Klausur zur Vorlesung Verkehrsökonometrie für Bachelors, SS 2015

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Gegeben ist folgendes Modell der Zeitentwicklung einer Größe y als Funktion derselben Größe einen Zeitschritt Δt davor:

$$y(t) = x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t\, r\, x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{x_s}\right).$$

- Für alle Zeiten t gilt $y = x + \Delta t\, r\, x(1 - x/x_s)$. Das Modell ist also nichtlinear (x kommt quadratisch vor) und deterministisch.

-
  - *Exogene Variable:* Fasst man das Modell wie oben als Modell $y = f(x)$ für alle Zeiten auf, ist x bzw. $x(t)$ die exogene Variable. Man kann aber auch das verkettete Modell als Ganzes betrachten. Dann ist die Zeit t die exogene Variable. Beides ergibt volle Punktzahl.
  - *Endogene Variable:* $y(t)$
  - *Modellparameter:* Zeitschritt Δt, lineare Wachstumsrate r und Sättigungswert x_s.

  Das Modell ist verkettet, da die endogene Variable $y(t) = x(t + \Delta t)$ eines Zeitschritts n (Zeit $t = n\Delta t$) zur exogenen Variable im nächsten Zeitschritt $n + 1$ (Zeit $t + \Delta t$) wird.

- Modellparameter:
  - Für $x \ll x_s$ ist $x/x_s \ll 1$, so dass das Modell im Grenzfall zum linearen Modell

    $$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t\, r\, x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = r\, x(t)$$

    wird. Der Wachstum von x bzw. y ist also proortional zu x bzw. y selbst. Dies beschreibt lineares Wachstum und r ist die *lineare Wachstumsrate*.
  - Für $x = x_s$ gilt $y(t) = x(t + \Delta t) = x(t)$, es findet also gar kein Wachstum mehr statt. Damit kennzeichnet x_s den *Sättigungswert* der Zeitreihe.

Aufgabe 2 (70 Punkte)

In einer Umfrage wird abgefragt, unter welchen Bedingungen sich potenzielle Autokäufer anstelle eines konventionelles Fahrzeugs (C-Fz) für ein Elektroauto (E-Fz) entscheiden würden. Die Kriterien sind Kaufpreis, Unterhaltskosten sowie die Reichweite einer Akkuladung. Der Preis und die Kosten sind dabei als relative Unterschiede zu dem in Frage kommenden konventionellen Fahrzeug formuliert und beispielsweise durch Subventionen gesteuert.

relativer Kaufpreisunterschied K E-Fz zu C-Fz	Differenz Unterhaltskosten C E-Fz zu C-Fz	Reichweite R	Geschlecht g	y_1	y_2
−30%	0%	300 km	m	5	12
0%	0%	100 km	m	0	17
0%	0%	200 km	w	1	16
0%	0%	400 km	m	7	10
0%	0%	600 km	w	9	8
0%	−50%	300 km	w	9	8
−20%	−100%	300 km	m	6	13
−20%	−100%	600 km	w	17	0

(a) Es werden keine tatsächlich realisierten Entscheidungen erhoben (*Stated Choice*) und auch die Attribute sind hypothetisch (insbesondere sind gegenwärtig viele Kombinationen gar nicht realisierbar).

(b) Struktur:

- *Alternativen*: Es gibt zwei Alternativen: Elekrofahrzeugs (E-Fz) und konventionelle Fahrzeug (C-Fz). Eine dritte Alternative ("kein Autokauf") wird hier nicht angeboten, obwohl eine solche, je nach Untersuchungsziel, auch sinnvoll sein könnte.
- Ein *Choice Set* kennzeichnet die Menge aller Alternativen mit ihren jeweiligen Attributen *in einer konkreten Entscheidungssituation*. Hier sind dies (i) der relative Kaufpreisunterschied und (ii) die relative Differenz der Unterhaltskosten des E-Fz bezogen auf das C-Fz sowie (iii) die Reichweite. Alternativenunabhängige Merkmale wie hier das Geschlecht gehören, streng genommen, *nicht* zum Choice Set.
- Die *exogenen* Variablen sind die Attribute des Alternativen und zusätzlich die sozioökonomische Variable "Geschlecht".
- Die *endogenen* Variablen sind die Wahlhäufigkeiten y_1 bzw. y_2 für E-Fz bzw. C-Fz. In der Tabelle wurde zwar y_1 und y_2 nicht zugeordnet, anhand der Choice-Sets 2 und 4 bzw. 3 und 5 ist jedoch offensichtlich, dass y_1 zum E-Fz gehört: Je mehr Reichweite bei sonst gleichen Attributen und gleichem Geschlecht, desto attraktiver sind E-Fz.

