damit $\boldsymbol{L} = (0.647, 0.647, 0.571, 0.722)'$.

(i) Beim Zufallsmodell gilt für alle Elemente $B_{ij} = 1$ und damit $\boldsymbol{L} = (1, 1, 1, 1)'$.

(ii) beim Wilson-Modell mit extrem hohen Werten von β gilt $B_{ii} = 1$ aber $B_{ij} \to 0$ für $i \neq j$ und dmait $\boldsymbol{L} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)'$.

Aufgabe 3 (40 Punkte)

Von A nach B gibt es drei Routen mit den angegebenen maximalen Geschwindigkeiten und Kapazitäten. Die tatsächliche Reisedauer wird mit der linearen CR-Funktion $T_l = T_{l0}\left(1 + \frac{Q_l}{K_l}\right)$ modelliert.



(a) Reisezeiten der drei Routen r als Funktion der Flüsse Q_r:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 2\left(1 + \frac{Q_1 + Q_3}{K_1}\right) + 2\left(1 + \frac{Q_1}{K_1}\right) = 4 + 2\left(\frac{2Q_1 + Q_3}{K_1}\right), \\
T_2 &= 4\left(1 + \frac{Q_2}{K_2}\right), \\
T_3 &= 2\left(1 + \frac{Q_1 + Q_3}{K_1}\right) + 3
\end{aligned}$$

(b) Wir setzen

$$\begin{aligned}
Q_1 = Q_{\mathrm{AB}} w_1 = q K_1 w_1, \\
Q_2 = Q_{\mathrm{AB}} w_2 = q K_1 w_2, \\
Q_3 = Q_{\mathrm{AB}} w_3 = q K_1 w_3 = q K_1 (1 - w_1 - w_2)
\end{aligned}$$

und erhalten nach Einsetzen das angeführte Ergebnis

$$\begin{aligned}
T_1 &= 4 + 2q(1 - w2 + w1), \\
T_2 &= 4 + 2q w_2, \\
T_3 &= 5 + 2q(1 - w2)
\end{aligned}$$

(c) Bei geschlossener Route 3 gilt $w_2 = 1 - w_1$ und $w_3 = 0$. Das Nutzergleichgewicht $T_1 = T_2$ wird damit

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_2 \\
4 + 4q w_1 &= 4 + 2q(1 - w_1) \\
2 w_1 &= 1 - w_1
\end{aligned}$$

und damit

$$w_1 = \frac{1}{3}, \quad w_2 = \frac{2}{3}$$

was, wie angekündigt, nicht von der Nachfrage Q_{AB} abhängt

(d) Da allgemein bei linearen CR-Funktionen gilt

$$w_r^{\mathrm{SO}}(q) = w_r^{\mathrm{UE}}(2q)$$

gilt diese Aufteilung auch im Systemoptimum (SO).

(e) Für eine offene Route 3 gelten die allgemeinen Zeiten aus Aufgabenteil (b). Die Route 3 wird nach dem ersten Wardrop-Prinzip dann nicht benutzt, wenn sie auch ohne Belastung eine größere Reisezeit als die anderen Routen aufweist. Setzt man also $w_3 = 0$, ergeben sich mit dem Nutzergleichgewicht $w_1 = 1/3$, $w_2 = 2/3$ von oben die Reisezeiten

$$T_1 = T_2 = 4 + \frac{4}{3}q.$$

Die leere Route 3 hat hingegen

$$T_3 = 5 + \frac{2}{3}q,$$

sodass $T_1 = T_2 = T_3 = 6$ für $q = 3/2$ bzw $Q_{\mathrm{AB}} \le K_1 q = 3/2 K_1 = 750\,\text{Fahrten/h}$ und $> T_1 = T_2$ für $q < 3/2$ gilt. Also wird Route 3 für $q \le 3/2$ nicht benutzt, was die Annahme $w_3 = 0$ im Nachhinein bestätigt

(f) Berechnen Sie nun das Nutzergleichgewicht für $q > 3/2$ (alle drei Routen werden benutzt).

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 \quad &\Rightarrow \quad 1 - w_2 + w_1 = w_2 \text{ bw. } w_1 = 2w_2 - 1 \\ T_1 = T_3 \quad &\Rightarrow \quad 2qw_1 = 1 \text{ bw. } w_1 = \frac{1}{2q} \end{aligned}$$

Damit für $q \ge 3/2$

$$w_1(q) = \frac{1}{2q}, \quad w_2(q) = \frac{1 + w_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4q}, \quad w_3(q) = 1 - w_1 - w_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4q}$$

(g) Im SO gilt $w_r^{\mathrm{SO}}(q) = w_r^{\mathrm{UE}}(2q)$, also

$$\boldsymbol{w} = \begin{cases} (1/3,\ 2/3,\ 0)' & q < 3/4 \\ \left(\frac{1}{4q}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8q}, \frac{1}{2} + \frac{3}{8q}\right)' & q \ge 3/4 \end{cases}$$

Man beachte, dass auch die Fallunterscheidung sich entsprechend ändert!

Aufgabe 4 (40 Punkte)

Ein Modell für die Kurbel-Leistung P von Radfahrern in Abhängigkeit von Geschwindigkeit v, Gegenwind w und Steigung α hat folgende, physikalisch motivierte Form:

$$P = mgv(\mu + \alpha) + \frac{1}{2} c_w \rho A v (v + w)^2 + \epsilon$$

mit der Gesamtmasse m, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, dem Rollreibungskoeffizient μ, dem Luftwiderstandsbeiwert c_w, der Luftdichte $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, der Stirnfläche A und dem Restterm ϵ.

