

Technische Universität Dresden
Institut für Wirtschaft und Verkehr
Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik, insbes. im Verkehrswesen

Skript zur Vorlesung

Verkehrsökonomie

für Bachelor-Studierende

Dr. Martin Treiber

Sommersemester 2023

© 2006-2023 Martin Treiber.

Contents

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie	1
1.1. Modelle und Variablen der Verkehrsökonomie	2
1.1.1. Endogene Variablen	2
1.1.2. Exogene Variablen	3
1.1.3. Modellparameter	3
1.1.4. Zufallsanteile	4
1.1.5. Modellfunktionen	4
1.1.6. Das Prinzip der Sparsamkeit	4
1.2. Modellgleichungen	5
1.2.1. Inhaltliche Struktur	5
1.2.2. Mathematische Struktur	6
1.3. Zwei Anwendungsbeispiele	11
1.3.1. Staukosten	12
1.3.2. Verkehrsmittelwahl	15
1.4. Verwendete Symbole	20
2. Allgemeines zur Verkehrsplanung	21
2.1. Definition und Ziele der Verkehrsplanung	21
2.1.1. Verkehrliche Auswirkungen	22
2.1.2. Prognose <i>vs.</i> Szenarien	23
2.2. Planungsgebiet und Bezirke	23
2.3. Beschreibung der Raumstruktur	27
2.4. Beschreibung von Verkehrsflüssen	29
2.4.1. Ortsveränderungen und Wege	29
2.4.2. Weitere wichtige Begriffe	29
2.5. Methodologisches Vorgehen der TVPL	31
2.6. Einige Gedanken zur mathematischen Modellierung	33
3. Verkehrserzeugung	38
3.1. Allgemeines	38
3.2. Kennwertmodell der Erzeugung	38
3.3. Quelle-Ziel-Gruppen	41
3.4. Mobilitätsparameter	43
3.4.1. Spezifisches Verkehrsaufkommen	43
3.4.2. Erzeugungsrate	45
3.4.3. Empirische Ermittlung der Mobilitätsparameter	45
3.5. Binnenanteile	46

Contents

3.6.	Tagesganglinien	47
3.7.	Durchführung der Verkehrserzeugung mit dem Kennwertmodell	48
3.7.1.	Quelle-Ziel-Gruppen vom Typ I	49
3.7.2.	Quelle-Ziel-Gruppen vom Typ II	50
3.7.3.	Quelle-Ziel-Gruppen vom Typ III	50
3.8.	Beispiel	53
3.8.1.	Quelle-Ziel-Gruppen des Typs I	54
3.8.2.	Quelle-Ziel-Gruppen des Typs II	54
3.8.3.	Quelle-Ziel-Gruppe des Typs III (SS)	55
3.9.	Verwendete Symbole	57
4.	Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung	58
4.1.	Allgemeines	58
4.2.	Grundmodell der Verteilung	60
4.3.	Attraktivität von Wegen: Widerstandsfunktionen und deren Bewertung	61
4.3.1.	Definition und Ermittlung des Widerstandes	62
4.3.2.	Bewertungsfunktionen	63
4.3.3.	Lagegunst der Bezirke	66
4.4.	Wechselseitige Abhängigkeiten von Verkehrsverteilung und -Aufteilung	66
4.5.	Lösungsmethoden	68
4.5.1.	Quellseitig und zielseitig weiche RSB (globale Fixierung)	69
4.5.2.	Quellseitig harte und zielseitig weiche RSB (quellseitige Fixierung)	69
4.5.3.	Quellseitig weiche und zielseitig harte RSB (zielseitige Fixierung)	70
4.5.4.	Beidseitig harte RSB (beidseitige Fixierung bzw. Kopplung)	70
4.6.	Spezielle Verteilungsmodelle	72
4.7.	Empirische Bestimmung der Bewertungsfunktion	79
4.7.1.	Spezialfall eines räumlich homogenen Untersuchungsgebietes	83
4.8.	Herleitung des Grundmodells mit dem Satz von Bayes	85
4.9.	Herleitung des Grundmodells mit der Entropie-Methode	88
4.9.1.	Simultane Herleitung einer Bewertungsfunktion	90
4.10.	Verwendete Symbole	92
5.	Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung	93
5.1.	Allgemeines	93
5.2.	Modellierung des Nutzens	96
5.2.1.	Einflussgrößen	96
5.2.2.	Nutzenfunktionen bei der Verkehrsmittelwahl	97
5.3.	Diskrete stochastische Wahltheorie	100
5.4.	Spezialfall zweier Alternativen	101
5.4.1.	LP-Modelle	102
5.4.2.	Probit-Modell	102
5.4.3.	Logit-Modell	103
5.5.	Das Multinomial-Logit-Modell	106
5.6.	Aufteilung mit der Kirchhoff'schen Regel	110

Contents

6. Simultane Verkehrsverteilung und -aufteilung	114
6.1. Grundlösung des simultanen Ansatzes	115
6.2. Spezielle Modelle	115
6.2.1. Verallgemeinertes Wilson- bzw. Logit-Modell	115
6.2.2. Trilineares EVA-Modell	116
6.3. Lösung für die verschiedenen Kopplungen	116
6.4. Globale Modal-Splits	117
6.5. Analyse, Kalibrierung und Prognose	118
7. Routenwahl bzw. Verkehrssumlegung	119
7.1. Allgemeines	119
7.1.1. Methoden der Umlegung	120
7.2. Anbindung der Verkehrsnachfrage an das Netz	121
7.3. Netzmodellierung	124
7.3.1. Kürzeste-Weg-Suche	124
7.4. Capacity-Restraint Funktionen	125
7.4.1. Webster-Formel	126
7.4.2. BPR-Funktionen	127
7.5. Wardrop'sches Nutzergleichgewicht	128
7.5.1. Beispiel zur Berechnung des Wardrop-Gleichgewichts	128
7.6. Globales oder System-Optimum	131
7.6.1. Beispiel zur Berechnung des System-Optimums	133
7.6.2. Allgemeine Formulierung des Nutzer- und Systemgleichgewichts	134
7.6.3. Verkehrsabhängige Maut zur Realisierung beliebiger Optima	137
7.7. Das Braess'sche Paradoxon	139
7.7.1. Reisezeiten im Braess-Netzwerk	140
7.7.2. Wardrop-Gleichgewicht im Braess-Netzwerk	141
7.7.3. Systemoptimum im Braess-Netzwerk	143
7.8. Ein Lernverfahren zur Ermittlung des Wardrop'schen Gleichgewichts	144
7.9. Stochastisches Nutzergleichgewicht	146
7.9.1. Zwei Alternativen	147
7.9.2. Mehrere Alternativen	149
7.9.3. Numerisches Mehrweg-Verfahren	149
7.10. Herleitung der Webster-Formel	150
7.11. Verwendete Symbole	153
8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen	155
8.1. Ablauf einer Erhebung	155
8.2. Erhebungsdesign	157
8.2.1. Aggregierungsebene	157
8.2.2. Zeit- und Merkmalsträgerdimension	157
8.2.3. Ausmaß der Kontrolle über den Untersuchungsgegenstand	158
8.2.4. Ziehungsmethode	159
8.2.5. Modalität der Erhebung	160

Contents

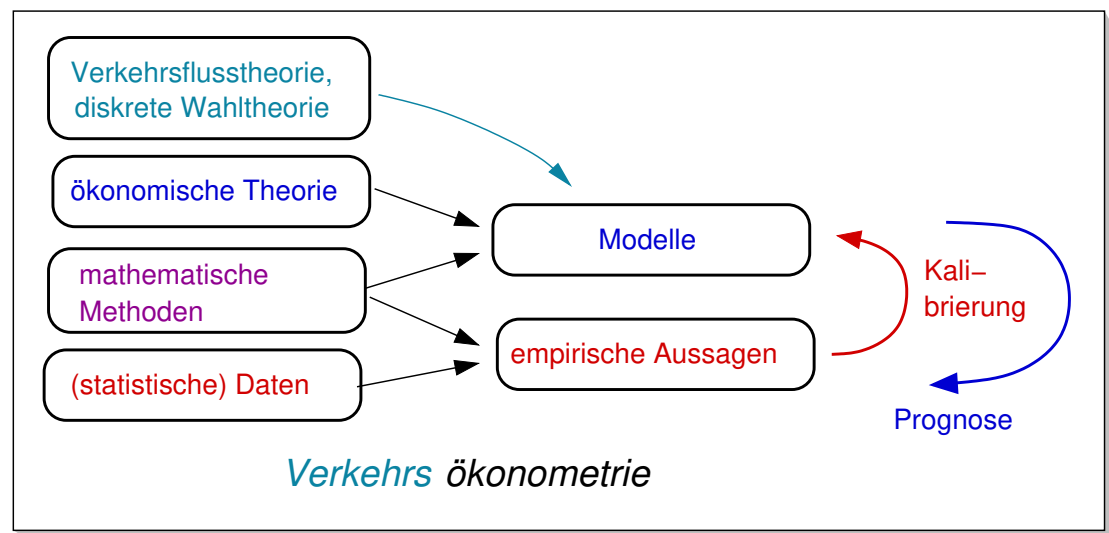
8.3.	Verkehrsflussdaten	160
8.3.1.	Beispiel: Tagesganglinien und Bemessungsverkehrsstärke	161
8.3.2.	Vor- und Nachteile gegenüber Mobilitätsdaten	162
8.4.	Daten zum Mobilitätsverhalten	163
8.4.1.	Beispiel: System relevanter Verkehrsbefragungen	163
8.5.	Direkte Nutzermessung	167
8.5.1.	Eigenschaften der direkten Nutzermessung	168
8.5.2.	Konkretes Anwendungsbeispiel: Wahlbasierte Conjoint-Analyse	168
9.	Stichprobentheorie und Stichprobendesign	178
9.1.	Allgemeines	178
9.1.1.	Kriterien an eine Stichprobe	178
9.1.2.	Schätzer	179
9.2.	Zufallsauswahl	181
9.2.1.	Vorgehen	181
9.2.2.	Stichprobenfehler	182
9.2.3.	Schätzung von Anteilswerten	184
9.3.	Quotenauswahl und geschichtete Stichprobe	185
9.3.1.	Ziehung einer geschichtete Stichprobe	186
9.3.2.	Stichprobenfehler beim Quotenverfahren	187
9.3.3.	Schätzung von Anteilswerten mit dem Quotenverfahren	189
9.4.	Entzerrung einer Stichprobe	191
9.4.1.	Ursachen	191
9.4.2.	Durchführung der Entzerrung	193
9.4.3.	Statistische Eigenschaften der Entzerrung	194
9.4.4.	Diskussion: Entzerrung oder Schichtung?	196
9.5.	Qualitative Stichprobenziehung	201
9.6.	Verwendete Symbole und nützliche Formeln	202
10.	Stetige ökonomische Modelle	204
10.1.	Struktur der Gleichungen	204
10.2.	Vorgehen bei der ökonomischen Untersuchung	205
10.2.1.	Ablauf bei vorgegebenem Modell	205
10.2.2.	Modellentwicklung und Validierung	206
10.3.	Modellkalibrierung	207
10.3.1.	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	208
10.3.2.	Maximum-Likelihood-Methode	209
10.4.	Lineare multivariate Modelle	210
10.4.1.	Modellgleichungen	210
10.4.2.	Parameterschätzung 1: Formulierung mit Summen	212
10.4.3.	Parameterschätzung 2: Formulierung mit Vektoren und Matrizen	213
10.4.4.	Anschauliche Interpretation des linearen Modells	217
10.5.	Statistische Eigenschaften der Regressionskoeffizienten	220
10.5.1.	Gauß-Markow-Annahmen	220

Contents

10.5.2. Induktive Statistik multivariater linearer Modelle	220
10.6. Spezialfälle	222
10.6.1. Zwei erklärender Variablen	222
10.6.2. Eine erklärende Variable	224
10.7. Einige Herleitungen	226
10.8. Nichtlineare univariate Modelle	228
10.9. Verwendete Symbole	230
A. Appendix	231
A.1. Zu Abschnitt 9.2: “Quadratwurzelgesetz” im Europaparlament	231
A.2. Zu Abschnitt 9: Optimale Aufteilung der Schichten einer Stichprobe . . .	234

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

Das Wort **Ökonometrie** hat seinen Ursprung von der Ökonomie (Wirtschaft) und dem lateinischen Wort *metiri*, welches "messen" bedeutet. Damit beinhaltet Ökonometrie nicht nur *quantitative* wirtschaftliche Theorien und Konzepte, sondern vor allem deren **empirische** (also auf Messung, Beobachtung und Erfahrung beruhende) *Überprüfung*. Bei den durch Messung und Beobachtung gewonnenen Daten handelt es sich fast immer um **statistische Daten**, also um eine Beschreibung von *Massenphänomenen*. Damit spielt neben der quantitativen Formulierung wirtschaftlicher Theorien durch **mathematische Modelle** auch die Auswertung der Daten durch **statistische Modelle** eine Rolle. Das Zusammenspiel der verschiedenen Elemente der Ökonometrie wird in folgendem Flussdiagramm deutlich.



In der Verkehrsökonomie werden diese allgemeinen Konzepte auf den Verkehrssektor spezialisiert:

Die **Verkehrsökonomie** umfasst die Gesamtheit mathematischer Modelle und statistischer Verfahren, um auf einer empirischen Grundlage den Verkehr und seine volkswirtschaftlichen Auswirkungen quantitativ zu analysieren und zu prognostizieren.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

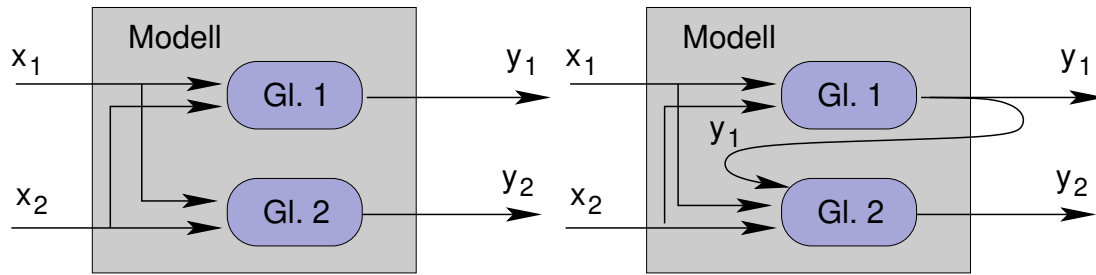


Figure 1.1.: Flussdiagramm der exogenen und endogenen Variablen des allgemeinen ökonomischen Modells (1.1). Gezeigt ist der Fall für je zwei exogene und endogene Variablen, $M = k = 2$ ohne (links) und mit (rechts) Kopplung der endogenen Variablen. Das Modell (eckige Box) besteht hier also aus zwei Gleichungen, welche zwei Eingleichungsmodellen (links) bzw. einem Mehrgleichungsmodell (rechts) entsprechen.

1.1. Modelle und Variablen der Verkehrsökonomie

Da die Ökonometrie wirtschaftliche Zusammenhänge quantitativ beschreibt, besteht ihre Grundlage aus mathematischen Gleichungen. Meist werden Gleichungen folgender Struktur betrachtet (vgl. Abb. 1.1):

$$Y_k = f_k(x_1, \dots, x_m, \dots, x_M, \beta_0, \dots, \beta_j, \dots, \beta_J) + \epsilon_k. \quad (1.1)$$

1.1.1. Endogene Variablen

Die Y_k sind die **erklärten Variablen**. Eine solche Variable wird bisweilen auch als **Explanandum** (lat. "zu erklärende" bzw. erklärte Variable), als **endogene Variable** (Griechisch: von innen heraus, also aus dem Modell kommend) oder gemäß allgemeinen mathematischen Sprachgebrauch als **abhängige Variable** bezeichnet. In der Systemtheorie entsprechen die Y_k dem *Output* des jeweiligen Modells. Da viele Modelle stochastischer Natur sind, also Zufallsgrößen ϵ_k enthalten (vgl. Abschnitt 1.1.4), sind die Y_k im Allgemeinen Zufallsvariablen und werden, der allgemeinen Konvention der Statistik entsprechend, "groß" geschrieben.

Je nach der Anzahl und Kopplung der endogenen Variablen werden verschiedene Modellklassen unterschieden: von

- **Eingleichungsmodelle:** Nur eine endogene Variable $Y_1 = Y$,
- **Mehrgleichungsmodelle:** Mehrere endogene Variable Y_k , die miteinander gekoppelt sind (vgl. Abb. 1.1 rechts),
- **Mehreren Eingleichungsmodelle:** Mehrere ungekoppelte endogene Variable wie im Flussdiagramm 1.1 links. Dies entspricht mehreren separat zu lösenden Eingleichungsmodellen.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

Beispiel Verkehrsmittelwahl: Die Y_k sind die absoluten Häufigkeiten der gewählten Verkehrsmittel, z.B. Y_1 =Zahl der Kfz-Fahrten, Y_2 =Zahl der ÖPNV-Fahrten und Y_3, Y_4 = Zahl der Wege mit dem Rad bzw. zu Fuß.

1.1.2. Exogene Variablen

Die Größen $x_m, m = 1, \dots, M$ sind die **erklärenden Variablen**, welche auch als **Explanans** (lat. "erklärend"), **exogene Variable** (Griechisch: von außen kommend) oder allgemein als **unabhängige Variable** bezeichnet werden. In der Systemtheorie entsprechen die x_m dem *Input* in das jeweilige Modell. In der Regel werden die x_m als deterministisch betrachtet und deshalb, der allgemeinen Konvention entsprechend, "klein" geschrieben.¹

Je nach Anzahl der exogenen Variablen definiert man

- **univariate Modelle** bzw. **Einfachregression**: $M = 1$,
- **multivariate Modelle** bzw. **Mehrfachregression**²: $M > 1$.

Beispiel Verkehrsmittelwahl: Die x_m sind die Reisezeiten und andere, die Verkehrsmittelwahl beeinflussende Faktoren (Kosten, Zuverlässigkeit etc)

1.1.3. Modellparameter

Die Größen $\beta_j, j = 0, \dots, J$ sind die **Modellparameter**. Im Gegensatz zu den exogenen und endogenen Variablen, welche sich bei jedem System bzw. bei jeder Anwendung des Modells ändern, sollten die Modellparameter nach ihrer **Schätzung** bzw. **Modellkalibrierung** und einer solchermaßen bewirkten Anpassung des Modellverhaltens an die Wirklichkeit (vgl. Abschnitt 10.3) für alle Anwendungen einen konstanten Wert besitzen. *Diese Eigenschaft ist ein entscheidendes Kriterium für die Qualität eines Modells und seiner Aussage- und Prognosekraft!*

Beispiel Verkehrsmittelwahl: Modellparameter bestimmen die relative Gewichtung einzelner Einflussfaktoren (z.B. für jedes Verkehrsmittel den Wert der Zeit in €/h) sowie eine a-Priori-Bevorzugung bestimmter Verkehrsmittel gegenüber anderen (in € oder Minuten) bei eigentlich gleichem Nutzwert.

¹In der Praxis werden sowohl die x_m als auch die Y_k aus Erhebungen gewonnen, beide Variablenkategorien sind damit prinzipiell stochastischer Natur. Man kann aber ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Stochastizität der Input-Größen auf die Zufallsanteile ϵ_k verschieben, da die Modelle ja stochastische *Funktionen* darstellen, also die exogenen Variablen sowieso variabel sind. Dies ist sogar geboten, da andernfalls die Stochastizität überbestimmt ist. Näheres in Abschnitt 1.1.4.

²Streng genommen sind die Termini Einfach- und Mehrfachregression in diesem Zusammenhang nicht korrekt, da sie eine spezielle Schätzmethode (die Regression) und nicht die Modelle als solches bezeichnen. Dies wird aber in der Literatur häufig ungenauerweise gleichgesetzt.