(c) Variablen:

- *Generische Variablen:* rel. Preisunterschied K und rel. Unterhaltskostendifferenz C des E-Fz zum C-Fz,
- *Sozioökonomische Variablen:* Geschlecht g,
- *Alternativenspezifische Konstante:* Der Selektor δ_{i1} bzw. der Vorfaktor β_5 (beides gibt volle Punktzahl),
- *Referenzalternative:* Alternative 2 (C-Fz).

(d) Interpretation der Parameter:

- β_1 ist die relative Preissensitivität. Da sie dem E-Fz (Alternative 1) zugeordnet ist und mit wachsendem K dieses relativ immer teurer wird, wird ein negativer Wert erwartet: OK.
- β_2 ist die relative Unterhaltskosten-Sensitivität. Mit der selben Argumentation wie oben werden negative Werte erwartet: OK.
- β_3: Sensitivität auf die Reichweite des E-Fahrzeugs. Da mehr Reichweite besser ist, weden positive Werte erwartet: OK.
- β_4: Geschlechtsabhängigkeit der Attraktivität von E-Fahrzeugen. Da (i) β_4 der Alternative "E-Fz" zugeordnet wird und (ii) $g = 1(0)$ für weibliche (männliche) Entscheider steht, würde $\beta_4 > 0$ bedeuten, dass Frauen E-Fz attraktiver finden als Männer. Ein Vorzeichen ist jedoch a-priori *nicht* klar (hier bevorzugen Frauen die E-Autos, allerdings nichtsignifikant).
- β_5: Alternativenspezifische Konstante. Sie hat keine wirklich anschauliche Bedeutung ("globale Bevorzugung des E-Fz, wenn dieses die Reichweite Null hat, aber gleich viel kostet wie ein konventionelles Fahrzeug"). Klar ist jedoch, dass nur $\beta_5 < 0$ plausibel ist: OK.

(e) Vor den Änderungen bedeutet β_4 formal: "Nutzenerhöhung der Alternative 1 gegenüber Alternative 2, wenn sich der g-Wert von 0 auf 1 ändert". Änderung (i) lässt dies formal unverändert, aber da die Geschlechtszuordnung nun vertauscht ist, muss nach der Schätzung, also bei gleichen resultierenden Wahrscheinlichkeiten (inhaltlich wird ja nichts verändert!) auch das Vorzeichen von β_4 umgekehrt sein. Nach Änderung (ii) bezeichnet β_4 die "Nutzenerhöhung der Alternative 2 gegenüber Alternative 1, wenn sich der g-Wert von 0 auf 1 ändert". Wieder muss sich für gleiche resultierende Wahrscheinlichkeiten das Vorzeichen von β_4 umdrehen. Gleichzeitige Anwendiung von (i) und (ii) ändert demgemäß an β_4 *nichts*.

Zur Veranschaulichung die konkreten Bedeutungen von β_4:

- Vor den Änderungen: "β_4=Erhöhung der relativen Attraktivität von E-Fz bezüglich C-Fz bei Frauen im Vergleich zu Männern"
- Nach Änderung (i): "β_4=Erhöhung der relativen Attraktivität von E-Fz bezüglich C-Fz bei Männern im Vergleich zu Frauen"
- Nach Änderung (ii) ohne Änderung (i): "β_4=Erhöhung der relativen Attraktivität von C-Fz bezüglich E-Fz bei Frauen im Vergleich zu Männern"
- Nach beiden Änderungen: "β_4=Erhöhung der relativen Attraktivität von C-Fz bezüglich E-Fz bei Männern im Vergleich zu Frauen"