(a)
- Exogenen Variablen: Geschwindigkeit v, Steigung α und Gegenwind w. Mit Begründung kann man auch die Luftdichte ρ (wird auf dem Berg geringer) und die Querschnittsfläche A und Luftwiderstandsbeiwert c_w (beides wird bei stromlinienförmiger Haltung geringer) aufzählen
- Endogene Variable: Leistung P

(b) Die drei Faktoren von $y = P = \sum_{j=1}^{3} \beta_j x_j + \epsilon$ sind

$$x_1 = v, \quad x_2 = v\alpha, \quad x_3 = v(v + w)^2$$

und die dazugehörigen Parameter

$$\beta_1 = mg\mu, \quad \beta_2 = mg, \quad \beta_3 = \frac{1}{2} c_w \rho A$$

(c) Es gibt keinen konstanten Term $\beta_0 x_0$ mit $x_0 = 1$, da es ohne Geschwindigkeit keine Leistung gibt. Alle Faktoren sind also variabel und die Konstante=0

(d) Mit $\beta_2 = mg$ kann man, da $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ konstant ist, direkt $m = \beta_2/g$ abschäten und damit

$$\mu = \frac{\beta_1}{mg} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

Beim dritten Parameter sind hingegen sowohl c_w als auch A unbekannt und sie kommen beide nur in diesem Faktor vor, so dass man nur

$$c_w A = \frac{2\beta_3}{\rho}$$

als Produkt abschäten kann.

(e) Würde man den dritten Faktor in drei Faktoren v^3, $v^2 w$ und vw^2 zerlegen, erhielte man aufgrund der physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die eine Proportionalität zu $v(v + w)^2 = v^3 + 2v^2 w + vw^2$ implizieren, für den Faktor $v^2 w$ den Parameter $2\beta_3$ und für v^3 und vw^2 den Parameter β_3. Alle drei Faktoren sind daher abhängig voneinander.

Hinweis: Da die Messungen von Geschwindigkeit v und Gegenwind w fehlerbehaftet und beide Größen variabel sind, ergäbe sich technisch keine Multikorrelation und eine Schätzung ist technisch möglich. Allerdings würde sie in sehr ungenauen und hochkorrelierten Schätzungen der dann drei Vorfaktoren β_{31}, β_{32} und β_{33} resultieren.

(f) Es gilt nach Aufgabenstellung

$$\hat{\beta}_3 = 0.18\,\mathrm{kg/m}, \quad \hat{V}(\hat{\beta}_3) = 0.00021\,\mathrm{kg^2/m^2}$$

Konfidenzintervall (KI) bei $\alpha = 5\,\%$:

$$\mathrm{KI}_{\beta_3}(\alpha) = [\hat{\beta}_3 - \Delta\hat{\beta}_3(\alpha), \hat{\beta}_3 + \Delta\hat{\beta}_3(\alpha)], \quad \Delta\hat{\beta}_3(\alpha) = \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_3)}\, t_{1-\alpha/2}^{10-3}$$

Ablesen: $t_{0.975}^{7} = 2.365$ und damit

$$\mathrm{KI}_{\beta_3}(\alpha = 5\,\%) = [0.146, 0.214]$$

Für das KI des $c_w A$-Wertes gilt mit $c_w A = \frac{2\beta_3}{\rho}$ (siehe Teil (d)) und den angegebenen Zahlenwerten $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ und der Linearität der Standardabweichung

$$\mathrm{KI}_{c_w A}(\alpha = 5\,\%) = [0.243, 0.357]$$

(g) Test von H_0: $\beta_3 \geq 0.21\,\mathrm{kg/m}$ bei $\alpha = 5\,\%$:

$$t_{\mathrm{data}} = \frac{\hat{\beta}_3 - 0.21}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_3)}} = -2.07$$

Ablehnung, falls $t_{\mathrm{data}} < t_{0.05}^{(7)} = -t_{0.95}^{(7)} = -1.895$ bzw.

$$-t_{\mathrm{data}} = 2.07 > t_{0.95}^{(7)} = 1.895 \;\Rightarrow\; \text{Widerspruch}$$

Eine Ablehnung von H_0 ist also *nicht* möglich, obwohl der Rand H_0^* von H_0 im KI liegt: Dies ist kein Widerspruch, da ein unsymmetrischer Intervalltest immer schärfer ist als ein symmetrischer Punkttest der dem Konfidenzintervall entspricht (also für alle H_0 außerhalb des KI abgelehnt werden kann).

Aufgabe 4: Häufig gemachte Fehler

- Zahl df der Freiheitsgrade falsch berechnet. Es gilt immer

$$\mathrm{df} = n - \#\text{Parameter}$$

  Also hier 3 Parameter: Es gibt KEINE Konstante hier, also kein β_0

- Varianz ist hier nicht bekannt. Die Test-Statistik ist daher student-t, nicht standardnormalverteilt

- H_0 ist hier nicht auf $\beta > 0$ bezogen, sondern auf $beta > beta_0 \neq 0$: β_0 wurde in der Test-Statistik oft vergessen

- Testentscheidung: Hier kommt es auf $\geq$ oder $\leq$ an!

- Parameter sind während der Anwendung (Fahrt) konstant, also kann die Geschw. v kein Parameter sein!