1. Der Begriff der Verkehrsökometrie

1.1.4. Zufallsanteile

Die ϵ_k beschreiben unbestimmte oder **nicht erklärte Anteile** welche meist durch Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E(\epsilon_k) = 0$ modelliert werden³ Insbesondere gibt es folgende Gründe für die Notwendigkeit eines Zufallsanteils ϵ_k :

- Das Modell kann nicht alle Einflussfaktoren berücksichtigen. Wichtig ist aber, zumindest alle Faktoren mit *systematischen Einfluss* zu berücksichtigen, da das Modell sonst **fehlspezifiziert** ist und falsche Aussagen liefert (Näheres in der Master-Vorlesung).
- Die zur Modellkalibrierung verwendeten Messwerte sind fehlerbehaftet. Dieser Anteil von ϵ gibt direkt die kumulierten Messfehler wider.
- Der Mensch ist keine Maschine. Der entsprechende Anteil von ϵ spiegelt die Abweichung des in Wirklichkeit oft nichtrationalen Verhaltens vom Idealbild des *Homo Oeconomicus* wider.

Korrekt spezifizierte und eindeutig definierte Zufallsterme spielen eine wesentliche Rolle bei der Parameterschätzung (Abschnitt 10.3)

Beispiel Verkehrsmittelwahl: ϵ_k entspricht dem *Zufallsnutzen*. Dieser sorgt dafür, dass – wie in der Wirklichkeit – mit geringerer Wahrscheinlichkeit auch ein Verkehrsmittel mit nichtmaximalen deterministischen, d.h. modellierten Nutzen gewählt wird.

1.1.5. Modellfunktionen

Die Funktionen $f_k(\dots)$ charakterisieren schließlich das eigentliche ökonomische Modell. Wie bei den Parametern ist es für die Güte und Prognosekraft eines Modells wichtig, dass es nach seiner Entwicklung unverändert auf neue Instanzen des zu beschreibenden Sachverhalts mit unterschiedlichen exogenen Variablen angewandt werden kann.

Beispiel Verkehrsmittelwahl bei N Entscheidungen insgesamt:

$$Y_k = f_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = N \frac{e^{V_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})}}{\sum_{k'} e^{V_{k'}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})}} \quad (1.2)$$

mit den Nutzenfunktionen $V_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$, welche die Einflussfaktoren (exogenen Variablen) \mathbf{x} (Reisezeit, Kosten,...) und die Modellparameter $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}$ (Sensitivitäten bezüglich der exogenen Variablen bzw. Faktoren) enthalten. Näheres dazu im Abschnitt 1.3.2.

1.1.6. Das Prinzip der Sparsamkeit

Bei der Modellformulierung gilt das Sparsamkeitsprinzip (*principle of parsimony*), welches man, frei nach Einstein, folgendermaßen formulieren kann:

³Man sagt, dass “Zufallselemente nichts anderes als das Eingeständnis von Unwissen” seien. Die Bedingung $E(\epsilon_k) = 0$ ist keine Einschränkung, da man einen eventuellen Erwartungswert auf den deterministischen Teil verlagern kann.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

Das Modell sollte so einfach wie möglich sein, aber nicht einfacher.
Es sollte so wenig Parameter wie möglich enthalten, aber nicht weniger.

1.2. Modellgleichungen

Die das ökonomische Modell beschreibenden mathematischen Gleichungen kann man nach zwei Kriterien klassifizieren: Bezüglich der *Inhaltlichen* bzw. *semantischen* Struktur und bezüglich der *mathematischen* Struktur.

1.2.1. Inhaltliche Struktur

Hier unterscheidet man nach zwei Kategorien:

- Das **ökonomische Modell im engeren Sinn** wie Gl. (1.1) beschreibt den *allgemeinen funktionalen Zusammenhang*. Manchmal wird noch zwischen dem *ungeschätzten* bzw. *allgemeinen Modell* (nicht spezifizierte Werte der Modellparameter) und dem *geschätzten* bzw. *konkreten Modell* (nach der Parameterschätzung) unterschieden. Im einfachstmöglichen nichttrivialen Fall eines linearen univariaten Eingleichungsmodells (eine exogene und eine endogene Variable) lautet das allgemeine ökonomische Modell

$$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \quad (1.3)$$

und das geschätzte Modell

$$\hat{Y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x. \quad (1.4)$$

Im *allgemeinen Modell* haben die Parameter feste, aber noch nicht bestimmte Werte und die Unsicherheit wird durch die Zufallsgröße ϵ ausgedrückt. Im *geschätzten Modell* gibt es keinen expliziten Zufallsterm mehr. Vielmehr sind die Zufallseinflüsse auf die geschätzten Parameterwerte $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ übergegangen, welche nun *ihrerseits* Zufallsvariablen darstellen.

Im Falle eines linearen multivariaten Eingleichungsmodells (mehrerer exogene und eine endogene Variable) lautet das allgemeine ökonomische Modell

$$Y(x) = \beta_0 + \sum_{m=1}^M \beta_m x_m + \epsilon \quad (1.5)$$

- Die **Systemgleichungen**, manchmal auch als **Messgleichungen** bezeichnet, beschreiben die *Anwendung* des ökonomischen Modells auf konkrete Systeme bzw. auf die von diesen Systemen gemessenen Werte der exogenen und endogenen Variablen. Im Gegensatz zum abstrakten Modell hängen die Systemgleichungen vom konkreten System ab. Die zum ökonomischen Modell (1.3) gehörigen Systemgleichungen lauten

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

und werden auf n Datensätze $\{(x_i, y_i)\}$ angewandt. Die Systemgleichungen zum Mehrfachregressionsmodell (1.5) lauten

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{m=1}^M \beta_m x_{mi} + \epsilon_i \quad (1.7)$$

und werden auf n Datensätze $\{(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Mi}, y_i)\}$ angewandt. Mit Hilfe der Systemgleichungen kann man die Modellparameter derart schätzen, dass eine Funktion $F(\{\epsilon_i\})$ der Modellierungsfehler ϵ_i , z.B. die Fehlerquadratsumme, minimal wird (Kapitel 10.3)

Merke: Wichtig ist es, bei einfach indizierten exogenen Variablen zu unterscheiden, ob es sich um ein abstraktes Mehrfachregressionsmodell der Art (1.5) oder um Systemgleichungen eines Einfachregressionsmodells der Art (1.6) handelt.

Verständnisfrage:

Warum sollte es bei den Systemgleichungen immer mehr Sätze von Messwerten geben als es der Zahl der Parameter entspricht ($n > J + 1$)? Was passiert, wenn $n = J + 1$ oder gar $n < J + 1$?

1.2.2. Mathematische Struktur

Unterscheidung nach Linearität

Die Unterscheidung ist in Hinblick auf die Lösungsmethoden wichtig. Man kann folgende Kategorien unterscheiden:

- **Lineare Modelle:** Hier hängen die endogenen Variablen linear von den exogenen Variablen x und den Parametern β ab: Bei Eingleichungsmodellen haben sie also die Form

$$Y(x) = \beta_0 + \sum_{m=1}^M \beta_m x_m + \epsilon. \quad (1.8)$$

In vielen ökonomischen Lehrbüchern werden ausschließlich lineare Modelle behandelt, in der Verkehrsökonomie sind jedoch auch nichtlineare Modelle wichtig.

Beispiel: Einfaches Modell für die mittlere Fahrleistung Y pro Person in einer Region:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \quad (1.9)$$

mit den erklärenden Variablen

- x_1 : Mittleres Einkommen (Euro pro Jahr)
- x_2 : Treibstoffpreis (Euro/Liter)
- x_3 : Ausbau des Straßennetzes (Kilometer pro Einwohner)

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

Als Aussagen lassen sich hier zum Beispiel Elastizitäten gewinnen wie

$$\epsilon_2 = \frac{x_2}{Y} \frac{dY}{dx_2} = \frac{\beta_2 x_2}{Y}$$

Ein Wert $\epsilon_2 = -0.2$ sagt z.B. aus, dass bei einer Erhöhung der Treibstoffpreise um 10% nur 2% weniger Auto gefahren wird.

- **Reduzible nichtlineare Modelle:** Zwar hängt hier die endogene Variable nichtlinear von sowohl den exogenen Variablen \mathbf{x} als auch den Parametern β ab, man kann die Modellgleichungen jedoch durch Transformation der exogenen und/oder endogenen Variablen in eine lineare Form bringen.

Beispiel: Modell für das *unbeschränkte Wachstum* eines ökonomischen Prozesses (z.B. die anfänglichen Verkaufszahlen eines neu eingeführten Produkts). Mit der Zeit als exogenen Variablen lautet dieses

$$y(t) = y_0 e^{t/\tau + \epsilon} \quad (1.10)$$

Durch die Transformation $y = e^w$ und anschließende Logarithmierung wird dieses in ein lineares Eingleichungsmodell transformiert:

$$w(t) = \ln(y_0) + t/\tau + \epsilon = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon \quad (1.11)$$

Verständnisfrage:

Warum funktioniert dies bloß, wenn die Zufallsanteile im ursprünglichen Modell *multiplikativ* wirken?

- **Irreduzible nichtlineare Modelle:** Hier hängt die endogene Variable nichtlinear sowohl von den exogenen Variablen \mathbf{x} als auch von den Parametern ab und es ist keine Transformation auf eine lineare Form möglich. Dies ist zwingend immer dann der Fall, wenn die endogenen Variablen *diskreter Natur* sind (z.B. $Y =$ Zahl der Wege, die mit dem Rad zurückgelegt werden) oder wenn es sich gar um **qualitative** bzw. **nominalskalierte Variablen** handelt, z.B. $Y =$ gewählter Beruf mit den Ausprägungen Maurer, Schreiner, Physiker etc. Aber auch im Bereich der stetigen Modelle gibt es manchmal die Notwendigkeit von nichtlinearen Modellen, wie im folgenden Beispiel.

Beispiel: Modell für das *Sättigungsverhalten* eines ökonomischen Prozesses (z.B. die Verkaufszahlen von Autos oder Mobiltelefonen seit Erfindung der jeweiligen Produkte) beschreiben will. Das klassische **Modell beschränkten Wachstums** mit der Zeit x als exogenen Variablen hat die Form (vgl. Abb. 1.2)

$$\hat{y}(x) = \frac{y_s}{1 + \left(\frac{y_s}{y_0} - 1\right) e^{-x/\tau}} \quad (1.12)$$

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

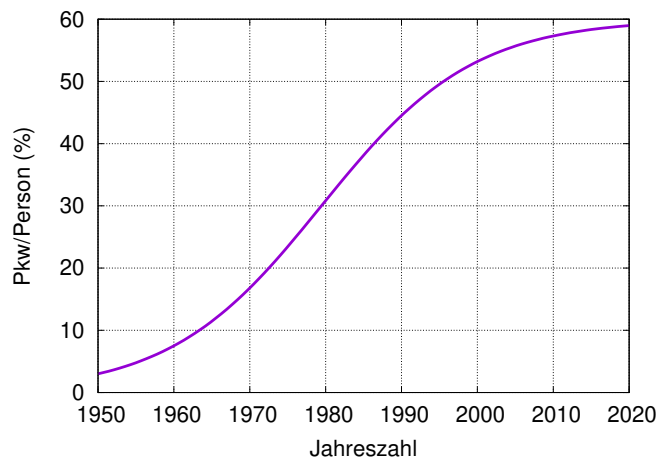


Figure 1.2.: Graph des Modells (1.12).

Verständnisfrage:

Diskutieren Sie die Bedeutung der Parameter τ , y_0 und y_s im Modell (1.12). Kann man das Modell auch in der Form $\hat{y}(x) = y_s / [1 + e^{-(x-x_0)/\tau}]$ schreiben? Was ist dann die Bedeutung des neuen Parameters x_0 und wie hängt er mit den Parametern der Formulierung (1.12) zusammen?

- **Quasilineare** bzw. **parameterlineare Modelle**: In dieser Modellklasse sind die Modellgleichungen linear bezüglich der Parameter β , aber nichtlinear bezüglich der exogenen Variablen \mathbf{x} . Solche Modelle kann man immer durch eine Transformation der exogenen Variablen linearisieren,⁴ so dass sie *völlig äquivalent* zu den linearen Modellen sind.

Alle Methoden linearer Modelle sind identisch auch auf die transformierte quasilineare Modelle anwendbar. Im weiteren Verlauf dieses Skriptes sind deshalb bei linearen Modellen immer auch quasilineare Modelle mit eingeschlossen.

Beispiel: Einfaches Modell für die mittlere PKW-Fahrleistung Y eines PKW-Besitzers pro Jahr:

$$Y(\mathbf{x}, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon \quad (1.13)$$

mit den exogenen Variablen

⁴Im Gegensatz zu den reduzierbaren nichtlinearen Modellen gibt es hier auch keine Probleme mit den Zufallsanteilen.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

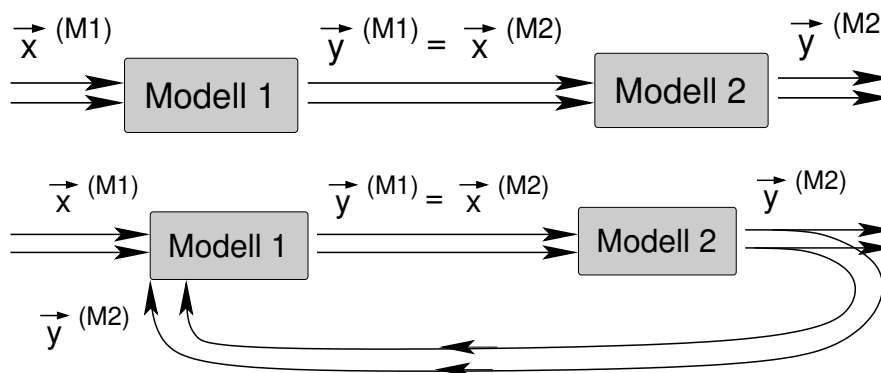


Figure 1.3.: Flussdiagramm der exogenen und endogenen Variablen für verkettete (oben) und rückgekoppelte (unten) Modell-Systeme. Das ‘‘Innenleben’’ der Modelle (also die je zwei Gleichungen, vgl. Abb. 1.1) ist nicht mehr gezeigt. Die Vektorpfeile symbolisieren den ganzen Satz jeweiliger endogener und exogener Variablen.

- x_1 : Mittleres Einkommen (Euro pro Jahr)
- x_2 : Treibstoffpreis (Euro/Liter)

Mit den Transformationen

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_1 x_2$$

wird dieses Modell in ein lineares Modell mit *drei* exogenen Variablen transformiert:

$$Y(\mathbf{z}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \epsilon \quad (1.14)$$

Die zugehörigen Anstiegsparameter bedeuten

- β_1 : Anstieg der Fahrleistung mit dem Einkommen (üblicherweise $\beta_1 > 0$)
- β_2 : Preissensitivität der PKW-Nutzung (üblicherweise $\beta_2 < 0$)
- β_3 : Reduktion der Preissensitivität mit dem Einkommen (üblicherweise $\beta_3 > 0$)

Verständnisfrage:

Machen Sie sich die Vorzeichen der drei Parameter in diesem Beispiel klar. Warum ist bei Berücksichtigung auch extrem hoher Einkommen ein irreduzibel nichtlineares Modell notwendig? Zeigen Sie dies anhand der dann nicht plausiblen Aussagen des Modells (1.14).

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

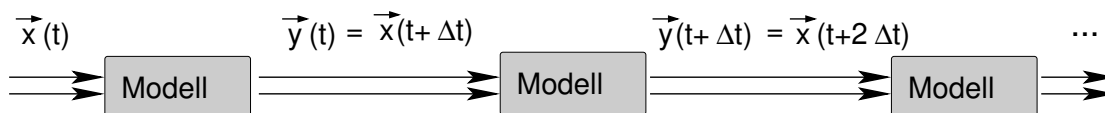


Figure 1.4.: Flussdiagramm der Verkettung im Falle dynamischer Modelle. Das Modell selbst ist in der Regel in allen Schritten dasselbe, oft mit unveränderten Parametern (*autonomes* dynamisches Modell), manchmal mit von der Zeit abhängigen (*nichtautonomes* Modell).

Unterscheidung nach weiteren mathematischen Kriterien

Weitere in der Ökonometrie relevante Unterscheidungsmerkmale sind

- Existenz eines Zufallsanteils: **Deterministische** vs. **stochastische** Modelle.
- Zahl der exogenen Variablen: Eine bei univariaten und mehrere bei multivariaten Modellen.
- Zahl der endogenen Variablen: Eine bei Eingleichungsmodellen, mehrere bei Mehrgleichungsmodellen.
- Skalierung der endogenen Variablen: **Entscheidungsmodelle** haben diskrete bzw. qualitative/nominalskalierte endogene Variablen, während **kontinuierliche Modelle** stetige sowie verhältnisskalierte endogene Variable aufweisen. Diese beiden Kategorien bedingen grundsätzlich verschiedene Herangehensweisen bei der Modellierung, beispielsweise sind Entscheidungsmodelle immer nichtlinear.

Hingegen ist die Skalierung der exogenen Variablen nicht so bedeutsam, da man qualitative bzw. nominalskalierte exogene Variable durch kardinalskalierte **Pseudovariablen** der Art 1=Maurer, 2=Schreiner, 3=Physiker etc ausdrücken kann.

- Existenz von Verkettung oder Rückkopplung (siehe Abb. 1.3 und Abb. 1.5):
 - Bei **verketteten Modellen** sind die endogenen Variablen einer Modellstufe die exogenen der nächsten. Wichtigstes Beispiel dafür ist das Vier-Stufen-Schema der klassischen Verkehrsplanung (Abb. 1.5).
 - Bei **rückgekoppelten Modellen** koppeln die endogenen Variablen eines Modells einer späteren Verkettungsstufe auf die exogenen Variablen eines Modells einer früheren Verkettungsstufe zurück. Beim Vier-Stufen-Modell der Abb. 1.5 können als Folge der Routenwahl einzelne Netzelemente überlastet, also verstaubt werden. Die damit verbundenen Resiezeitverlängerungen beeinflussen wiederum die Ziel- und ggf. die Verkehrsmittelwahl.
- Dynamische vs. statische Modelle: **dynamische Modelle**, also Modelle mit expliziten dynamischen Zeitbezug, stellen einen Sonderfall der Verkettung im Zeitbereich dar: Die Entwicklung des aktuellen Zeitschrittes hängt von den Ergebnissen

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

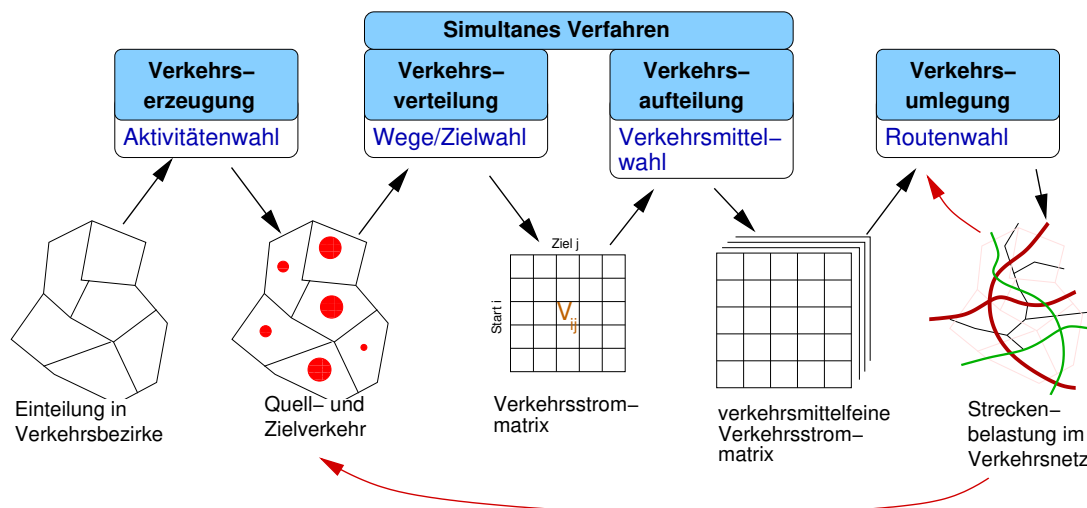


Figure 1.5.: Das klassische Vierstufenmodell der Verkehrsplanung als Beispiel der Verkettung und Rückkopplung von Modellen. Die endogenen Variablen der ersten Modellstufe “Aktivitätenwahl”, die im Verlauf eines Tages anfallenden Verkehrsströme von und nach jedem Bezirk (Quell- bzw. Zielsummen), spielen gleichzeitig die Rolle von exogenen Variablen bei der Modellierung der “Zielwahl”. Die endogenen Variablen der Zielwahl (Quelle-Ziel-Relationen bzw. Wege zwischen jeweils zwei Bezirken) sind wiederum die exogenen Variablen der Verkehrsmittelwahl und in weiterer Folge der Routenwahl. Das Ergebnis der Routenwahl führt ggf. zu einer Überlastung einzelner Netzelemente und zu einer Erhöhung der Reisezeit auf einigen Relationen. Diese sogenannte “Reisezeitmatrix” bzw. “Aufwandmatrix” ist nun wiederum eine weitere exogene Variable der Zielwahl (“wenn der Weg von Bezirk i nach j immer verstopft ist, gehe ich vielleicht doch woanders einkaufen”), so dass die Routenwahl auf die Zielwahl rückkoppelt.

des vergangenen Zeitschrittes bzw. der vergangenen Zeitschritte ab (Abb. 1.4). In der vertiefenden Master-Vorlesung) werden wir einen einfachen Typ dieser Modelle kennen lernen, das **dynamische Input-Output-Modell**.