(f) Gleiche Wahlwahrscheinlichkeit bedeutet $V_1 = V_2$ bzw. $V_1 = 0$, da V_2 immer =0 ist. Bei gleichem Kaufpreis ($K = 0$, man beachte, dass K sich auf die relative Differenz bezieht!) und gleichen Unterhaltskosten ($C = 0$) bedeutet dies

$$\beta_3 R + \beta_4 g + \beta_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = -\frac{\beta_4 g + \beta_5}{\beta_3}$$

Die kritische Reichweite R_c hängt also vom Geschlecht ab:

- Frauen ($g = 1$): $R_c = 507\,\mathrm{km}$

– Männer ($g = 0$): $R_c = 548\,\text{km}$

(g) Der Techniksprung bedeutet $\Delta R = 100$. Gleiche Wahrscheinlichkeit bedeutet $\Delta V_1 = 0$.

– Ausgleich durch relative Kaufpreiserhöhung ΔK:

$$0 = \Delta V = 100\beta_3 + \beta_1 \Delta K \quad \Rightarrow \quad \Delta K = -\frac{100\beta_3}{\beta_1} = 18.9\,\%$$

– Ausgleich durch Erhöhung ΔC der relativen Unterhaltskosten:

$$0 = \Delta V = 100\beta_3 + \beta_2 \Delta C \quad \Rightarrow \quad \Delta C = -\frac{100\beta_3}{\beta_2} = 29.4\,\%$$

(h) Reichweitenunterschied, der einer Nutzeneinheit entspricht:

$$1 = \Delta V_1 = \beta_3 \Delta R \quad \Rightarrow \quad \Delta R = \frac{1}{\beta_3} = 124\,\text{km}.$$

(i) Es handelt sich um einen symmetrischen Test der Nullhypothesen $\beta_j = 0$. Bei Annahme gaußverteilter Schätzer sind die Testvariablen demgemäß

$$Z_j = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{\sqrt{V(\hat{\beta}_j)}} = \frac{\text{Schätzwert}}{\text{Standardfehler}}.$$

Der kritische Wert z_c der Testvariable beträgt bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 5\,\%$ gleich dem $(1 - \alpha/2) = 0.975$-Quantil der Standardnormalverteilung, also $z_c = 1.96$. Der Parameter ist signifikant, wenn die Realisierungen z_j der Bedingung $|z_j| \geq z_c$ genügen. Hier gilt

$$\begin{aligned} z_1 &= -1.95, \quad (p_1 = 0.051), \\ z_2 &= -3.00, \quad (p_2 = 0.003), \\ z_3 &= 4.26, \quad (p_3 < 0.0001), \\ z_4 &= 0.69, \quad (p_4 = 0.491), \\ z_5 &= -4.89, \quad (p_5 < 10^{-5}) \end{aligned}$$

Also sind nur die Schätzwerte von β_2, β_3 und β_5 signifikant (von null verschieden).

Hinweis: Der Vollständigkeit wurden auch die Grenz-Fehlerwahrscheinlichkeiten, also die p-Werte $p_j = 2(1 - \Phi(|z_j|))$, mit aufgeführt; wer bei β_1 Signifikanz angibt, bekommt auch einen Punkt, da man bei diesem Parameter argumentieren kann, dass Rundungsfehler “im Zweifel für den Angeklagten” zu $|z_1| = 1.96$ führen könnten.

(j) Mit $K = -0.3$, $C = 0$, $R = 300$ und $g = 0$ gilt $V_1 = -0.716$ und damit eine prognostizierte Wahrscheinlichkeit

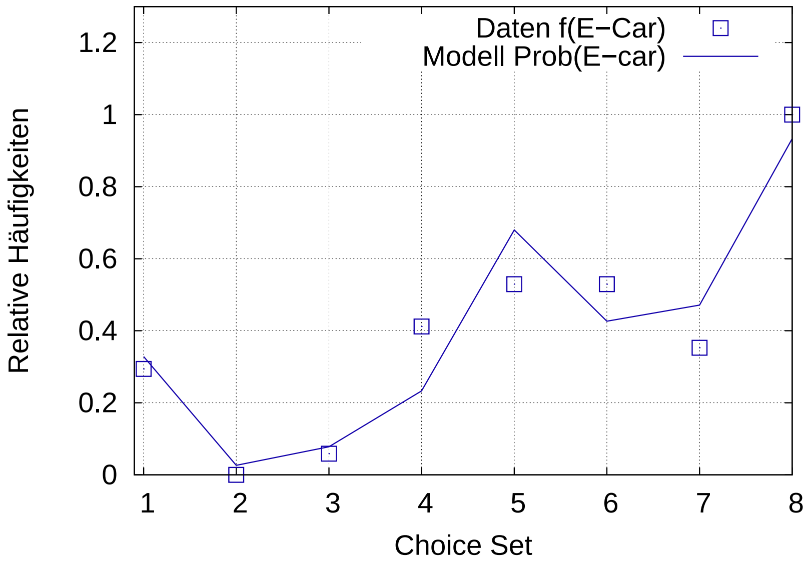
$$P_1 = \frac{\exp(V_1)}{\exp(V_1) + 1} = 0.329, \quad P_2 = 1 - P_1 = 0.671.$$

Die realisierten relativen Häufigkeiten sind

$$f_1 = \overset{5/17}{=} 0.294, \quad f_2 = 1 - f_1 = 0.706.$$

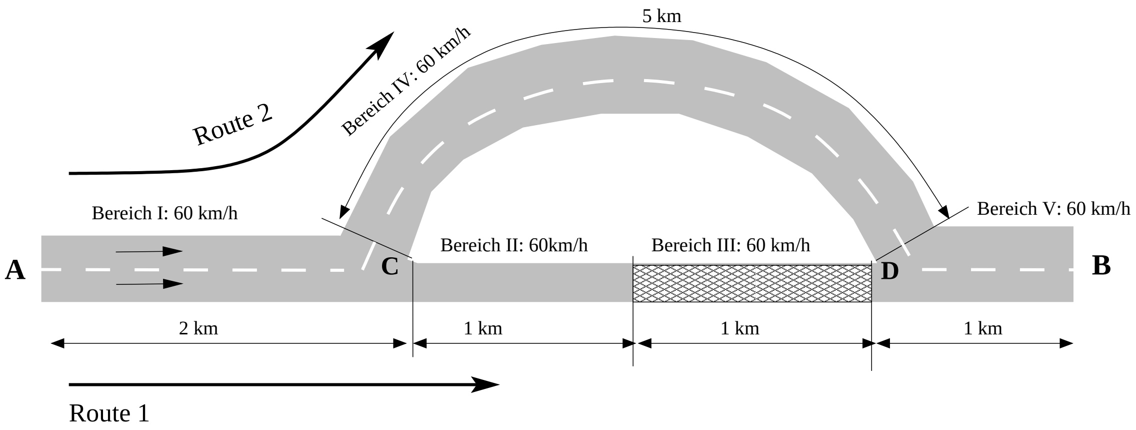
Die Voraussage und die tatsächliche Realisierung differeieren also nur gering.

Zur Referenz nun noch der grafische Vergleich der Voraussage und der realisierung für alle Choice Sets (nicht verlangt):


Daten f(E−Car)
Modell Prob(E−car)
Relative Häufigkeiten
Choice Set
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1
2
3
4
5
6
7
8

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Gegeben ist folgendes Straßen-Netzwerk für das Nachfrageelement Q_{AB} mit den Routen 1 (durch den Ort) und Route 2 (Ortsumgehung):



(a) Für Nachfragen $Q_{\mathrm{AB}} < 1\,500\,\mathrm{Fz/h}$ ist bei beliebiger Routenaufteilung nirgendwo die Kapazität überschritten, Die Routenaufteilung kann also nach Aufgabenstellung mit linearen CR-Funktionen auf jedem Link l in der Form

$$T_l = T_{l0}\left(1+\frac{Q_l}{K_l}\right)$$

vorgenommen werden. In Abängigkeit der Nachfrage Q_{AB} und der Kapazitäten mit $K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{IV}} = K_{\mathrm{V}}$ gilt für die Reiszeiten T_r (in Minuten) beider Routen