1.3. Zwei Anwendungsbeispiele

Hinweis: In diesem Abschnitt werden konkrete Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und Modelle der Verkehrsökonomie an zwei umfangreicheren Beispielen erläutert. Die Komplexität der mathematischen Modellierung dieser Beispiele geht über die im weiteren Verlauf des Skripts behandelten Modelle und Rechnungen hinaus und soll eher als “Kostprobe” dienen, wohin die Richtung in den vertiefenden Master-Vorlesungen und in der tatsächlichen Anwendung geht.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

1.3.1. Staukosten

Die in Deutschland pro Jahr anfallenden Kosten durch Staus werden kontrovers diskutiert. Schätzungen reichen von weniger als 1 Mrd €/Jahr über 10-20 Mrd €/Jahr (EU-Weißbuch, 2001) bis zu 100 Mrd €/Jahr (BDI 1999, BMW-Studie 1997). Selbst ein insgesamt negativer (!) Beitrag von Staus zu volkswirtschaftlichen Kosten wird diskutiert (Hermann Knoflacher, "Stehzeuge").

Da die endogenen Variablen, also die verschiedenen Kosten, (quasi-)stetige Größen darstellen,⁵ ist hier eine Beschreibung mit *stetigen Modellen* sinnvoll. Die Abschätzung der gegenwärtigen und zukünftigen Staukosten kann in unterschiedlichen Detaillierungsgraden geschehen:

1. **Einfache globale Schätzung:** Hier wird das aktuelle Verkehrsaufkommen durch Mobilitätsbefragungen (siehe Kap. 8) empirisch erhoben und das zukünftige gemäß einem einfachen Modell abgeschätzt, z.B. mit dem Modell (1.12) für beschränktes Wachstum.

Die durch Staus verursachte Gesamtkosten schätzt man dann durch einen einfachen globalen Ansatz ab, z.B.

$$K_{\text{stau}} = \Delta K_{\text{Zeit}} + \Delta K_{\text{Treibstoff}} + \Delta K_{\text{Unfall}} + \Delta K_{\text{Umwelt}} \quad (1.15)$$

Hierin sind

- ΔK_{Zeit} die *Zeitmehrkosten* durch Staus. Diese kann man z.B. mit Hilfe der durch Mobilitätsbefragungen erhobenen Gesamt-Verkehrsleistung von $L = 800$ Milliarden Personenkilometer pro Jahr abschätzen. Nimmt man eine mittlere Geschwindigkeit von $\bar{V} = 50$ km/h sowie einen durch Staus verursachten Zeitmehrverbrauch von $p = 5\%$ an und setzt für die Zeitkosten $\dot{K} = 10$ €/Pers/h an, ergibt sich

$$\Delta K_{\text{Zeit}} = \frac{Lp\dot{K}}{\bar{V}} = 8 \text{ Mrd €/Jahr.} \quad (1.16)$$

zu ähnlichen Größenordnungen kommt man bei Annahme von z.B. 5 min täglicher Stauzeit für die etwa 40 Millionen Autofahrer.

- Die Treibstoff-Mehrkosten setzen ein Modell des Treibstoffmehrverbrauchs voraus. Nimmt man z.B. während der Stauzeit einen Verbrauch von $\dot{C}_{\text{Stau}} = 3$ Liter/h, einen Treibstoffpreis $K = 1.50$ €/Liter⁶ sowie einen mittleren Besetzungsgrad von $B = 1.5$ Pers/Kfz an, erhält man

$$\Delta K_{\text{Treibstoff}} = \Delta K_{\text{Zeit}} \dot{C}_{\text{Stau}} K / B = \frac{Lp\dot{C}_{\text{Stau}}K}{B\bar{V}} = 2.4 \text{ Mrd €/Jahr.} \quad (1.17)$$

⁵Quasistetige Variablen sind, streng genommen, diskret, aber die Einheit der Diskretisierung (in unserem Falle Cent) ist um Größenordnungen kleiner als typische Werte der endogenen Variable (Milliarden von €)

⁶Der Leerlaufverbrauch ist meist unter 1 Liter/h, aber die Stop&Go-Phasen haben natürlich einen deutlich höheren Verbrauch

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

- Schwieriger wird die Abschätzung der durch Staus verursachten *zusätzlichen* Unfälle, z.B. Auffahrunfälle, und noch schwieriger die externen Umweltmehrkosten durch zusätzlichen Lärm, CO₂ Emissionen, Feinstaub usw.
2. **Schätzung mit CR-Funktionen** Dieser Ansatz ist vor allem für abgegrenzte Regionen (z.B. Städte) interessant, für deren Straßennetz eine Verkehrsumlegung vorliegt, d.h. eine modellierte (und durch Querschnittszählungen geschätzte) Verkehrsbelastung Q_l in Kfz/h auf allen gerichteten Kanten (Streckenelemente) l des Verkehrsnetzes. In diesem Falle kann die zeitliche Mehrbelastung direkt durch die **Capacity-Restraint-Funktionen** bzw. **CR-Funktionen** angenähert werden. Diese sind auch Basis der Umlegung (vgl. Abschnitt 7):

$$T_l(Q) = T_{l0} \left[1 + \left(\frac{Q}{K_l} \right)^\gamma \right]. \quad (1.18)$$

Hier bezeichnet $T_l(Q)$ die Fahrzeit auf einem Streckenelement (Kapazität K_l) bei der Verkehrsbelastung Q_l und T_0 die Fahrzeit ohne Belastung. Der Exponent γ wird meist zwischen 1 und 5 gewählt. Üblicherweise wird die Umlegung in Stundenabständen durchgeführt. In dieser Stunde t fallen auf einem Netzelement l die Stau-Zeitkosten $\Delta K_{lt} = \dot{K} Q_{lt} [T_l(Q_{lt}) - T_{l0}]$ an. Die Staukosten pro Tag ergeben sich einfach als die Summe über alle Streckenelemente und Stundenintervalle:

$$\Delta K_{\text{Zeit}} = \sum_{t=1}^{24} \sum_l \dot{K} Q_{lt} [T_l(Q_{lt}) - T_{l0}]. \quad (1.19)$$

Mit den CR-Funktionen kann man auch die interessante Frage beantworten, wie sehr man durch eine eigene Fahrt zur Rush-hour die Reisezeit aller anderen betroffenen Verkehrsteilnehmer verlängert. Vom egoistischen Standpunkt aus wären dies externe Kosten, da sie die anderen Fahrer betreffen.⁷ Bezeichnet man die durch die eigene Verkehrsteilnahme bei anderen Verkehrsteilnehmern verursachten Zeitmehrkosten mit ΔK_{ext} und die eigenen Zeitmehrkosten durch die Verkehrsüberlastung mit ΔK_{indiv} , ergibt sich für jeden Streckenabschnitt und auch für die gesamte Fahrt das bemerkenswert einfache Ergebnis (vgl. Übungsaufgabe)

$$\Delta K_{\text{ext}} = \gamma \Delta K_{\text{indiv}}. \quad (1.20)$$

Der Zeitmehrverbrauch bei den anderen Verkehrsteilnehmern ist also gleich dem eigenen Zeitmehrverbrauch, multipliziert mit dem Exponenten der CR-Funktion und zwar *unabhängig von der Höhe und Verteilung der Verkehrsbelastung bzw. der Lage und Länge von Staus*. Dies wird in der folgende Aufgabe und der dazugehörigen [Lösung](#) demonstriert. Dies kann man plakativ wie folgt ausdrücken:

“Durch meine Verkehrsteilnahme werden die anderen Verkehrsteilnehmer um den Faktor γ (Exponent der CR-Funktion) mehr verzögert als ich selbst”

⁷üblicherweise werden externe Kosten aber definiert als nichtbezahlte Kosten, die anderen Gruppen (Fußgängern, ÖPNV-Teilnehmern etc) durch die Aktivität der betrachteten Gruppe (hier der Kfz-Nutzer) entstehen. In diesem Sinne sind die gesamten Stauzeitkosten interne Kosten.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

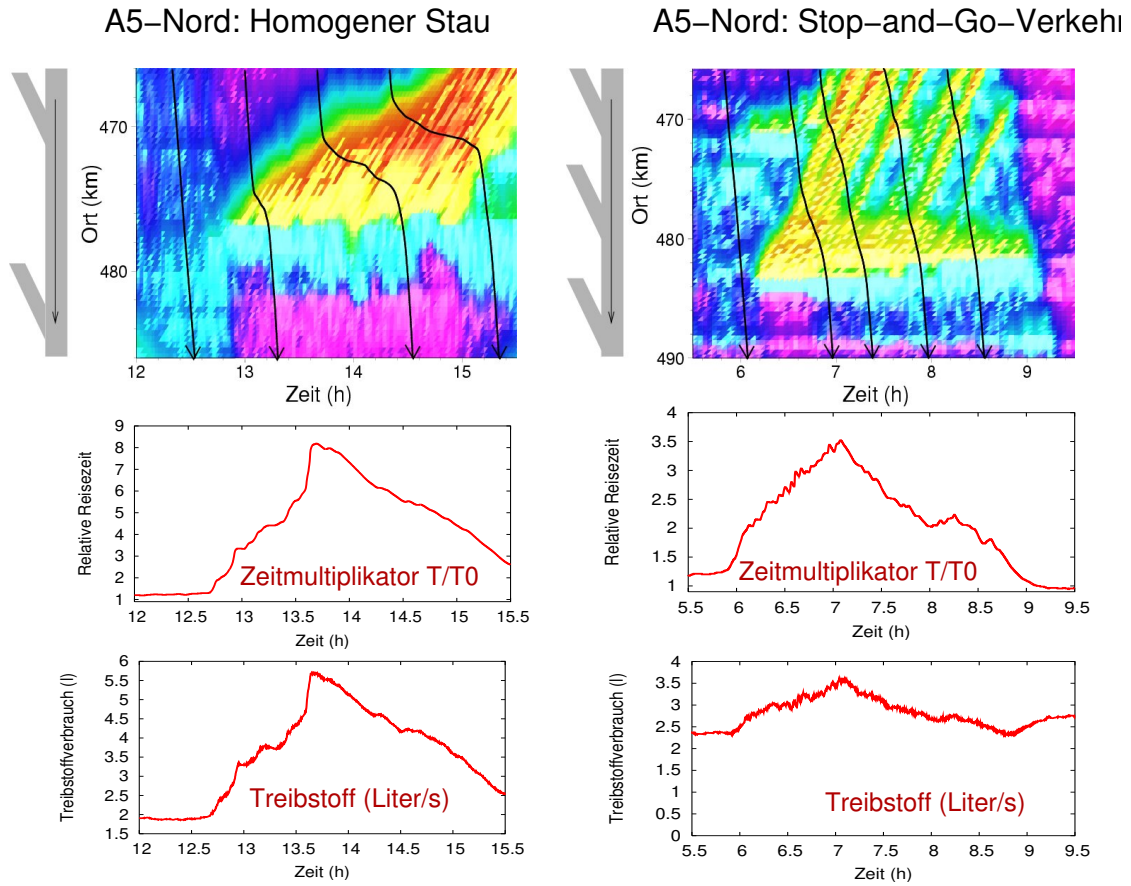


Figure 1.6.: Empirische Ermittlung der durch zwei konkrete Staus auf der A5 (in der Nähe von Frankfurt) verursachten Zeit- und Treibstoffkosten. Oben: Aus Detektordaten rekonstruierte raumzeitliche Geschwindigkeitsprofile und einige beispielhaft daraus errechneten Trajektorien; Mitte: aus den Trajektorien bestimmte Reisezeit; unten: Aus Fahrzeug- Motor- und Getriebekenn- daten eines VW Passat errechneter Treibstoffverbrauch aller im Testab- schnitt befindlichen Fahrzeuge. Näheres über die hierbei verwendeten Modelle kann man in der Vorlesung [Verkehrsdynamik und -simulation](#) erfahren.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

Mehr Details zu dieser Problematik finden sich im Abschnitt 7 dieses Skripts.

Aufgabe:

Leiten Sie das Ergebnis (1.20) für einen Streckenabschnitt her, indem Sie für die Zeit T_l zum Durchfahren dieses Streckenabschnitts die Nachfrage Q_l um $\Delta Q_l = 1/T_l$ erhöhen (genau dies bewirkt das Durchfahren). Schätzen Sie die resultierende Reisezeiterhöhung durch $\Delta T_l = T_l'(Q_l)\Delta Q_l$ ab und multiplizieren Sie diese Erhöhung mit der Zahl $n = Q_l T_l$ der betroffenen Fahrzeuge.

3. **Mikroskopische Schätzung mit Fahrzeugtrajektorien** Bei dieser detailliertesten Abschätzung beschränkt man sich wegen der Datenlage in der Regel auf eine einzelne Stausituation. Die Fragestellung lautet:

Wieviel Zeitverlust und wieviel Treibstoff-Mehrverbrauch wird durch ein konkretes Stau-Ereignis verursacht?

Diese Frage kann mit keiner anderen Methode beantwortet werden, da sowohl der Zeit-Mehrverbrauch als auch der Treibstoffverbrauch zum Beispiel davon abhängt, ob es sich um einen gleichmäßigen Stau ("zähfließender Verkehr"), um Stop-and-Go-Verkehr oder um einen Totalstillstand handelt.

Die Zeitverzögerung wird dabei direkt anhand der (simulierten oder gemessenen) Fahrzeugtrajektorien abgelesen. Für den Treibstoffverbrauch kommen dezidierte mikroskopische Modelle zum Einsatz, welche den instantanen Verbrauch (Treibstoffmenge pro Zeiteinheit) in Abhängigkeit der Geschwindigkeit, der Beschleunigung sowie der Motor- und Fahrzeugparameter berechnet.⁸

Abbildung 1.6 zeigt Beispiele für typische Stausituationen. In der Vorlesung [Verkehrsdynamik und -simulation](#) (innerhalb des Moduls "Vertiefung Verkehrsökonomie") werden die zugrundeliegenden Modelle ausführlich behandelt.

1.3.2. Verkehrsmittelwahl

Die Verkehrsmittelwahl ist ein klassisches Beispiel für die in der Verkehrsökonomie sehr wichtigen Modelle der **diskreten Wahltheorie**, welche in der vertiefenden Master-Vorlesung behandelt werden. Während die exogenen (erklärenden) Variablen diskret oder stetig sein können, ist der Ausgang (endogene bzw. erklärte Variablen) auf jedem Fall diskret, da man unter i.A. wenigen Alternativen zu wählen hat. Die meisten Modelle der diskreten Wahltheorie sind mehrstufig (vgl. Abb. 1.7):

- Zunächst wird für jede Alternative k eine generalisierte Nutzenfunktion definiert, die den Zeitaufwand (komplexe Reisezeit, d.h. Haustür - zu - Haustür Reisezeit),

⁸Es ist in Extremfällen – genau wie in der Wirklichkeit – nicht einmal ausgeschlossen, dass Staus zu *Minderverbräuchen* führen. Dies ist insbesondere bei gleichmäßig fließenden gebundenen Verkehr im Vergleich zu sehr schneller freier Fahrt möglich.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

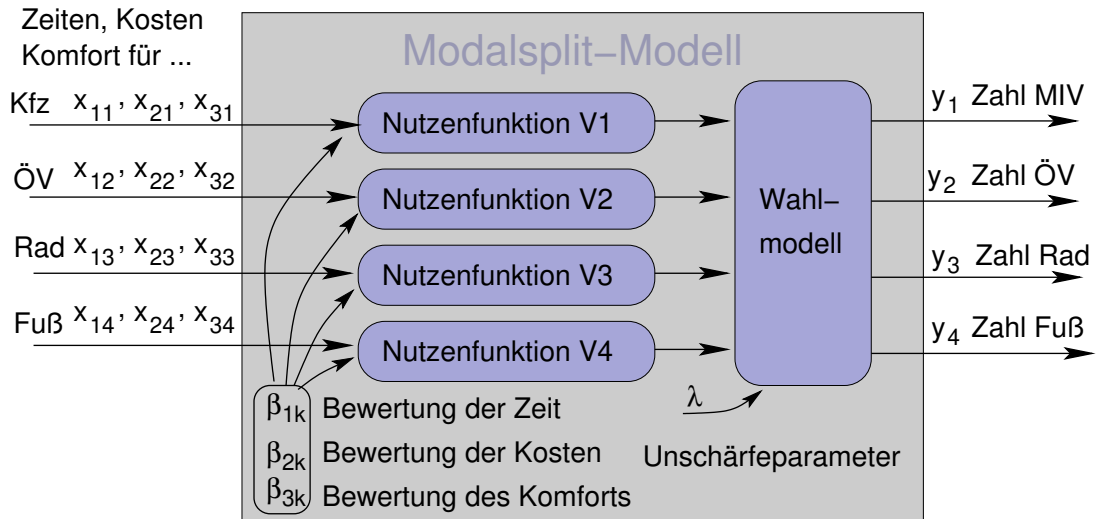


Figure 1.7.: Beispiel eines ökonomischen Modells mit – zumindest auf der Ebene des Individuums – diskreten endogenen Variablen: Modell der Verkehrsmittelwahl. Die exogenen Variablen x_m beeinflussen die Wahlentscheidung: Komplexe Reisezeit, Kosten und Bequemlichkeit für jedes infrage kommende Verkehrsmittel. Weitere Variable wie Geschlecht und Alter des Individuums bzw. Altersklasse, Quelle-Ziel-Gruppe (Kollektiv) kommen hinzu. Im eigentlichen Wahlmodell wird zunächst mit Hilfe der Wichtigkeitsparameter β_1 und β_2 Nutzenfunktionen gebildet und diese dann, unter Berücksichtigung der Unschärfe λ des Zufallsnutzens als weiteren Parameter, in eine Wahlentscheidung (Anwendung auf der individuellen Ebene) bzw. einen Anteilswert (Anwendung auf ein Kollektiv) zunächst wird unter Die exogenen Ausgängen mit diskreten endogenen

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

die Kosten, die Bequemlichkeit, die Zuverlässigkeit und vieles mehr enthalten kann. Der deterministische Anteil V dieser Nutzenfunktion⁹ ist oft quasilinear, d.h. linear in den Parametern, nicht jedoch notwendigerweise linear in den exogenen Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, \dots, x_M)$:

$$V_k(\mathbf{x}) = \beta_1 f_1(\mathbf{x}) + \beta_2 f_2(\mathbf{x}) + \dots$$

- Jede Alternative wird nun anhand ihrer Nutzenfunktion bewertet. Um allgegenwärtige Unsicherheiten durch nicht berücksichtigte erklärende Variablen einerseits und irrationales Verhalten bei der Wahlentscheidung andererseits zu berücksichtigen, wird jedoch nicht unbedingt die Alternative mit dem höchsten (bewerteten) Nutzen gewählt, sondern mit geringeren Wahrscheinlichkeiten auch andere. Das Ausmaß, mit der auch suboptimale Alternativen gewählt werden können, wird dabei durch einen weiteren Parameter λ festgelegt. Die Auswahlwahrscheinlichkeiten können dann z.B. in der Form

$$P(A_k) = \frac{B(V_k, \beta)}{\sum_{k'} B(V_{k'}, \beta)} \tag{1.21}$$

definiert werden. Im bekanntesten dieser Modelle, dem Multinomial-Logit-Modell, ist die Bewertungsfunktion durch $B(\mathbf{x}; \beta, \lambda) = e^{\lambda V(\mathbf{x}; \beta)}$ gegeben. Die Nutzenfunktionen werden meist durch die negativen effektiven Zeitaufwände definiert, d.h. alle anderen Aufwandsarten (Kosten, Unbequemlichkeit ...) werden mit den Parametern β_j auf Zeitkosten umgerechnet (vgl. Abb. 1.7). Typische Werte von V_k liegen bei -30 min und typische Werte von λ sind durch $\lambda^{-1} = 10$ min charakterisiert.