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\left(1+\frac{Q_{\mathrm{AB}}}{K_{\mathrm{I}}}\right)+1\left(1+\frac{Q_1}{K_{\mathrm{II}}}\right)+1\left(1+\frac{Q_1}{K_{\mathrm{III}}}\right)+1\left(1+\frac{Q_{\mathrm{AB}}}{K_{\mathrm{I}}}\right), \\ T_2 &= 2\left(1+\frac{Q_{\mathrm{AB}}}{K_{\mathrm{I}}}\right)+5\left(1+\frac{Q_2}{K_{\mathrm{I}}}\right)+1\left(1+\frac{Q_{\mathrm{AB}}}{K_{\mathrm{I}}}\right) \end{aligned}$$

und nach Vereinfachung mit der Aufteilung $w_1 = Q_1/Q_{\mathrm{AB}}$, $w_2 = 1-w_1$ bzw. $Q_1 = Q_{\mathrm{AB}}w_1$, $Q_2 = Q_{\mathrm{AB}}(1-w_1)$ und der auf K_{I} bezogenen Nachfrage $q = \frac{Q_{\mathrm{AB}}}{K_{\mathrm{I}}}$ ergibt dies

$$\begin{aligned} T_1(q,w) &= 5+Q_{\mathrm{AB}}\left(\frac{3}{K_{\mathrm{I}}}+\frac{w_1}{K_{\mathrm{II}}}+\frac{w_1}{K_{\mathrm{III}}}\right) = 5+q\left(3+\frac{14w_1}{3}\right), \\ T_2(q,w) &= 8+Q_{\mathrm{AB}}\left(\frac{3}{K_{\mathrm{I}}}+\frac{5(1-w_1)}{K_{\mathrm{I}}}\right) = 8+q(8-5w_1) \end{aligned}$$

Im Nutzergleichgewicht (UE) gilt $T_1 = T_2$, wenn $w_1 > 0$ und $w_2 = 1-w_1 > 0$. Ansonsten ist eine Route unbefahren ($w_1 = 0$ oder $w_2 = 0$) und die jeweils andere Route hat die minimale Reisezeit. Die Annahme $T_1 = T_2$ ergibt

$$\tilde{w}_1^{\mathrm{UE}}(q) = \frac{3}{29}\left(5+\frac{3}{q}\right)$$

Demgemäß gilt für das Maximum der betrachteten Nachfrage, $Q_{\mathrm{AB}} = 1\,500\,\mathrm{Fz/h}$ bzw. $q = \frac{3}{8}$ der Wert $\tilde{w}_1 = 1.34$ und für geringere Nachfragen sogar höhere Werte. Also ist die obige Annahme nicht erfüllt. Vielmehr gilt im UE immer $w_1 = 1 < \tilde{w}_1$: Alles fließt über die Route 1. Die Reisezeiten (in Minuten) sind dementsprechend

$$T_1(q, 1) = 5 + q\frac{23}{3}, \quad T_2 = 8 + 3q. \tag{1}$$

Im *Systemoptimum* (SO) ist bei linearen CR-Funktionen die Aufteilung die gleiche wie im UE bei doppelter Nachfrage:

$$w_1^{\mathrm{SO}}(q) = \min(\tilde{w}_1^{\mathrm{UE}}(2q), 1). \tag{2}$$

Es ändert sich nur nahe der maximalen Nachfrage etwas, denn $\tilde{w}_1^{\mathrm{UE}} = 1$ für $q = 9/14$. Also ist im SO $w_2 > 0$, falls $q > 9/28$ bzw. $Q_{\mathrm{AB}} > 1\,286\,\mathrm{Fz/h}$.

(b) Nachdem die Strecke C-D über die Route 1 komplett zugestaut ist, gilt nach Aufgabenstellung $T_1(C \to D) = 2 + 2)\,\mathrm{Min} = 4\,\mathrm{Min}$ während man über die zumindest anfangs leere Umgehung von C nach D 5 Min benötigt. Also würden im UE auch nach Sichtbarwerden des Staus weiterhin *alle* Autofahrer die Route 1 wählen.