Um dieses Modell zu kalibrieren, werden anhand von Befragungen Messgleichungen folgender Form aufgestellt:

	Alter	Ge-schl.	Zeit-bedarf Rad	Wetter	Kompl. Reisezeit ÖPNV	Ad-hoc Kosten ÖPNV	Wahl-entsch. Rad	Wahl-entsch. ÖPNV
Variable	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_{1i}	y_{2i}
Person 1	30	w	20 min	schlecht	30 min	1.00 €	0	1
Person 2	24	m	11 min	schön	20 min	2.00 €	1	0
Person 3	27	m	34 min	schön	15 min	2.00 €	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

In der Tabelle wurde eines der einfachsten nichttrivialen Sachverhalte gewählt:

- Es gibt nur zwei Alternativen: Rad und ÖPNV

⁹Das Konzept des Zufallsnutzens und wie damit beispielsweise ein Logit-Modell der Art (1.21) hergeleitet werden kann, werden in der vertiefenden Master-Vorlesung betrachtet.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

- Die Nutzenfunktion enthält nur zwei “Kostenarten”: Komplexe Reisezeit und Geldkosten (ÖPNV) bzw. Schlechtwetter (Rad). Die Kosten sind dabei als *Ad-hoc*-Kosten zu verstehen, also als zusätzliche Kosten, wenn man ÖPNV wählt: Dauerkarteninhaber haben deshalb Ad-Hoc-Kosten von Null.
- Neben der Abhängigkeit von weggebundenen erklärenden Variablen, also Reisezeit und Kosten für jede Alternative, wird noch eine Abhängigkeit von sozioökonomischen erklärenden Variablen (Alter und Geschlecht) berücksichtigt.

Anhand dieser Tabelle werden in der Modellkalibrierung die Werte der Modellparameter β_j bestimmt, für welche die durch die Werte y_{1i} und y_{2i} charakterisierten Beobachtungen im Modell am wahrscheinlichsten sind, das Produkt der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten also maximal wird.

Aggregation

Grundsätzlich sind Modelle der Verkehrsmittelwahl **mikroskopisch**, betrachten also jede Entscheidung einzeln. Damit kann auch nur eine der endogenen Variablen y_k für Alternative k gleich 1 sein, während alle anderen $y_{k'}$, $k' \neq k$, gleich 0 sein müssen. In drei Fällen ist eine *Aggregation*, also eine **makroskopische Herangehensweise** möglich, sinnvoll oder sogar notwendig:¹⁰

- *personenbezogene Aggregation*: Ein und dieselbe Person wird in vergleichbaren Situationen (gleiche exogene Variable) mehrfach befragt. Geht es z.B. um die Verkehrsmittelwahl zur Arbeit und wurden die Entscheidungen den letzten zwei Wochen erhoben, kann man die 10 Entscheidungen zusammenfassen.
- *situationsbezogene Aggregation*: Wählt man die exogenen Variablen so, dass sie für mehrere Personen *und alle Alternativen* etwa gleiche Werte besitzen, kann man diese Personen zu Gruppen bzw. Klassen zusammenfassen. In der Praxis funktioniert dies meist nur, wenn man nur Variable wählt, welche für alle Alternativen etwa gleich sind, also entweder sozioökonomische Variable (Alter, Geschlecht, Autoverfügbarkeit), externe Variable (Wetter) oder spezielle generische Variable wie die Entfernung.
- *datenerzwungene Aggregation*: Liegen Daten nur aggregiert vor, kann man natürlich nur makroskopisch vorgehen.

Beispiel: mikroskopische Daten, welche eine Aggregation zulassen (situationsbezogene Aggregation)

¹⁰Hier dient die Aggregation hauptsächlich zu “pädagogischen” Zwecken, da sie die Darstellung vereinfacht. In Realität wird man bei Vorliegen mikroskopischen Datenmaterials immer das mikroskopische Vorgehen wählen.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

	Entf. Fuß	Entf. Rad	Entf. ÖPNV	Entf. MIV	Wahl- entsch. Fuß	Wahl- entsch. Rad	Wahl- entsch. ÖPNV	Wahl- entsch. MIV
Variable	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	y_1	y_2	y_3	y_4
Person 1	2 km	2 km	3 km	3 km	0	1	0	0
Person 2	4 km	4 km	4.5 km	∞	0	0	1	0
Person 3	3 km	3 km	∞	3.5 km	0	0	0	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Aggregation dieser Daten in Entfernungsklassen

Entfernungsklasse	Wahl- entsch. Fuß	Wahl- entsch. Rad	Wahl- entsch. ÖPNV	Wahl- entsch. MIV	Pers. in Klasse
$x_1 =$ Klassenmitte	y_1	y_2	y_3	y_4	n_i
0-1 km	5	1	0	0	6
1-2 km	2	0	5	0	7
2-3 km	0	2	11	0	13
3-5 km	0	0	7	1	8
5-10 km	0	0	5	0	5
10-20 km	0	0	1	1	2
> 20 km	0	0	3	0	3
Σ	7	3	32	2	44

Sollen aber nur wenige zusätzliche sozioökonomische Merkmale wie PKW oder Rad-Verfügbarkeit betrachtet werden, steigt die Zahl der aggregierten Klassen in eine unpraktikable Größe (z.B. 0-1 km mit Rad und Kfz-Verfügbarkeit, 0-1 km mit Rad ohne Kfz-Verfügbarkeit, ... und man behandelt das Problem besser gleich disaggregiert, zumal auch die entsprechende Software (z.B. Biogeme) disaggregierten Input vorsieht.

1. Der Begriff der Verkehrsökonomie

1.4. Verwendete Symbole

Y	Abhängige bzw. erklärte bzw. endogene Variable. Bei Mehrgleichungsmodellen bekommen diese den Index k .
$x_m,$ $m = 1, \dots, M$	Unabhängige bzw. erklärende bzw. exogene Variablen
\mathbf{x}	Gesamtheit der exogenen Variablen, als Spaltenvektor geschrieben
$y_i, x_{mi},$ $i = 1, \dots, n$	Wert der abhängigen bzw. der m -ten unabhängigen Variablen bei der i -ten Messung bzw. dem i -ten Element der Stichprobe.
β_0	Achsenabschnitt (engl. <i>intercept</i>)
$\beta_j,$ $j = 1, \dots, J$	Lineare Anstiegsparameter
$\boldsymbol{\beta}$	Gesamtheit der Modellparameter, als Spaltenvektor geschrieben
$\hat{\beta}_j, \hat{Y}$	Das "Dach" ist ein Symbol für geschätzte Größen, also geschätzte Parameterwerte, exogene Variable des geschätzten Modells, etc.
ϵ	Ein additiver i.i.d. Zufallsterm mit Erwartungswert 0 und der Varianz σ^2
z_m, w	Transformierte exogene und endogene Variablen (mit dem Ziel, ein lineares Modell in den transformierten Variablen zu erhalten)
V_k	Deterministische Nutzenfunktion der Alternative k bei Wahlmodellen

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

Um neue Verkehrsprojekte seriös auf ihre verkehrliche Wirkung hin zu untersuchen, sind die Methoden der Verkehrsplanung unerlässlich. Die meisten der im Folgenden vorgestellten Konzepte wie Aktivitätenwahl, Zielwahl, Verkehrsmittelwahl und Routenwahl beziehen sich auf **Modelle der diskreten Wahltheorie**. Diese Modellklasse kommt in der Verkehrsökonomie häufig vor, während sich die klassische Ökonometrie hauptsächlich mit stetigen, meist linearen Modellen befasst. In dieser Vorlesung werden die Konzepte exemplarisch vorgestellt, während die eigentlichen Modelle in den Master-Vorlesungen vertiefend behandelt werden.

2.1. Definition und Ziele der Verkehrsplanung

Verkehrsplanung beinhaltet die **Analyse** und **Prognose verkehrlicher** Auswirkungen von (i) infrastrukturellen Änderungen, (ii) verkehrstechnischen Änderungen sowie (iii) Änderungen der Raumstruktur.

Infrastrukturelle Vorhaben beinhalten zum Beispiel:

- Neubau von Straßen, Autobahnen oder ÖV-Linien,
- Ausbau, Umbau, oder Rückbau von Straßen; Verdichtung oder Ausdünnung des Taktes von ÖV-Linien

Beispiele für verkehrstechnische Änderungen sind

- Verkehrsberuhigung, Verkehrsbeeinflussung, Tempo-30-Zonen,
- Änderungen in der Verkehrsführung, z.B. Einbahnstraßenregelungen,
- Einführung von Maut, höhere oder niedrigere Steuern auf Treibstoffpreise, höhere oder geringere Preise für ÖV-Fahrkarten
- Umwidmung bzw. Zulassung oder Sperrung bestimmter Strecken für Verkehrsmodi wie Kfz, Rad, Fußgänger oder ÖV, beispielsweise die Ausweisung von Fußgängerzonen.

Änderungen der Raumstruktur sind z.B. die Folgenden:

- Schaffung oder Rückbau von Wohnbezirken
- Planung neuer Einkaufszentren oder Freizeitattraktionen

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

- Planung neuer Industriegebiete.
- “Verkehr im Jahre 2020”: verkehrliche Folgen der Änderung der demografischen Struktur, der Technik, und des verkehrlichen Verhaltens: z.B. Verkehrsmittelwahl, Häufigkeit und Weite der Fahrten

2.1.1. Verkehrliche Auswirkungen

Fokus der Verkehrsplanung sind vor allem folgende *verkehrlichen* volkswirtschaftlichen Aspekte:

- Verkehrsqualität wie z.B. Zeitanteil der Überlastung und Staubildung auf einzelnen Strecken. Diese kann z.B. durch ein skalares Maß wie der Reisezeit oder den *Level of Service* (LOS) quantifiziert werden.
- Änderungen in den Reisezeiten für IV und ÖV-Teilnehmer für bestimmte Wegegruppen oder global,
- Änderungen des globalen **Modal Split**, d.h. die durchschnittliche Aufteilung auf die einzelnen Verkehrsarten bzw. **Verkehrsmodi** wie Schusters Rappen, Rad, PKW, LKW oder ÖV.
- Änderungen in den Sekundärfolgen von Verkehr wie Emissions- und Lärmbelastung.

Der wichtigste Gesichtspunkt bei den Zielen der Verkehrsplanung ist im Allgemeinen die Reisezeit. Rechnet man diese in Geld um (wobei meist zwischen höher gewichteten Berufsverkehr und sonstigen Verkehr unterschieden wird), können bedeutende volkswirtschaftliche Verkehrskosten entstehen. Dabei wird zwischen internen und externen Kosten unterschieden (siehe auch die [Webseite der Institutes für Verkehrsökologie der TU Dresden](#)):

- Die **internen Verkehrskosten** werden von den Verkehrsteilnehmern selbst getragen z.B. die Zeitkosten,¹
- Die **externen Kosten** werden auch von den Nichtverursachenden getragen: Erhalt der Straßeninfrastruktur (abzüglich Kfz- und Mineralölsteuer), Unfallkosten (abzüglich Kfz-Versicherungskosten), Lärm, Flächenbeanspruchung, Emission/Beitrag zum Treibhauseffekt).

Verständnisfrage:

Nehmen Sie an, dass im Mittel jede Person täglich nur 10 Minuten auf ÖV-Anbindungen wartet bzw. im Stau steckt und das man jede Stunde Wartezeit im Mittel mit 10 € verrechnet. Schätzen Sie die durch diese Wartezeiten resultierenden jährlichen Verkehrskosten in Deutschland ab!

¹Da die eigene Kfz-Fahrt i.d.R. auch zu längeren Zeiten bei anderen Verkehrsteilnehmern führen kann, kann man einen Teil der Zeitkosten auch als extern betrachten, zumindest, wenn man “externe Kosten” weiter auslegt als alle Kosten, die man nicht unmittelbar selbst bezahlen muss. Bei starken Verkehrsbeeinträchtigungen kann dieser Anteil durchaus die Verlängerung der eigenen Reisezeit deutlich übersteigen, wie in einer Aufgabe im Abschnitt “Verkehrsumlegung” gezeigt wird.

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

2.1.2. Prognose vs. Szenarien

Meist werden im Prognoseschritt der Verkehrsplanung verschiedene **Szenarien** untersucht. Ein Szenarium kann als eine *bedingte Prognose* aufgefasst werden, falls verschiedene Umstände eintreffen, welche man nicht im Rahmen der Planungsuntersuchung prognostizieren will bzw. welche man nicht seriös prognostizieren kann. Dies ist analog zu bedingten Prognosen des Klimas, welche z.B. in Form verschiedener Szenarien von IPCC herausgegeben werden.

Als Beispiel sei hier die Verkehrsplanung für das Projekt “Waldschlösschenbrücke” (vgl. Abb. 2.1) erwähnt: Es gibt hier zwei Szenarien:

- Prognose “Verkehr im Jahre 2015” ohne Waldschlösschenbrücke (Szenario 1),
- “Verkehr im Jahre 2015” mit Waldschlösschenbrücke (Szenario 2).

In Abbildung 2.1 ist das aus den beiden Szenarien hergeleitete “Differenznetz” dargestellt, d.h. die prognostizierte tägliche Verkehrsbelastung (**DTV, durchschnittlicher täglicher Verkehr**) mit Brücke abzüglich der DTV ohne Brücke. Bei Großprojekten mit langfristigen Auswirkungen wie dem der Waldschlösschenbrücke muss man bei der Prognose nicht nur den infrastrukturellen Aspekt (Brücke samt Zufahrtsstraßen oder keine Brücke), sondern auch die durch die Entwicklung der Altersstruktur sich verändernde Raumstruktur.

Neben der Verkehrsplanung gibt es weitere Verfahren, bei denen Planung und Modellierung von Verkehr eine Rolle spielt:

- Die **Transportplanung** als Teilgebiet der Logistik unterscheidet sich von der Verkehrsplanung durch ihren Zweck: Güterströme einer bestimmten Firma sollen optimiert werden; der Verkehr spielt nur als (meist störende) Randbedingung eine Rolle,
- Die **Verkehrsflussmodellierung** untersucht die Verkehrsdynamik auf viel kleineren Zeitskalen als die Verkehrsplanung (vgl. Abb. 2.2): Dabei wird entweder der Verkehr in Analogie zu hydrodynamischen Strömen beschrieben oder direkt die Dynamik einzelner Fahrzeuge beschrieben. Die Zeitskalen reichen von 1 s (Reaktionszeit, Folgezeit) über Bruchteile von Minuten (Beschleunigungs- und Abbremsvorgänge) bis zu einer oder mehrerer Minuten (Ampelphasen in der Stadt; Stop-and-Go Verkehr auf der Autobahn, Stauausbreitung). Die kleinste Zeiteinheit der Verkehrsplanung ist hingegen meist eine Stunde. Diese Einheit ist durch die **Tagesganglinien** definiert, welche in Abschnitt 3.6 erläutert werden. In den meisten Berechnungsschritten der Verkehrsplanung ist die Standard-Zeiteinheit sogar ein ganzer Tag.

2.2. Planungsgebiet und Bezirke

Da man nicht die ganze Welt modellieren kann, das Planungsgebiet aber einschließlich des Kontakts mit der “Außenwelt” hinreichend genau modelliert werden soll, umgibt man

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

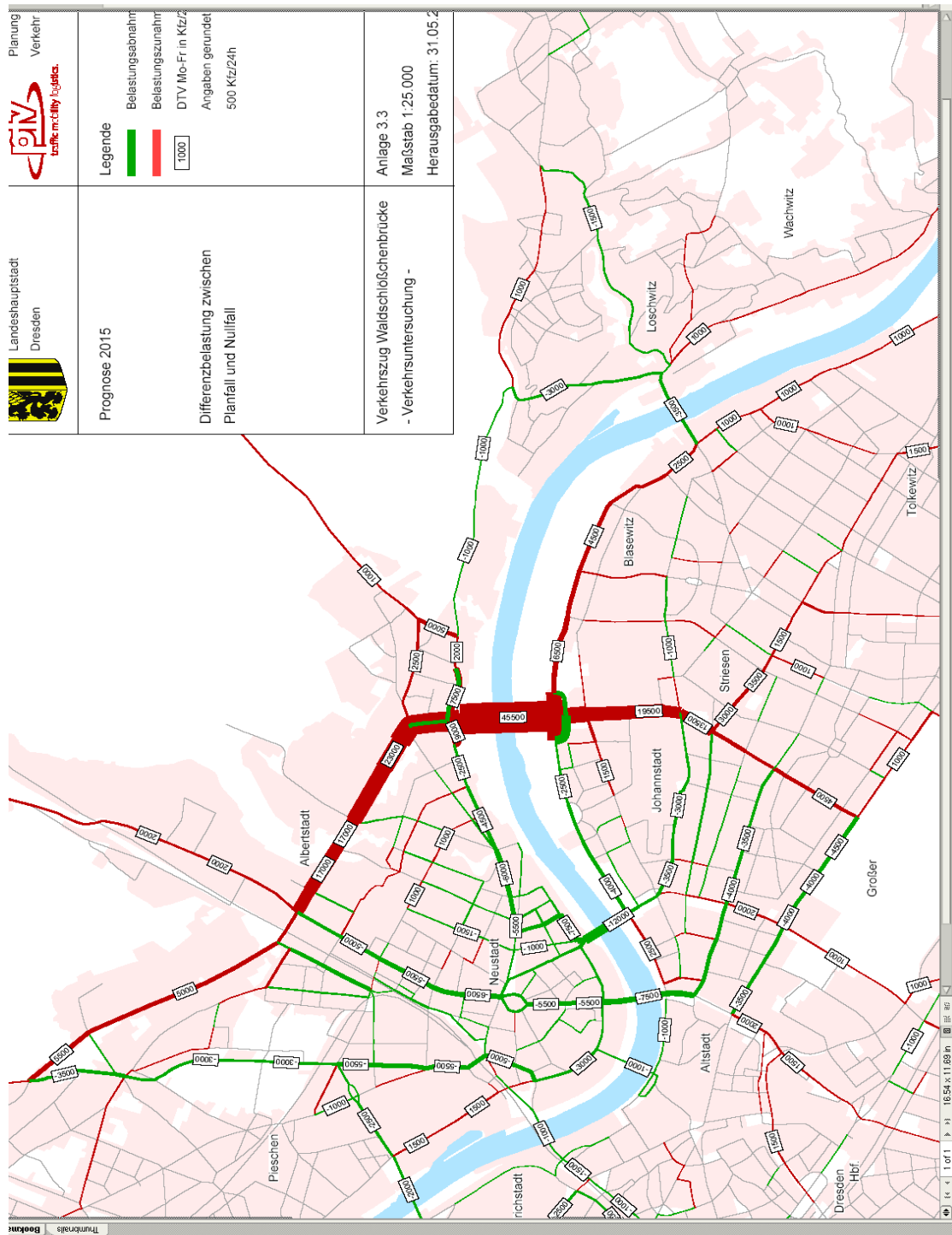


Figure 2.1.: Szenarien (bedingte Prognosen) des Verkehr in Dresden im Jahre 2015 mit und ohne die geplante Waldschlößchenbrücke. Die Zahlen geben die Differenz ("Mit"-Fall abzüglich "Ohne"-Fall) der täglich die jeweilige Strecke in beide Richtungen passierenden Fahrzeuge (durchschnittlicher täglicher Verkehr, DTV) an.

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

Zeitskala	Verkehrlicher Aspekt	Modelle	Beispiele	Gebiet
0.1 s	Antrieb, Bremse, ESP etc.	sub- mikroskopisch	PELOPS	Fahrzeug- dynamik
1 s	Reaktionszeit Fahrzeug-Folgezeit	↑ Fahrzeugfolge- modelle (mikroskopisch)	PTV- VISSIM IDM, OVM	Verkehrs- dynamik
10 s	Zeit zum Beschleunigen, Bremsen	↑ fluid- dynamische modelle		
1 min	ÖV: Haltezeit Umlaufzeit (LSA)	↑ (makros- kopisch)		
10 min	IV: Periode Stop-and-Go- Verkehr ÖV: Taktzeit	↓		
1 h	"Zeitscheibe" einer Tagesganglinie	↑ Umlegungs- modelle	PTV-Visum	Verkehrs- planung
1 Tag	Bezugstag (Sa, So, Werktag)	↓ Nachfrage- modellierung		
1 Jahr	Umsetzung verkehrstechnischer Maßnahmen	↓ (Erzeugung, Verteilung, Aufteilung)	PTV-Viseva	
5 Jahre	Umsetzung Infrastruktur- Maßnahmen Änderung der Raumstruktur	↓		
50 Jahre	Demografie, z.B. "Mobilität im Alter"	Statistik: Modellgestützte Prognose	Alterspyramide (stat. Bundesamt)	

Figure 2.2.: Abgrenzung der Verkehrsplanung von der Verkehrsdynamik und Fahrzeugdynamik.

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

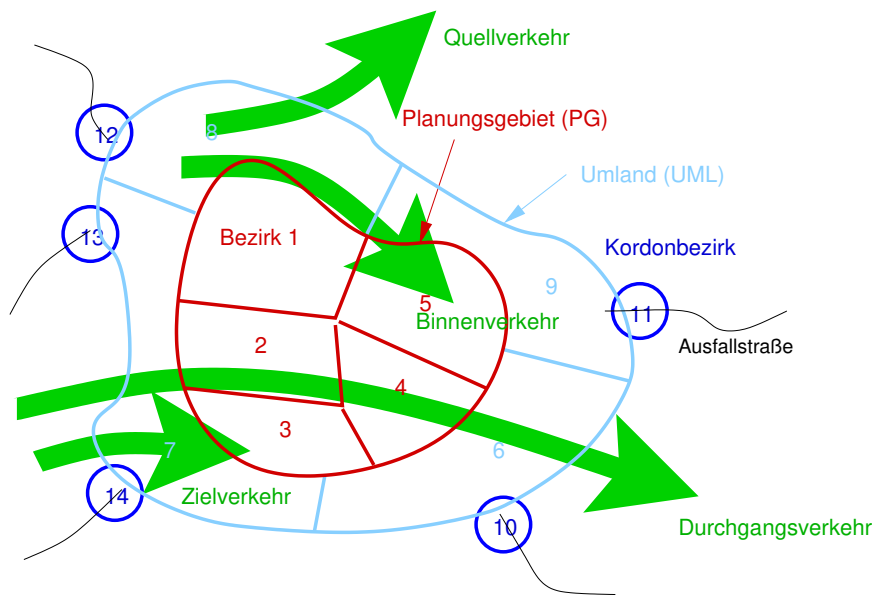


Figure 2.3.: Untersuchungs- und Planungsgebiet mit einzelnen Verkehrsbezirken und Verkehrsarten bezüglich der Abgrenzung des Untersuchungsgebietes.

das eigentliche **Planungsgebiet** (PG) mit einem gröber modellierten **Umland** (UML), an welches die Außenwelt angrenzt und welche zusammen auch als **Untersuchungsgebiet** bezeichnet werden (Abb. 2.3).

Sowohl das Planungsgebiet als auch das Umland sind in einzelne **Verkehrsbezirke** aufgeteilt, im Planungsgebiet feiner und im Umland gröber. Der Kontakt des Untersuchungsgebietes mit der Außenwelt, also der ein- und ausfließenden Verkehr an allen wichtigen Ausfallstraßen, wird durch weitere “fiktive Pförtnerverkehrsbezirke”, sog. **Kordonbezirke** modelliert. Die Kordonbezirke sind “fiktive” oder “virtuelle” Bezirke, da die diesen Bezirken zugeordnete Raumstruktur keiner realen entspricht, sondern vielmehr so gewählt wird, dass der erzeugte Verkehr im Tagesgang den Querschnittsmessungen entspricht, die an den Ausfallstrecken möglichst vorliegen sollten. Bei der Definition und Auswahl der Bezirke geht man gemäß folgenden Kriterien vor:

- Die Größe hängt von der Art der Untersuchung ab und wird nach oben dadurch begrenzt, dass innerbezirklicher Verkehr i.A. sehr ungenau oder gar nicht abgebildet werden kann (z.B. bei der Umlegung). Damit sind Stadtteile auch bei sehr weiträumigen Untersuchungen (z.B. Planen einer neuen Autobahn oder eines Stadtrings) i.A. zu groß.
- Strukturell möglichst homogen, z.B. sind ein Gewerbegebiet, eine Wohnsiedlung oder ein innerstädtisches Viertel geeignete Kandidaten.
- Von den Bezirken müssen Raumstrukturdaten (s.u.) wie Zahl der Einwohner,

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

Erwerbstätige, Kinder, Zahl der Arbeitsplätze, Schulen etc. verfügbar sein. Die kleinste Gebietseinheit, bei der zumindest die Statistik der Bevölkerungsstruktur vorliegt (Einwohnerzahl, Alters- und Geschlechtsstruktur) sind sog. **statistische Bezirke**, die nächstgrößere sind **statistische Stadtteile** (Abb. 2.4).

- Idealerweise sind die Bezirke voneinander deutlich abgegrenzt, z.B. durch Flüsse, Bahnstrecken oder unbesiedelte Gebiete.

Bei der **Bezirksgröße** bzw. der Zahl der Bezirke muss man abwägen zwischen hinreichender Genauigkeit und vertretbarem Aufwand:

- Da der gesamte *Binnenverkehr* innerhalb der Bezirke in der Regel unter den Tisch fällt, sollte die Bezirksgröße deutlich kleiner sein als die Länge der meisten Wege,
- Macht man die Bezirke aber zu klein, steigt der Aufwand immer mehr an, während durch das dann notwendige Schätzen von fehlendem Datenmaterial die Genauigkeit nicht weiter zunimmt.

Zu bemerken ist noch, dass für statistische Bezirke i.A. nur die Personenstruktur, nicht aber Strukturmerkmale wie z.B. die Zahl der Arbeitsplätze bekannt sind. Diese sind anhand von Ortskenntnis oder durch einfaches Herunterskalieren proportional zur Einwohnerzahl zu schätzen. Generell führt jedoch eine feinere Bezirkseinteilung und die damit notwendige Schätzung einiger Raumstrukturen, selbst im Falle eines blinden Herunterskalierens anhand der Personenzahlen, zu besseren Ergebnissen als eine Vergrößerung der Bezirkseinteilung auf Einheiten mit bekannter Raumstruktur.

2.3. Beschreibung der Raumstruktur

Nach der Definition des Untersuchungsgebiets und der Verkehrsbezirke sind die eigentlichen Eingangsgrößen der Verkehrsnachfragemodellierung die jedem Bezirk zugeordneten **Raumstrukturdaten**. Diese spalten sich auf in Bevölkerungsmerkmale und Strukturmerkmale.

- **Bevölkerungsmerkmale** sind die Einwohnerzahl und disaggregierte Untergruppen davon wie Zahl der Erwerbstätigen, Schüler, (Klein-)Kinder, Rentner. In sehr detaillierten Modellen wird sogar die Altersstruktur berücksichtigt.
- **Raumstrukturmerkmale** beschreiben Anziehungspunkte von Verkehr, welcher nicht die eigene Wohnung/das eigene Haus zum Ziel hat, z.B. Zahl der Arbeits- und Schulplätze, Zahl der Plätze in Kindereinrichtungen, Unis (nach Zahl der Studierenden quantifiziert), Kneipen (nach Sitzplatzzahl quantifiziert), Quadratmeterzahl an Einkaufsfläche, geeignet quantifizierte Freizeitmöglichkeiten usw.

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

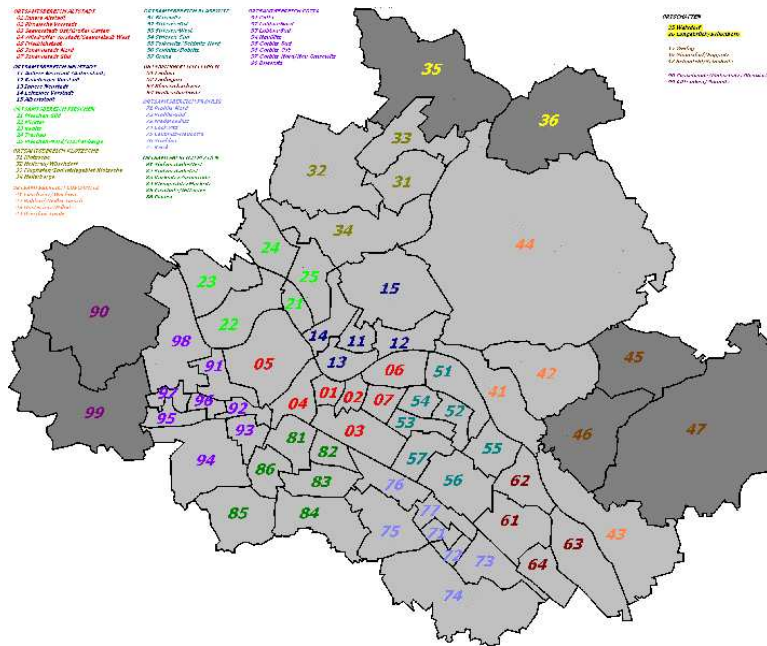


Figure 2.4.: Statistische Stadtteile von Dresden. Im Allgemeinen ergeben mehrere statistische Bezirke einen statistischen Stadtteil und mehrere statistische Stadtteile einen umgangssprachlichen Stadtteil (wie “Neustadt”).

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

2.4. Beschreibung von Verkehrsflüssen

2.4.1. Ortsveränderungen und Wege

Während bei der hier vorgestellten Methodik der Verkehrsplanung der Verkehrsbezirk die grundlegende Einheit der statischen Struktur (=Raumstruktur) ist, spielt die **Ortsveränderung** bzw. der **Weg** diese Rolle für die Verkehrsströme:

Eine **Ortsveränderung** im Sinne der Verkehrsplanung ist jede Bewegung (von Personen oder Gütern) zwischen einem Ausgangs- und einem unterschiedlichen Zielpunkt, welche im öffentlichen Verkehrsraum stattfindet.

Ein **Weg** ist eine *zweckgebundene* Ortsveränderung, d.h. er dient dazu, um zwei **Aktivitäten**, z.B. Arbeiten, Wohnen oder Einkaufen, zu verbinden

Anmerkungen

- Bloßes “Um den Block spazieren” stellt keinen Weg im Sinne obiger Definition dar, wohl aber eine Ortsveränderung. Da Ortsveränderungen aber unterschiedliche Quellen und Ziele implizieren, wird bei Rundwegen wie dem obigen ein markantes Zwischenziel als “Wendepunkt” definiert und Rundwege damit durch zwei Ortsveränderungen beschrieben
- Beide Definitionen werden parallel verwendet werden. Beispielsweise verwendet die ‘Dresdner Schule’ in den Erhebungen im Rahmen des *Systems relevanter Verkehrsbefragungen* (SrV) die Ortsveränderung als elementare Einheit, während die von westdeutschen Instituten initiierte Untersuchungsreihe *Mobilität in Deutschland* (MiD) auf der Weg-Definition beruht.
- Formal kann man beide Definitionen konsistent machen, indem man Wendepunkte und Platzhalter-Aktivitäten definiert, z.B. beim schon erwähnten “Weg um den Block” eine Aktivität “Freizeitbeschäftigung” am Wendepunkt.
- Sowohl Ortsveränderungen als auch Wege können i.A. unter Benutzung mehrerer Verkehrsmittel zurückgelegt werden. Zur Vereinfachung wird aber meist *ein* Verkehrsmittel, nämlich das hauptsächlich benutzte, zugeordnet.
- Mit Fahrzeugen (Rad, Kfz, ÖV) zurückgelegte Ortsveränderungen/Wege werden auch als **Fahrten** bezeichnet.

2.4.2. Weitere wichtige Begriffe

Die Ausgangspunkte (Quellen) und die Ziele von Ortsveränderungen/Wege/Fahrten sind sogenannte *Aktivitäten*, welche man allgemein folgendermaßen definieren kann:

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

Eine **Aktivität** ist eine Interaktion mit Menschen oder Umwelt bei gleichbleibenden räumlichen Umfeld und sozialer Konstellation

Beispiele sind Wohnen (räumlichen Umfeld: zu Hause; soziale Konstellation: Die Familie), Einkaufen (räumlichen Umfeld: Der Laden; soziale Konstellation: Personal und andere Kunden), Arbeiten, Sport treiben, eine Kneipe/ein Kino besuchen usw.

Berücksichtigt man in der engeren Auslegung von Ortsveränderungen nur "Wege", also *zweckgebundene* Ortsveränderungen, dann schränkt man konsistent dazu Aktivitäten als *bedeutungsvolle* Interaktionen ein.²

Im Verlauf eines Tages führt man i.A. mehrere Aktivitäten durch, die durch Wege/Ortsveränderungen verbunden werden. Dies bezeichnet man auch als **Aktivitätenkette** bzw. **Wegekette**.

Jede Ortsveränderung kann je nach *Ziel*-Aktivität bzw. **Wegezweck** in unterschiedliche Verkehrsarten eingeteilt werden, z.B. **Berufsverkehr** (Ziel: Arbeitsstätte/Arbeiten), **Heimatverkehr** (Ziel: Eigene Wohnung/eigenes Haus), **Ausbildungsverkehr** (Ziel: Schule/Universität), **Geschäftsverkehr** (Wege im Rahmen der Berufsausübung, welche weder Berufs- noch Heimatverkehr sind), **Einkaufsverkehr**, **Freizeitverkehr**, und **Urlaubsverkehr**.

Eine alternative Einteilung in sog. **Quelle-Ziel-Gruppen** behandelt die Quell- und Ziel-Aktivitäten gleichberechtigt, d.h. neben dem Ziel ist auch die Quelle wichtig. Beispielsweise wird der Berufsverkehr weiter aufgeteilt in die Kategorien "Wohnen-Arbeit", "Einkaufen-Arbeit" und "Sonstiges-Arbeit" und der Heimatverkehr in "Arbeit-Wohnen", "Einkaufen-Wohnen" usw. Dabei werden weniger wichtige bzw. seltene Quelle-Ziel-Kombinationen jeweils zu "Sonstiges" zusammengefasst. Diese Einteilung wird in Abschnitt 3.3 ausführlich behandelt.

Jede Ortsveränderung kann man unabhängig von bzw. zusätzlich zu den obigen Einteilungen auch als Funktion der Abgrenzung des Untersuchungsgebietes einer der folgende vier Verkehrsarten zugeordnet (vgl. Abb. 2.3): **Binnenverkehr**, **Quellverkehr**, **Zielverkehr** und **Durchgangsverkehr**.

Schließlich kann man den Verkehr auch zeitlich aufgliedern, z.B. in Werktagsverkehr, Samstagverkehr und Sonntagverkehr. Für die Verkehrsplanung ist außerdem die Aufspaltung der üblicherweise auf einen (Werk-)tag bezogenen Verkehrsströme in Stundenanteile, den sog. **Zeitscheiben**, wichtig, welche zusammen die sog. **Tagesganglinie** bilden. Idealerweise disaggregiert man zuvor den Verkehr gemäß den Ziel-Aktivitäten- bzw. Quelle-Ziel-Gruppen, da jede Gruppe ihre charakteristische Tagesganglinie aufweist (vgl. Abb. 2.5)

Schließlich ist zur Bewertung der Lagegunst bzw. Attraktivität eines Standortes auch noch das Umfeld wichtig, welches innerhalb einer gegebenen maximalen Reisezeit erreichbar ist. Dieses Umfeld bzw. Gebiet wird durch die **Isochronen** begrenzt. Die

²Hier ist eine gewisse Willkür nicht zu vermeiden. Formal kann man auch eigentlich ziellosen Ortsveränderungen wie das schon erwähnte "Um den Block gehen" eine Aktivität verpassen, z.B. "Am Wendepunkt 10 Sekunden in die Luft gucken". Noch schwieriger wird es bei Ortsveränderungen, bei denen "der Weg das Ziel" ist, z.B. einer abendlichen Rad-Rundtour aus Trainingszwecken. Hier sind Wege/Ortsveränderungen und Aktivität identisch, wo doch eigentlich die ersteren letztere verbinden sollen!

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

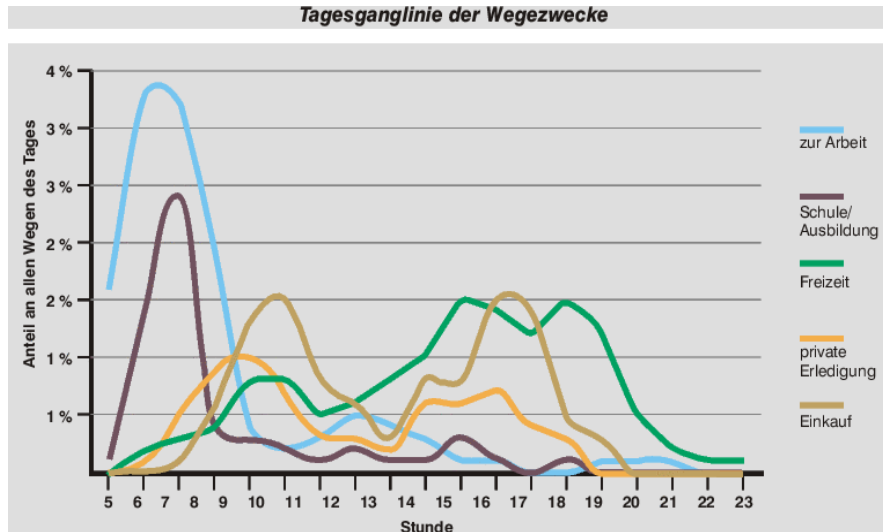


Figure 2.5.: Tagesganglinien für verschiedene Ziel-Aktivitäten aus der SrV-Verkehrserhebung (System relevanter Verkehrserhebungen, 2003)

Isochronen hängen dabei vom Standort, vom Verkehrssystem und (vor allem bei ÖPNV) auch explizit von der Zeit ab (vgl. Abb. 2.6)

2.5. Methodologisches Vorgehen der TVPL

Das Vorgehen erfolgt in den meisten Fällen nach dem klassischen **Vier-Schritte-Schema** Erzeugung - Verteilung - Aufteilung - Umlegung (vgl. Abb. 2.7):

- Die **Erzeugung** (engl: *Trip generation*) benötigt als Eingabegrößen die Bezirkseinteilung samt zugeordneter Raumstruktur und ergibt für jeden Bezirk i die Quellsummen $Q_i^{(g)}$ und Zielsummen $Z_i^{(g)}$, also die insgesamt von den Bezirken ausgehenden bzw. einfließenden Verkehrsströme, ggf. getrennt nach Ziel-Aktivitäten oder Quelle-Ziel-Gruppen g .
- **Die Verteilung** (engl: *Trip distribution*): bestimmt zu jeder (durch $Q_i^{(g)}$ beschriebenen) Quelle die zugehörigen Ziele und zu jedem (durch $Z_i^{(g)}$ beschriebenen) Ziel die Quellen $V_{ij}^{(g)}$, ergibt also die durch die Verkehrsstrommatrix beschriebenen Wege/Ortsveränderungen.
- In der **Aufteilung**: (engl: *Modal split*) werden jedem durch V_{ij} definierten Weg von Bezirk i nach Bezirk j die Verkehrsmittelanteile ("Modi") zugeordnet, man erhält also Verkehrsströme V_{ijk} von i nach j mit Verkehrsmittel k (z.B. Kfz, Rad, ÖPNV, zu Fuß): $V_{ijk}^{(g)}$.