Hintergrund: Warum staut sich im UE die Direktroute von C nach D zu? Für eine Nachfrage $Q_{\mathrm{AB}} > 1\,500\,\mathrm{Fz/h}$ ist auf Route 1 die Kapazität überschritten, sofern 100% diese Route wählen, was sie anfangs auf jeden Fall tun, denn im UE gilt ja $w_1 = 1$. Ferner kann nach Aufgabenstellung der Fluss nie die Kapazität überschreiten - im Gegensatz zu den Annahmen bei "klassischen" CR-Funktion.

(c) Wie bei (b) bereits diskutiert, gilt auch bei komplett zugestauter Direktverbindung von C nach D eine kürzere Reisezeit als wenn man die Umgehung von C nach D nutzt. Damit gilt im UE für $Q_{\mathrm{AB}} > 1\,500\,\mathrm{Fz/h}$, sobald sich die Strecke bis zu A hin zugestaut hat:

$$w_1^{\mathrm{UE}} = 1, T_1^{\mathrm{UE}} = T_{\mathrm{AC}}^{\mathrm{UE}} + T_{\mathrm{CD}}^{\mathrm{UE}} + T_{\mathrm{DB}}^{\mathrm{UE}} = 6 + 4 + 1\,\mathrm{Min} = 11\,\mathrm{Min}$$

Die Zeit für die leere Route 2 würde hingegen 6+5+1 Min=12 Min betragen.

(d) Verhalten sich die Fahrer gemäß Aufgabenteil (b), kann es im Bereich I nie zum Stau kommen, da dann die volle Kapazität beider Routen von C nach D ausgenutzt wird, welche größer als die Kapazität des Abschnitts I von A nach C ist.

Bemerkung: Im Gegensatz zur Aufgabenstellung entspricht das aber nicht dem SO aus 2 Gründen (jede Bemerkung ergibt einen Extrapunkt):

(i) Es wäre besser, wenn die Fahrer schon die Umgehung wählen, wenn am Übergang von C BereichII nach III ein Stau zu entstehen *droht*. Dann würden für 1 500 Fahrzeuge pro Stunde jeweils eine Minute gespart, während sich auf Route 2 nichts ändert. Das setzt allerdings Verkehrsinformationssysteme voraus.

(ii) Falls $Q_{\mathrm{AB}} > 1\,286\,\mathrm{Fz/h}$ wählt im SO bereits ein Anteil $w_2 > 0$ die Umgehung. Das heißt, das Verhalten bei (i) ist erst systemoptimal, wenn im *linearem* Systemoptimum auf der Direktroute die Kapazität überschritten werden würde. Der (auf K_{I} skalierte) Fluss q_1 auf Route 1 im lineraem SO ist gegeben durch

$$q_1^{\mathrm{SO}}(q) = q w_1^{\mathrm{SO}}(q) = \min\left(\frac{3}{58}(10\,q + 3), q\right)$$

Dieser Fluss ist gleich dem kritischen Fluss $q_1^{\mathrm{c}} = 3/8$ für Stauentstehung, falls $q = 17/40$ bzw. $Q_{\mathrm{AB}} = 1\,700\,\mathrm{Fz/h}$. Also ist das erwähnte Verhalten nur für Flüsse außerhalb des Bereichs $[1\,286\,\mathrm{Fz/h}, 1\,700\,\mathrm{Fz/h}]$ systemoptimal.

(e) Ist die Direktroute vorhanden, wird sie nach Teilaufgabe (c) im UE *immer* benutzt, d.h. die *effektive* Kapazität von A nach B ist 1 500 Fz/h, obwohl sie im SO 5 500 Fz/h betragen würde. *Ohne* die Direktroute müssen alle die Umgehungsstrecke nutzen, deren Kapazität, ebenso wie die Kapazitäten der Links von A nach C und D nach B, 4 000 Fz/h beträgt. Damit hat auch die gesamte effektive Kapazität diesen Wert. Für Nachfragen zwischen 1 500 Fz/h und 4 000 Fz/h vermeidet also die Sperrung der Direktverbindung Staus und *verbessert* den Verkehrsfluss.

Bemerkung: Dies ist neben dem Braess'schen Paradoxon der zweite Klassiker unter den Verkehrs-Paradoxa: "Daganzo's Paradoxon".