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

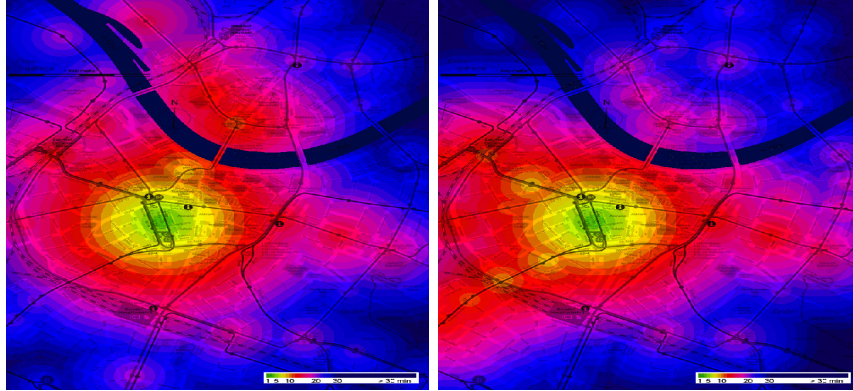


Figure 2.6.: Isochronen mit Ausgangspunkt Dresden-Postplatz unter Berücksichtigung der ÖPNV-Fahrpläne (Sommer 2006) und der Fußwege. Das linke Bild ist für 15:02 und das rechte für 20:50. Es gibt auch einen [Film für den Zeitraum zwischen 0 h und 12 h.](#) (Ersteller von Bild und Video: Matthias Müller; Wiedergabe mit freundlicher Genehmigung)

- In der **Umlegung**: (engl: *Network assignment*) wird schließlich für jeden Weg und jedes Verkehrsmittel in Abhängigkeit der Zeit (Zeitscheibe t) eine Route im Streckennetzwerk gesucht, was letztendlich zu einer Verkehrsbelastung oder **“Belegung”** $M_l(t)$ des Elements l in Zeitscheibe t führt. Die Streckenbelastung kann z.B. in Fahrzeuge pro Stunde auf dem Streckenabschnitt l angegeben werden (siehe Abb. 2.1) oder im Falle des öffentlichen Verkehrs als Zahl der ÖV-Passagiere in dieser Stunde auf Abschnitt l zwischen zwei Haltestellen. Im Falle des meist wichtigsten Modus, des Kfz-Verkehrs, kann man die Belegung letztendlich durch Querschnittsdetektoren (Fahrzeugzählung) messen und die Modelle damit kalibrieren.

Zu beachten ist die doppelte Rückkopplung: Zunächst hängt der (zeitlich) kürzeste Weg, also die Routenwahl für ein gegebenes Verkehrsstrommatrizelement, von der aktuellen Verkehrsbelastung ab, so dass man innerhalb eines Umlegungsschrittes iterieren muss (innere Rückkopplungsschleife). Des Weiteren hängen auch die Wege selbst, also die Verteilungs- und Aufteilungsschritte, vom Streckennetz und seiner Belastung ab, so dass das Umlegungsergebnis auch auf die Verteilung rückkoppelt (äußere Rückkopplungsschleife). Diese Rückkopplungen sind in Abb. 2.7 durch roten Pfeile gekennzeichnet.

Schließlich sind Verteilung und Aufteilung in dem Sinne aneinander gekoppelt, dass man für die Verteilungsrechnung eigentlich das Ergebnis der Aufteilung und umgekehrt benötigt. Dieses Problem wird durch die **simultane Ver- und Aufteilung** gelöst.

Der ersten Schritte dieses 4-Stufen-Verfahrens (Verkehrserzeugung) beschreibt die **Nachfragemodellierung**, während in den nachfolgenden Schritten die Nachfrage (Verkehrsstrommatrix, Streckenbelastung) an das Angebot (die durch Straßen, Gehwege und das ÖV-Angebot charakterisierte Infrastruktur) angepasst wird. Dabei ist, wie in der sonstigen

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

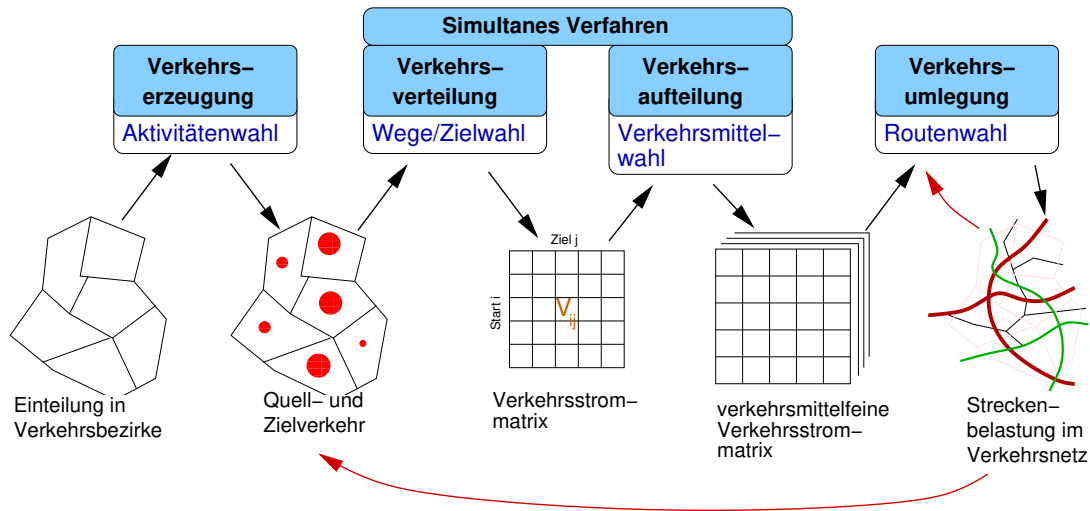


Figure 2.7.: Die 4 Schritte des klassischen Prozesses der Verkehrsplanung.

Wirtschaft, die Nachfrage vom Angebot abhängig, was z.B. die Problematik des **induzierten Verkehrs** zur Folge hat.

Das Beispiel in Abb. 2.8 soll verdeutlichen, dass das Ergebnis einer geplanten verkehrlichen Maßnahme völlig gegenintuitiv sein kann, aber mit den Mitteln der Verkehrsplanung prognostiziert werden kann, so dass teure Fehlplanungen vermieden werden können. Man könnte z.B. auf die Idee kommen, die in dieser Abbildung dargestellte Verkehrssituation mit einer hohen Nachfrage von Bezirk bzw. Knotenpunkt A nach B, welche bisher nur über die Routen 1 und 2 befriedigt werden kann, durch den Bau einer dritten Brücke (gestrichelt) zu verbessern. Nicht in allen Fällen wäre dies eine gute Entscheidung. Im Extremfall tritt sogar das Paradoxon auf, dass die Verkehrssituation durch die neue Brücke *verschlimmert* wird, so dass deren Bau definitiv keine sinnvolle Maßnahme wäre. In jedem Fall erlaubt die Verkehrsplanung eine quantitative Beurteilung des Nutzens und damit eine seriöse Kosten-Nutzen-Analyse.

2.6. Einige Gedanken zur mathematischen Modellierung

Pantha rhei (alles fließt)

Heraklit

Ein Grundprinzip der mathematischen Modellierung ist es, Modellparameter von den Input-Daten zu unterscheiden. Dabei handelt es sich um zwei methodologisch völlig unterschiedlichen Kategorien von Informationen:³

- Modellparameter, bei Modellen der Verkehrsplanung auch **Mobilitätsparameter**

³Im Kontext von Naturwissenschaften entspricht die erste Kategorie den "Naturkonstanten", die zweite Kategorie den "Anfangsbedingungen".

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

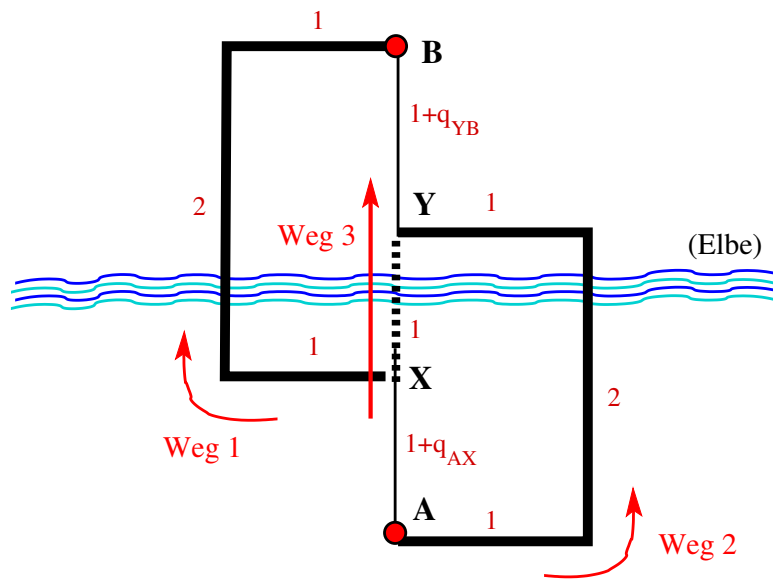


Figure 2.8.: Umlegung der Verkehrsnachfrage Q_{AB} von A nach B. Was geschieht nach Bau der Brücke?

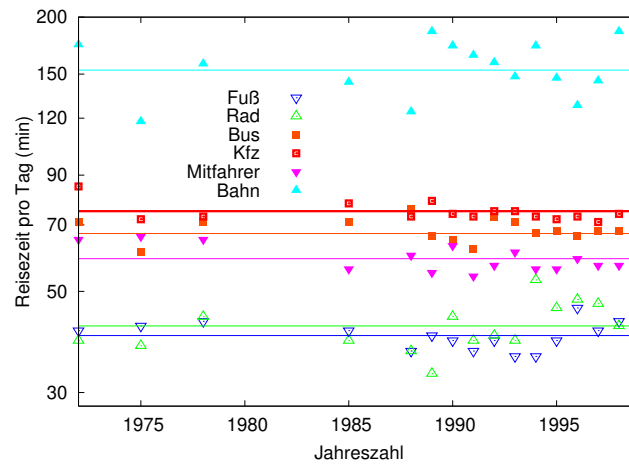


Figure 2.9.: Die Mittelwerte der täglichen Reisezeiten für verschiedene Verkehrsmodi (aus den statistischen Daten der UK National Travel Survey, 1972-98, nach R. Kölbl and D. Helbing (2003), New Journal of Physics 5, 48.1-48.12.) In anderen Ländern wird ein leichter Anstieg des täglichen Reisezeitbudgets beobachtet.

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

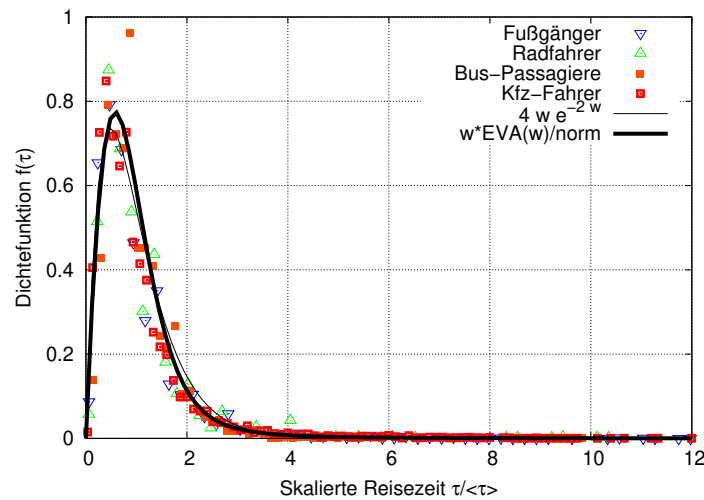


Figure 2.10.: Dichtefunktion der Verteilung des täglichen Gesamt-Reisezeitbudgets τ_k für die verschiedene Verkehrsmodi k . Die Kurven sind für jedes Verkehrsmittel auf den jeweiligen Erwartungswert skaliert (vgl. Abb. 2.9), mit z.B. $E(\tau)_{\text{Fuß}} \approx 40$ min und $E(\tau)_{\text{Kfz}} = 75$ min. (Nach R. Kölbl and D. Helbing (2003), New Journal of Physics 5, 48.1-48.12.)

oder **Kennwerte** genannt, charakterisieren das *allgemeine Verhalten des Untersuchungsgegenstandes*. Bei Verkehrsplanungsmodellen beschreiben sie das *allgemeine Mobilitätsverhalten*, z.B. Häufigkeit bestimmter Fahrten pro Bezugspersonenzahl und Zeiteinheit, mittlere Reisezeiten, oder die relative Präferenz verschiedener Verkehrsmittel. Mobilitätsparameter sollten weitgehend unabhängig von der Größe und Ausprägung des konkret zu untersuchenden Systems sein, günstigstenfalls auch über Jahrzehnte nahezu konstant.

Um diesen Ziel noch näher zu kommen, wird in vielen Ansätzen, z.B. im in den folgenden Kapiteln besprochenen Kennwertmodell, der Verkehrsstrom in bezüglich Umfang, Reiseweite und Zeitcharakteristik möglichst *verhaltenshomogene Nutzergruppen* disaggregiert, z.B. in die in folgendem Abschnitt zu besprechenden *Quelle-Ziel-Gruppen*.

- **Input-Daten** beschreiben die *speziellen Eigenschaften des konkret zu untersuchenden Systems*. Im Verkehrsplanungs-Kontext sind dies z.B. Größe und Struktur des Untersuchungsgebietes, z.B. **Bevölkerungsmerkmale** wie Einwohnerzahl, Zahl der Erwerbstätigen, Kinderanzahl etc, aber auch **Strukturmerkmale** wie Zahl der Arbeits- und Schulplätze, Zahl der Kneipen, Quadratmeterzahl an Einkaufsflächen sowie, und schließlich das konkret vorhandene Verkehrsnetz

Abb. 2.9 zeigt, dass z.B. die täglichen Reisezeiten τ über Jahrzehnte weitgehend konstant sind. Die Abbildung gilt für England, wo keinerlei signifikante Änderungen festzustellen

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

sind. In den meisten anderen Ländern wurde ein Anstieg zwischen 0.1 % pro Jahr und 0.5% pro Jahr festgestellt⁴, was jedoch weitaus "konstanter" ist als etwa die mittlere Reiseweite bzw. Geschwindigkeit, deren relative Anstiegsraten etwa das Zehnfache betragen. Selbst vor einem Jahrhundert (!) war die mittlere Reisezeit in den USA (etwa 60 Minuten, nahezu ausschließlich zu Fuß) vergleichbar mit der heutigen (etwa 80-90 Minuten). Während die Frage eines konstanten Reisezeitbudgets mitunter kontrovers diskutiert wird, ist sie doch als Mobilitätsparameter für die im Folgenden zu besprechenden Modelle der Verkehrsplanung zweifellos geeigneter als die Reiseweite, vor allem, wenn man sie in Abhängigkeit von verschiedenen Personengruppen (z.B. Berufstätige/Rentner, Besitzer und Nichtbesitzer von Kfz) definiert. Sie macht z.B. die Aussage, dass die Verkehrsleistung deutlich zunehmen wird, wenn der Flugverkehr an Bedeutung gewinnt.

Eine weitere zeitlich nahezu konstante Größe und damit ein guter Mobilitätsparameter ist die *Mobilitätsrate* (globales spezifisches Verkehrsaufkommen), welche je nach Personengruppe 3 bis 4 Wege/Tag beträgt. Damit sind auch die Zeiten *pro Weg* nur schwach verkehrsmittel- und zeitabhängig. Die *Verteilung* der Reisezeiten gehorcht ebenfalls einer weitgehend universellen Funktion (Abb. 2.10), was Parameter für eine Reisezeitverteilung (insbesondere in Logit-artigen Modellen) ebenfalls zu wichtigen Mobilitätsparametern macht.

Eine noch universellere Größe als die Reisezeit pro Fahrt oder die tägliche Reisezeit wäre der Aufwand, gemessen in Einheiten des physiologischen Energiebedarfs. Diese ist, wie eine Untersuchung von Helbing und Kölbl zeigt, für alle Verkehrsmodi in etwa gleich. Da z.B. Radfahren anstrengender ist als Bahnfahren, entspricht das der Tatsache, das mit dem Rad zurückgelegte Wege tendenziell zeitlich kürzer sind als ÖV-Wege (vgl. Abb. 2.10). Da der "Energieaufwand" aber nicht das Kriterium der leichten Messbarkeit erfüllt und außerdem eher unanschaulich ist, ist dennoch die Reisezeit die geeignetste Größe, um den Aufwand zu beschreiben.

Verständnisfrage:

Warum ist die *Reiseweite* (in km) kein günstiger Mobilitätsparameter? Unter welchen Umständen sind *Tagesganglinien*, die den Zeitverlauf des Verkehrsnachfrage innerhalb eines Tages beschreiben, sinnvolle Mobilitätsparameter? Welcher der drei möglichen Mobilitätsparameter ist i.d.R. am aussagekräftigen: (i) Zahl der Einkaufsfahrten pro Person und Tag; (ii) Zahl der Einkaufsfahrten pro Laden; (iii) Zahl der Einkaufsfahrten pro m² Ladenfläche?

Verständnisfrage:

Was wäre bei strikter Gültigkeit eines konstanten Reisezeitbudgets die Konsequenz einer Zunahme von Verkehrsstaus: (i) steigender Kraftstoffverbrauch, (ii) konstanter Kraftstoffverbrauch, oder (iii) sinkender Kraftstoffverbrauch?

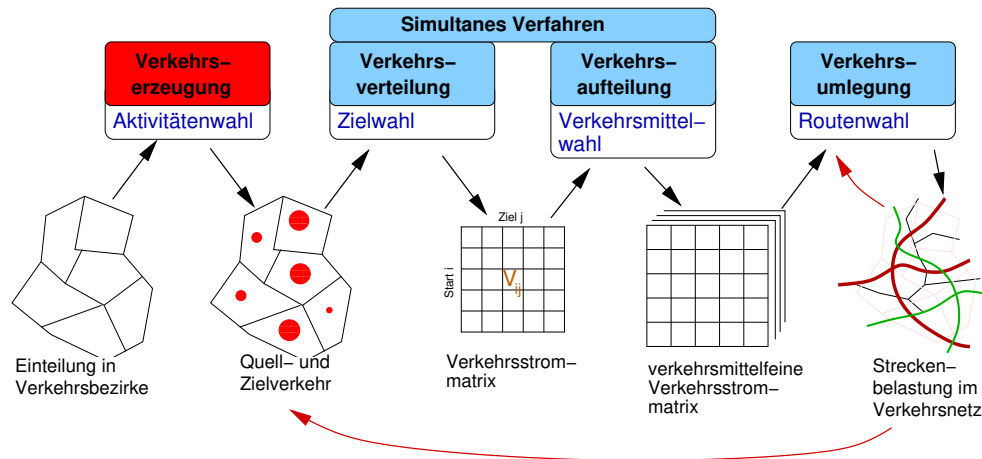
⁴Beispielsweise im Rahmen der Verkehrserhebung SrV

2. Allgemeines zur Verkehrsplanung

Nur dadurch, dass man von der konkret zu simulierenden Situation weitgehend unabhängige Größen “herauskristallisiert”, erhält man ein Modell mit prädiktivem Wert: Will man z.B. den Verkehr nach Neubau eines Gewerbegebietes prognostizieren, wendet man das Modell mit denselben Mobilitätsparametern an, die die gegenwärtige Situation am besten beschreiben. Diese Parameterwerte werden einmalig durch Vergleich der Modellaussagen mit der beobachteten Wirklichkeit, der sog. **Kalibrierung**, ermittelt. Das neue Szenario wird einzig und allein durch geänderte Input-Daten bei konstanten Mobilitätsparametern beschrieben.

Grundsatz der mathematischen Modellierung: Trenne die Input-Daten von den Modellparametern. Die Modellparameter sollten möglichst konstant und die Input-Daten möglichst gut messbar oder ermittelbar sein!

3. Verkehrserzeugung



3.1. Allgemeines

Das Ziel der **Verkehrserzeugung** ist die Bestimmung der von jedem Verkehrsbezirk ausgehenden Verkehrsströme, der **Quellsumme** Q_i und der zu jedem Bezirk hingehenden Verkehrsströme, der **Zielsumme** Z_j , gemessen in Wegen pro Bezugszeitraum, üblicherweise Wegen pro Tag. Bei der Quellsumme ist es dabei irrelevant, wo die Fahrten hingehen, während bei der Zielsumme die Herkunft nicht interessiert. Diese **Verkehrstrommatrix** V_{ij} von i nach j , welche die Quellen im Bezirk i mit den Zielen im Bezirk j verknüpft, wird erst im nächsten Planungsschritt der **Verkehrsverteilung** ermittelt.

3.2. Kennwertmodell der Erzeugung

Bei einem **Kennwertmodell** werden die in Abschnitt 2.6 diskutierten grundsätzlichen Überlegungen konsequent angewandt, d.h. die Nachfrage in verhaltenshomogene Schichten disaggregiert und damit die Modellierung nach System- bzw. Input-Daten und Mobilitätsparametern ("Kennwerte") unterschieden.

Die Input- bzw. Systemdaten der Erzeugung sind die **Raumstrukturdaten** (vgl. Abb. 3.2), welche sich je nach Bezirk stark unterscheiden können. Zwischen den Raumstrukturdaten und dem Verkehrsfluss vermitteln die **Mobilitätsparameter**, im hier vorgestellten Modell auch **Kennwerte** genannt. Sie beschreiben das allgemeine quell- und zieleitige Mobilitätsverhalten, weitgehend *unabhängig* vom konkreten Bezirk. Diese

3. Verkehrserzeugung

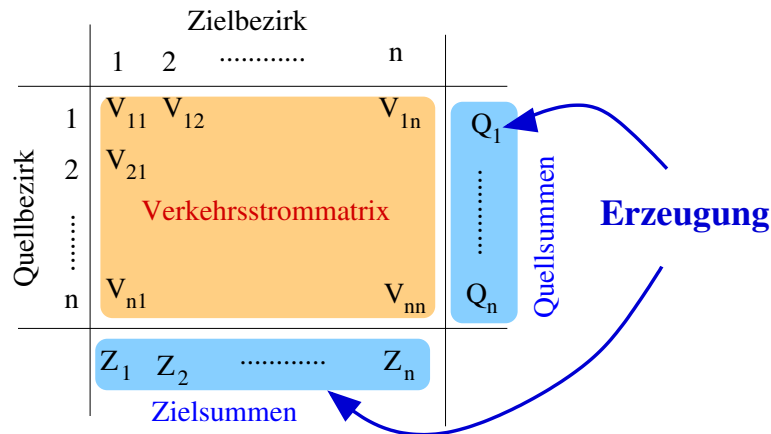


Figure 3.1.: Die Verkehrserzeugung bestimmt die Quell- und Zielsummen der verkehrsstrommatrix.

Unabhängigkeit wird in drei Stufen erreicht:

1. **Unabhängigkeit von der Größe der Bezirke.** Dies wird durch die Definition der Mobilitätsparameter als **spezifische Größen** definiert, z.B. als Fahrten pro Bezugszeitraum (meist ein Werktag) und pro Person erreicht.
2. **Unabhängigkeit von der Struktur der Bezirke.** Nun hat aber ein weitgehend von Rentnern bewohnter Bezirk auch bei gleicher Einwohnerzahl ein bezüglich Zeitverlauf und Umfang anderes Mobilitätsverhalten als ein vorwiegend von Arbeitern bewohnter Bezirk, ein Wohnbezirk eine andere Verkehrscharakteristik als ein Industriebezirk. Außerdem ist der Verkehr an Wochenenden von dem an Arbeitstagen grundlegend verschieden. Um bei der Definition der Kennwerte auch noch weitgehend unabhängig von der *Struktur* der Bezirke zu werden, teilt man die Verkehrsströme in elementare und bezüglich des Mobilitätsverhaltens *verhaltenshomogene* Teilmengen oder *Schichten* auf. Dies kann auf zwei Arten geschehen:
 - Disaggregation der Wegekategorien nach den **Ziel-Aktivitäten**, z.B. wird ein "Arbeitsweg" (Weg zur Arbeit) von einem "Einkaufsweg", einem "Weg nach Hause" und "sonstigen Wegen" (z.B. um am Zielort Sport zu treiben oder ins Kino zu gehen) unterschieden.
 - Disaggregation nach sogenannten **Quelle-Ziel-Gruppen** (QZG). Hierbei werden die Aktivitäten am Ausgangs- und am Zielort symmetrisch behandelt, während bei der erwähnten Disaggregation nach (Ziel-)aktivitäten die Herkunft unberücksichtigt bleibt.

Generell kann man bei gleicher Datenanforderung den verkehr mit Quelle-Ziel-Gruppen genauer modellieren, so dass dieser Ansatz im Weiteren verfolgt wird.

3. Verkehrserzeugung

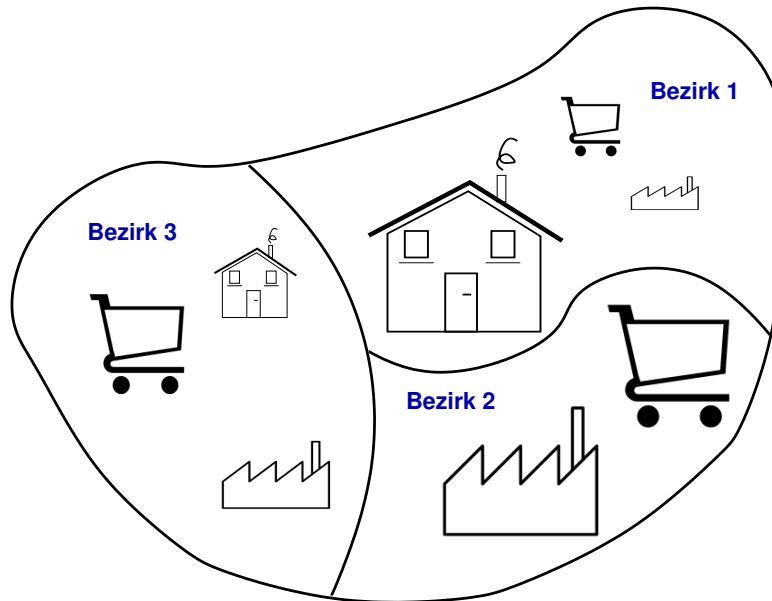


Figure 3.2.: Grundlage des Kennwertmodells der Verkehrsplanung sind Verkehrsbezirke und zugeordnete Raumstrukturdaten in zwei Kategorien: Personengruppen wie Zahl der Einwohner, Schüler etc. und Strukturmerkmale wie Zahl der Arbeitsplätze und Angebot an Einkaufsmöglichkeiten, z.B. in m^2 . Damit werden z.B. Wohnbezirke (Bezirk 1, die Größe der Symbole deutet die relative Bedeutung der entsprechenden Raumstruktur an), Gewerbegebiete (Bezirk 2) und Mischgebiete (Bezirk 3) unterschieden.

3. **Unabhängigkeit von der Zeit** Mit den QZG wird es auch möglich, den unterschiedlichen *zeitliche Verlauf* der Verkehrsnachfrage der verschiedenen Schichten bzw. QZG durch sog. **Tagesganglinien** (TGL) zu modellieren, siehe den Abschnitt 3.6. Damit kann z.B. eine Rush-hour von sonstigen Zeiten und auch die unterschiedlichen Verkehrsrichtungen des Verkehrs in den Vormittags- und Nachmittagsstunden detailliert beschrieben werden. Dies ist ein wesentlicher Grund dafür, dass eine Disaggregation in QZG wesentlich schärfere Aussagen erlaubt.

Mit der Definition der Quelle-Ziel-Gruppen lässt sich nun das Ziel der Verkehrserzeugung mit dem Kennwertmodell angeben:

Verkehrserzeugung mit dem Kennwertmodell: Bestimme in allen Bezirken i und für alle Quelle-Zielgruppen g die Quellsummen Q_i^g und Zielsummen Z_i^g anhand der Raumstrukturdaten und Mobilitätsparameter (Kennwerte).

In den folgenden Unterabschnitten 3.3 - 3.6 werden die gerade eingeführten Begriffe definiert und näher erläutert.

3. Verkehrserzeugung

5er	Wohnung	Arbeit	Sonstiges
Wohnung	-	WA	WS
Arbeit	AW	-	SS
Sonstiges	SW	SS	-

Table 3.1.: 5er Einteilung in Quelle-Ziel-Gruppen

3.3. Quelle-Ziel-Gruppen

Ebenso wie die Auswahl der Verkehrsbezirke gilt es bei der Definition der QZG-Einteilung sowohl konzeptionelle als auch pragmatische Kriterien zu beachten:

- Die QZG sollen möglichst verhaltenshomogen sein, z.B. bezüglich Tagesverlauf der Nachfrage, Wegezähl und Reisezeit pro Weg. Dies ist das wichtigste Kriterium, welches das Konzept der QZG überhaupt erst motiviert.
- Die zur QZG gehörige Bezugspersonenanzahl und Informationen zu den jeweiligen Strukturmerkmale müssen (z.B. von behördlicher Seite aus) verfügbar sein.
- Der Anteil am Gesamtverkehr sollte nicht zu klein sein. Sonst lohnt sich einerseits die Analyse nicht, andererseits lassen sich die zu solchen QZG gehörigen Kennwerte empirisch schwer ermitteln.

Die Tabellen 3.1 und 3.2 zeigen zwei häufig verwendete QZG-Einteilungen. Für detailliertere Untersuchungen werden bei entsprechender Datenlage auch feinere Einteilungen eingesetzt, z.B. eine 19er QZG-Einteilung mit zusätzlichen QZG wie "Wohnen-Uni", "Wohnen-Freizeit" oder "Arbeiten-Diensterledigung" und entsprechenden QZG für die entgegengesetzten Ströme. Um das Kriterium des nicht zu kleinen Anteils am Gesamtverkehr zu erfüllen, werden teilweise mehrere Matrixelemente der Tabellen (z.B. EB, Einkauf-Bildung) zu einer summarischen QZG (AS, SA oder SS) zusammengefasst. Prinzipiell werden

- Fahrten von und zur Wohnung immer detailliert betrachtet,
- bei Fahrten von und zur Arbeit nur "Wohnen" oder "Sonstiges" (bzw. in der Fünfer-Einteilung nur "Sonstiges") unterschieden,
- alle Fahrten, welche weder Wohnung noch Arbeit als Quelle oder Ziel haben, zu "SS" zusammengefasst.

Zu jeder Quelle-Ziel-Gruppe gehören **Bezugspersonengruppen**, die eine Untergruppe der Einwohner darstellen, sowie **Strukturmerkmale**, die solche Fahrten erst induzieren. Hat man z.B. eine QZG "Wohnen-Arbeit" (WA), so ist dies nur für Erwerbstätige relevant, welche für WA daher die Bezugspersonengruppe darstellen. Erzeugt werden WA-Wege durch Arbeitsplätze, welche daher das zur QZG "WA" gehörige natürliche Strukturmerkmal darstellen. Eine Übersicht gibt Tabelle 3.3.

3. Verkehrserzeugung

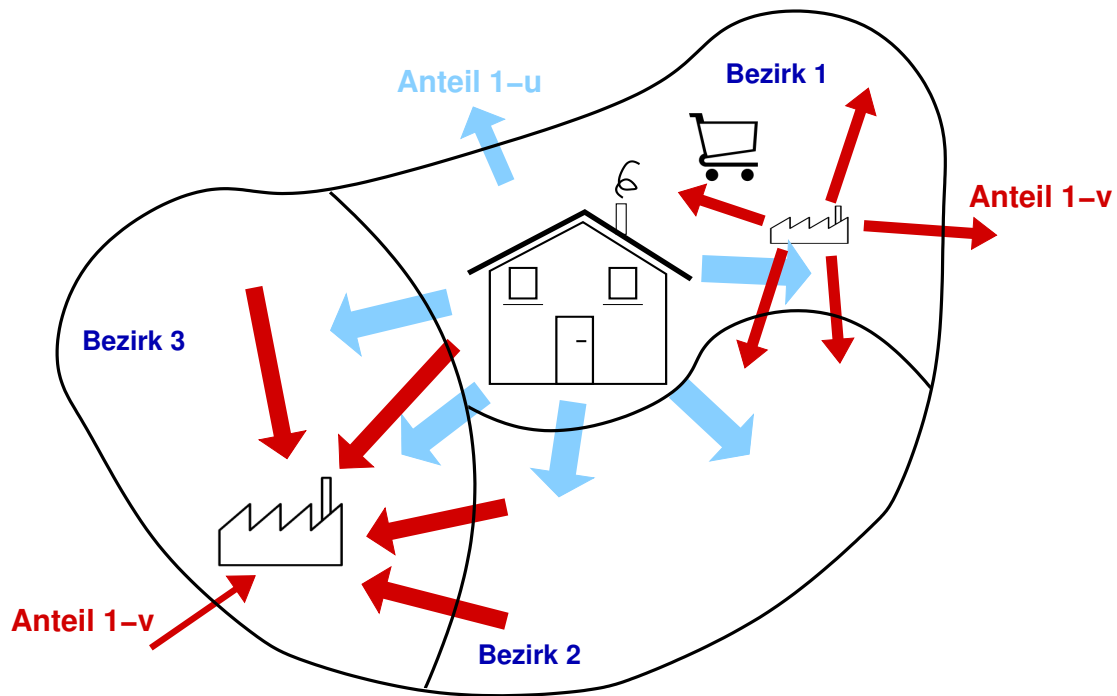


Figure 3.3.: Bei der Erzeugung interessieren nur die Summen Q_i^g und Z_i^g der Quell- bzw. Zielströme von bzw. aus Bezirk i , allerdings beim Kennwertmodell disaggregiert in verschiedene Quelle-Ziel-Gruppen (QZG) g . Des Weiteren wird zwischen Binnenverkehr (Quellen und Ziele liegen innerhalb des Planungsgebietes) und externen Verkehr (Quelle, Ziel, oder beides liegen außerhalb) unterschieden. Nur die Binnenanteile (u für den Heimatverkehr, v für von Struktureinheiten erzeugten Verkehr) gehen in die Quell- und Zielsummen ein. Dargestellt sind für Bezirk 1 (Wohngebiet) die Quellsummen aller von der Wohnung ausgehenden QZG (Typ 1, (blaue Pfeile) sowie die Quellsummen aller von Arbeitsplätzen ausgehenden QZG (rote Pfeile). In Bezirk 3 (Gewerbe- und industriegebiet) sind die Zielsummen alle zu Arbeitsplätzen hinführenden QZG (rote Pfeile) gekennzeichnet. Je größer die zur jeweiligen QZG gehörige Personengruppe bzw. je bedeutender die entsprechende Raumstruktur ist, desto größer sind bei konstanten spezifischen Verkehrsaufkommen und Erzeugungsraten die entsprechenden Summenströme (Dicke der Pfeile).

3. Verkehrserzeugung

13er	Wohnung	Arbeit	Kinder	Bildung	Einkauf	Sonstiges
Wohnung	-	WA	WK	WB	WE	WS
Arbeit	AW	-	AS	AS	AS	AS
Kinder	KW	SA	-	SS	SS	SS
Bildung	BW	SA	SS	-	SS	SS
Einkauf	EW	SA	SS	SS	-	SS
Sonstiges	SW	SA	SS	SS	SS	-

Table 3.2.: 13er Einteilung in Quelle-Ziel-Gruppen

Stehen die für eine feinere QZG-Einteilung notwendigen Daten der entsprechenden Strukturmerkmale, z.B. Kindertagesstätten-Plätze, nicht zur Verfügung, ist eine Auswertung nicht möglich und es muss durch Zusammenfassung der entsprechenden QZG eine gröbere QZG-Einteilung verwendet werden.

Aufgabe: Zusammenfassung von Quelle-Ziel-Gruppen

Wie werden bei einer Zusammenfassung von der 13er-Einteilung der QZG in eine Fünfer-Einteilung die entsprechenden Bezugspersonengruppen, Strukturmerkmale, spezifischen Verkehrsaufkommen und Erzeugungsraten zusammengefasst? Geben Sie die neuen Größen in Abhängigkeit der alten an. Ist eine Disaggregation von der Fünfer in eine 13er-Einteilung ebenso problemlos möglich?

3.4. Mobilitätsparameter

Da die einzelnen QZG bezüglich des Mobilitätsverhaltens weitgehend homogene Anteile am Verkehrsfluss darstellen, kann man sie durch Parameter oder Kennwerte beschreiben, welche nur in engen Grenzen variieren. Die Kennwerte lassen sich dabei zu zwei Kategorien zusammenfassen, den auf die Bezugspersonengruppen bezogenen **spezifisches Verkehrsaufkommen** und den auf die Strukturmerkmale bezogenen **Erzeugungsraten**.

3.4.1. Spezifisches Verkehrsaufkommen

Das **spezifische Verkehrsaufkommen** σ^g gibt die mittlere Anzahl der von einer Bezugsperson verursachten Wege in der Quelle-Ziel-Gruppe g im Bezugszeitraum (üblicherweise: ein Werktag) an.

Also z.B. σ^{WA} = Zahl der WA-Wege pro Erwerbstätiger und Werktag, σ^{WK} = Zahl der WK-Wege pro Kleinkind und Werktag. Da bei WK-Wegen meist auch die Eltern mitgehen (welche *nicht* zur Bezugspersonengruppe für WK gehören!), ist σ^{WK} üblicherweise

3. Verkehrserzeugung

Quelle-Ziel-Gruppe g	Bezugspersonengruppe n_i^g	Spezifisches Verkehrsaufkommen σ^g	Strukturmerkmal S_i	Erzeugungsrates ϵ^g
WA	Erwerbstätige	0.7	Arbeitsplätze	0.8
AW	Erwerbstätige	0.6	Arbeitsplätze	0.7
WK	Kleinkinder	1.2 (> 1 wg. Eltern)	Kindergarten-Plätze	2.0
KW	Kleinkinder	1.0	Kindergarten-Plätze	1.7
WB	Schüler	1.1	Schulplätze	1.1
BW	Schüler	1.0	Schulplätze	1.0
WE	Einwohner	0.4	m ² Einkaufsfläche	0.2/m ²
EW	Einwohner	0.5	m ² Einkaufsfläche	0.25/m ²
WS	Einwohner	0.4	AP im tertiären Sektor	0.8
SW	Einwohner	0.4	AP im tertiären Sektor	0.8
AS	Erwerbstätige	0.2	AP im tertiären Sektor	0.4
SA	Erwerbstätige	0.1	AP im tertiären Sektor	0.2
SS	Einwohner	0.4	AP im tertiären Sektor	1.2

Table 3.3.: Die zu verschiedenen Quelle-Ziel-Gruppen gehörigen Bezugspersonengruppen, Strukturmerkmale, spezifische Verkehrsaufkommen und Erzeugungsrates. Ein Wert $\sigma^{\text{WA}} = 0.8$ bedeutet z.B., dass pro Bezugstag (Werktag!) und pro Bezugsperson (Erwerbstätiger) im Mittel 0.8 WA-Fahrten stattfinden. Da die Zuordnung teils nicht eindeutig ist (z.B. Ladenfläche oder Beschäftigtenzahl im tertiären Sektor als Strukturmerkmal bei "WE" oder "EW", oder Kleinkinder bzw. Kleinkinder+Eltern als Bezugspersonengruppe bei "WK" und "KW"), sollte man eine einmal gewählte Zuordnung konsequent beibehalten.

3. Verkehrserzeugung

größer als 1. Gehen z.B. 60% aller Kinder von der Wohnung direkt in die Kita, jeweils begleitet von einer Person, ergibt dies $\sigma^{\text{WK}} = 0.6 * 2 = 1.2$. Bei Vollbelegung der Kita-Plätze ergibt sich analog für die Erzeugungsrate $\epsilon^{\text{WK}} = 1.0 * 2 = 2$ (vgl. Tabelle 3.3).

Verständnisfrage:

Warum ist es nicht so günstig, bei der QZG "WK" die Bezugspersonengruppe als "Kinder+Eltern" zu definieren?

Verständnisfrage:

Warum ist σ^{WA} größer als σ^{AW} ?

3.4.2. Erzeugungsrate

Die **Erzeugungsrate** ϵ^g gibt die mittlere Anzahl der von einer Struktureinheit verursachten Wege in der QZG g im Bezugszeitraum (üblicherweise: ein Werktag) an.

Also z.B. ϵ^{WA} = Zahl der WA-Wege pro Arbeitsplatz und Werktag, ϵ^{WK} = Zahl der WK-Wege pro Kita-Platz und Werktag, ϵ^{WE} = Zahl der WE-Wege pro m^2 Einkaufsfläche und Werktag. Man beachte, dass ϵ^g einheitenbehaftet sein kann wie im letzten Beispiel (vgl. Tabelle 3.3)

Verständnisfrage:

Warum ist ϵ^{WK} größer als σ^{WK} ? Warum ist dies vor allem in Westdeutschland im Vergleich zu Ostdeutschland so? Warum gilt bei den QZG WB und BW hingegen $\epsilon^{\text{WB}} \approx \sigma^{\text{WB}}$ bzw. $\epsilon^{\text{BW}} \approx \sigma^{\text{BW}}$?

3.4.3. Empirische Ermittlung der Mobilitätsparameter

Eine **Aktivitätenkette** ist die Folge der "Aktivitäten" während eines Tages, z.B.

$$W \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow K \rightarrow W \rightarrow F \rightarrow W.$$

Der Vorteil der Aktivitätenketten ist, dass man sie direkt (ohne dass man z.B. das Konzept der Quelle-Ziel-Gruppe erklären muss) in einer Umfrage erheben kann. Da man jedoch jeder Aktivitätenfolge (z.B. $W \rightarrow K$) eine Quelle-Ziel-Gruppe zuordnen kann, eignen sich Aktivitätenketten sehr gut zur empirischen Bestimmung der Mobilitätsparameter. Fällt eine Aktivität nicht in das Schema einer bestimmten QZG-Einteilung (wie z.B. die Aktivität "F" (Freizeitaktivität), fällt sie unter "Sonstiges".

3. Verkehrserzeugung

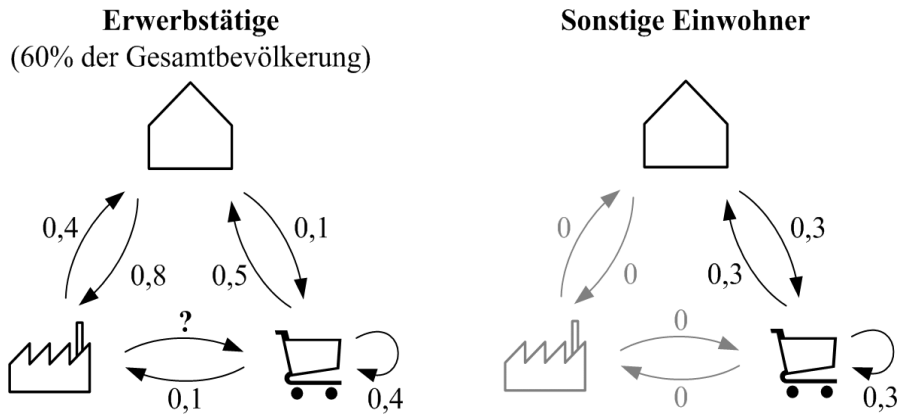


Figure 3.4.: Beispiel von aggregierten Aktivitätenketten

Verständnisfrage:

Ordnen Sie den Wegen obiger Aktivitätenkette die Quelle-Ziel-Gruppen bezüglich der Fünfer und 13er-Einteilung zu!

Mittelt man die so erhaltenen Häufigkeiten von Wegen in einer QZG über alle Befragungsteilnehmer einer bestimmten Bezugspersonengruppe (vgl. Tabelle 3.3), erhält man aggregierte Aktivitätenketten wie in Abb. 3.4. Man kann auch den Anteil der Wege, bei der eine bestimmte Aktivität das Ziel oder die Quelle ist, auftragen (Abb. 3.5).

Aufgabe

Ermitteln Sie aus den aggregierten Aktivitätenketten die spezifischen Verkehrsaufkommen σ^{WA} , σ^{AW} , σ^{WE} , σ^{EW} und σ^{SS} jeweils für die 5er und 13er-Einteilung!

Verständnisfrage:

Kann man aus der Abb. der relativen Häufigkeiten der Aktivitäten und einer als bekannt vorausgesetzten mittleren Gesamtwegezahl ohne zusätzliche Annahmen die spezifischen Verkehrsaufkommen bestimmen?

3.5. Binnenanteile

Als weitere Größen, welche in ihrer Rolle zwischen Modell- und Systemparametern stehen, gehen die **Binnenanteile des Heimatverkehrs** u_i und die **Binnenanteile des**

3. Verkehrserzeugung

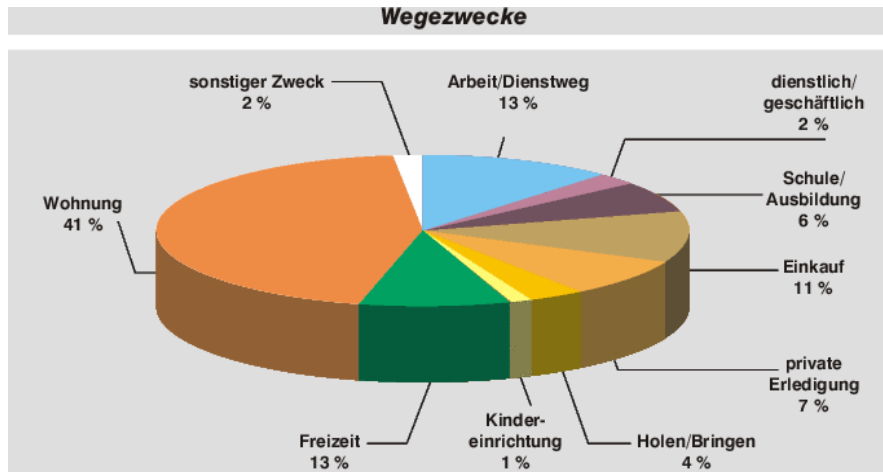


Figure 3.5.: Relative Häufigkeiten von Aktivitäten aus der SrV-Verkehrserhebung (System relevanter Verkehrserhebungen, 2003)

von den Strukturmerkmalen erzeugten Verkehrs v_i in die Erzeugungsrechnung ein, vgl. Abb. 3.3. Die jeweiligen Binnenanteile u_i und v_i gelten dabei sowohl für Wege von den Wohnungen bzw. Strukturmerkmalen als auch für Wege zu Wohnungen bzw. Strukturmerkmalen. Diese Anteile kann man durch entsprechend große Untersuchungsgebiete sehr nahe an 1 heranbringen. Sie hängen schwach von den Bezirken ab.

Verständnisfrage:

In welchen Bezirken sind die Binnenanteile am kleinsten? Was muss man machen, um exakt $u = v = 1$ für alle Bezirke zu erhalten?

3.6. Tagesganglinien

Die **Tagesganglinien** geben die zeitliche Verteilung der Verkehrsströme in Form von relativen Häufigkeiten für jede **Zeitscheibe** an. Eine Zeitscheibe entspricht meist einem 1-Stunden-Intervall, vgl. Abb. 3.6. In der Abbildung sieht man den Vorteil der Disaggregation in QZG sehr deutlich, da z.B. die WA-Wege einen ganz anderen Zeitverlauf haben als die AW-Wege. Wenn zudem die Strukturmerkmale unsymmetrisch verteilt sind, ergibt dies auch im Gesamtfluss zu unterschiedlichen Tageszeiten unterschiedliche Vorzugsrichtungen. Sind z.B. die Arbeitsplätze in der Stadt und die Wohnungen hauptsächlich im Umland, ergibt dies in den morgendlichen Stunden Verkehr hauptsächlich stadteinwärts, Abends stadtauswärts. Diese für viele Aspekte der Verkehrssteuerung und -planung (z.B. Lichtsignalregelungen) sehr wichtige Tatsache könnte man ohne Quelle-Ziel-Gruppen oder eine ähnliche Disaggregation gar nicht systematisch modellieren!

3. Verkehrserzeugung

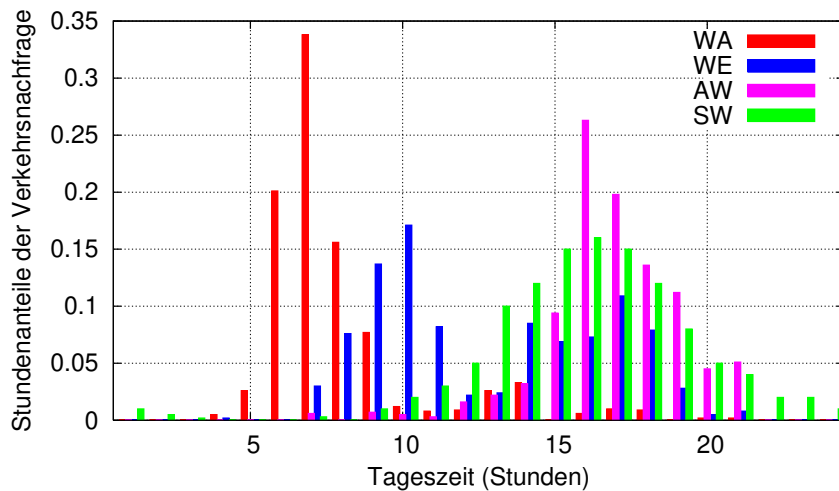


Figure 3.6.: Tagesganglinien für eine Auswahl von Quelle-Ziel-Gruppen.

Verständnisfrage:

Wie sieht hingegen der komplette Satz an System- bzw. Inputgrößen aus?

Bezirkseinteilung; für jeden Bezirk die Zahlen aller Bezugspersonengruppen und Strukturmerkmale gemäß Tabelle 3.3

3.7. Durchführung der Verkehrserzeugung mit dem Kennwertmodell

Bei den Raumstrukturdaten gibt es Größen, welche sehr genau bekannt sind, wie die Einwohnerzahl, und welche, die weniger gut bekannt sind bzw. bei denen die Ermittlung der zugeordneten spezifischen Verkehrsaufkommen nur ungenau möglich ist wie bei den Arbeitsplätze, Einkaufsmöglichkeiten etc. Bei der Erzeugung entstehen aufgrund von Überbestimmtheiten Inkonsistenzen, welche natürlich so aufgelöst werden sollten, dass die jeweils genauere Größe, i.d.R. das Heimatverkehrsaufkommen, unverändert bleiben sollte. Dadurch ergeben sich bei der Berechnung unterschiedliche Reihenfolgen, welche zu drei Typen von QZG führen:

- Bei QZG vom **Typ I** ist der Beginn der Ortsveränderung der Heimatstandort, z.B. WA, WK oder WS.
- Bei QZG vom **Typ II** ist das *Ziel* des Ortswechsels der Heimatstandort, z.B. AW, KW oder SW. Zu jeder QZG vom Typ I gibt es eine korrespondierende vom Typ II mit selber Bezugspersonengruppe und Strukturmerkmal(en).

3. Verkehrserzeugung

- Schließlich verbleibt i.A. eine einzige QZG vom **Typ III** (SS, “Sonstiges–Sonstiges”), bei der weder der Beginn noch das Ziel der Ortsveränderung der Heimatstandort ist.¹

3.7.1. Quelle-Ziel-Gruppen vom Typ I

Schritt 1: Heimatverkehr bzw. Quellsumme Definition des spezifischen Verkehrsaufkommens und des Binnenanteils einsetzen (z.b. $g = (\text{WA})$):

$$H_i^g = Q_i^g = n_i^g \sigma^g u_i \quad (3.1)$$

- n_i^g ist die Zahl der Bezugspersonen der QZG g (z.b. die Zahl der Erwerbstätigen für WA) im Verkehrsbezirk i .
- σ^g ist das spezifische Verkehrsaufkommen (hängt *nicht* vom Bezirk i ab).
- u_i der Binnenverkehrsanteil bezüglich Wegen von und nach dem Heimatstandort (dessen Bezirksabhängigkeit lediglich schwach ist).

Schritt 2: Gesamtverkehr Summiert man über alle Bezirke des UG, erhält man für jede QZG g die *Summe der täglichen Fahrten* im gesamten UG,

$$V^g = \sum_i H_i^g = \sum_i Q_i^g \quad (3.2)$$

Schritt 3: Zielsumme Zunächst wird, analog zu Schritt 1, die Definition der Erzeugungsrate eingesetzt, um die vorläufigen Zielsummen zu erhalten (Vorläufige Größen werden mit Tilden gekennzeichnet):

$$\tilde{Z}_j^g = S_j^g \epsilon^g v_j \quad (3.3)$$

- S_j^g ist die maßgebliche Strukturgröße der QZG g im Verkehrsbezirk j (z.b. Zahl der Arbeitsplätze für $g = \text{WA}$).
- ϵ ist die Erzeugungsrate des entsprechenden Strukturmerkmals.
- v_j ist der Binnenverkehrsanteil des vom Strukturmerkmal erzeugten Verkehrs (sowohl zu als auch von den Strukturmerkmalen)

Auch mit den Zielsummen kann man durch Summation über alle Bezirke die tägliche Gesamtzahl der Wege der jeweiligen QZG im UG errechnen:

$$\tilde{V}^g = \sum_j \tilde{Z}_j^g \quad (3.4)$$

¹Der Arbeitsplatz wird meist als “zweite Heimat” betrachtet, so dass die Wege AS und SA den QZG-Typen I bzw. II zugeordnet werden.

3. Verkehrserzeugung

Nun kann der Gesamtverkehr, also *alle* Fahrten in der jeweiligen QZG, natürlich nur einen Wert haben: $\sum_i Q_i^g = \sum_i Z_i^g$ (bei der Summation sind die laufenden Indices egal, man könnte auch j verwenden). Da der Heimatverkehr genauer bekannt ist als der durch die Strukturmerkmale erzeugte verkehr die Quellsummen unverändert gelassen und die Zielsummen aller Bezirke mit einem einheitlichen Faktor α multipliziert, $Z_j = \alpha \tilde{Z}_j$, so dass wieder gilt

$$V^g = \sum_j Q_j^g = \sum_j Z_j^g = \alpha \sum_j \tilde{Z}_j^g. \quad (3.5)$$

Dies führt auf $\alpha = V^g / \tilde{V}^g$ bzw. auf

$$Z_j^g = \frac{V^g}{\tilde{V}^g} \tilde{Z}_j^g. \quad (3.6)$$

3.7.2. Quelle-Ziel-Gruppen vom Typ II

Da zu jeder QZG vom Typ I eine korrespondierende vom Typ II existiert, erhält man die Rechnung für Typ II aus der für Typ I durch Vertauschen der Quellen und der Ziele. Die Berechnung des Heimatverkehrs und des Gesamtverkehrs ist für beide QZG-Typen formal identisch:

Schritt 1: Heimatverkehr- bzw. Zielsumme

$$H_i^g = Z_i^g = n_i^g \sigma^g u_i \quad (3.7)$$

Schritt 2: Gesamtverkehr

$$V^g = \sum_i H_i^g = \sum_i Z_i^g \quad (3.8)$$

Schritt 3: Quellverkehr

$$\tilde{Q}_i^g = S_i^g \epsilon^g v_i, \quad (3.9)$$

$$\tilde{V}^g = \sum_i \tilde{Q}_i^g, \quad (3.10)$$

$$Q_i^g = \frac{V^g}{\tilde{V}^g} \tilde{Q}_i^g. \quad (3.11)$$

3.7.3. Quelle-Ziel-Gruppen vom Typ III

Diese Quelle-Ziel-Gruppe weist gegenüber den QZG vom Typ I und II einige Besonderheiten auf:

- Es gibt bei den verschiedenen QZG-Einteilungen (z.B. Fünfer oder 19er) nur eine einzige QZG von diesem Typ, nämlich "SS".
- Die Wohnung ist weder Quelle noch Ziel. Damit sind i.A. weder Quell- noch Zielverkehr gleich dem Heimatverkehrsaufkommen.

3. Verkehrserzeugung

Diese Unbestimmtheit wird ausgenutzt, um zusätzlich zu den schon in den QZG vom Typ I und II vorgenommenen Korrekturen mit dem Ziel einer **räumlichen Geschlossenheit** des Binnenverkehrs auch die Bedingung des **verkehrlich** bzw. **zeitlich geschlossenen Zeitraums** zu erfüllen:

Räumlichen Geschlossenheit bedeutet ja, dass für jede QZG g getrennt die Summe der (Binnenanteile der) Quellen Q_i^g über alle Bezirke i gleich der entsprechenden Summe der (Binnenanteile der) Ziele Z_i^g ist. So ist ja "Binnenverkehr" definiert: Der Beginn eines Weges innerhalb des UG muss auch im UG enden:

$$\sum_{i=1}^n Q_i^g = \sum_{i=1}^n Z_i^g = V^g \quad (3.12)$$

Dies gilt auch für die QZG SS. Zusätzlich ergibt die Annahme verkehrlich geschlossener Zeiträume (z.B. 1 Tag) für jeden Bezirk die Bedingung, dass die Quellsumme über alle QZG gleich der Zielsumme ist:

$$\sum_{g=1}^{5,13 \text{ oder } 19} Q_i^g = \sum_{g=1}^{5,13 \text{ oder } 19} Z_i^g \quad (3.13)$$

Die Korrektur der Quell- und Zielflüsse gemäß dieser Bedingung nennt man auch **Randsummenausgleich**. Wir nehmen nun die QZG SS für den Randsummenausgleich her und schreiben Gl. (3.13) als

$$\sum_{g=I,II} Q_i^g + Q_i^{SS} = \sum_{g=I,II} Z_i^g + Z_i^{SS} \quad (3.14)$$

wobei $\sum_{g=I,II}$ die Summation über alle Quelle-Ziel-Gruppen g vom Typ I und II (also bei der 5er-Einteilung über WA, WS, AW, SW) ist.

Schritt 1: Auch hier wird der Heimatverkehr und der Gesamtverkehr genau wie bei den beiden anderen Typen berechnet:

$$H_i^g = n_i^g \sigma^g u_i, \quad (3.15)$$

$$V^g = \sum_i H_i^g \quad (3.16)$$

Der Unterschied ist aber, dass H_i^g weder Quellsumme noch Zielsumme für den Bezirk i ist. Vielmehr ist es das von Bezirk i verursachte Verkehrsaufkommen in i.A. anderen Bezirken.

Schritt 2: Da bei der QZG vom Typ III sowohl Quellen als auch Ziele Strukturmerkmale wie z.B. Läden, Freizeitmöglichkeiten, Kneipen etc sind, werden in dieser QZG sowohl der Quell- als auch der Zielverkehr von den Strukturmerkmalen S_j mit entsprechenden Erzeugungsraten ϵ_j^{SS} verursacht. Der Gesamtverkehr $V^g = V^{SS}$ wird dabei so auf

3. Verkehrserzeugung

die einzelnen Bezirke aufgeteilt, dass jeder Bezirk proportional zu $S_j \epsilon_j^{\text{SS}}$ gewichtet wird. Nur in dieser QZG muss man außerdem bei den spezifischen Verkehrsaufkommen unterscheiden, ob der Quell- oder der Zielverkehr gemeint ist.² Diese Unterscheidung ist aber eher theoretischer Natur, da aufgrund der verlangten verkehrlichen Geschlossenheit sowieso Korrekturen nötig werden, so dass wir in diesen vorläufigen Schritt die Quell- und Zielströme gleichsetzen, also zunächst identisch auf die Bezirke verteilen:

$$\tilde{Q}_i^{\text{SS}} = \tilde{Z}_i^{\text{SS}} = V^{\text{SS}} \frac{S_i^{\text{SS}} \epsilon_i^{\text{SS}} v_i}{\sum_j S_j^{\text{SS}} \epsilon_j^{\text{SS}} v_j} \quad (3.17)$$

Schritt 3: Um nun die Randausgleichs-Bedingungen (3.13) bzw. (3.14) zu erfüllen und auch, um den SS-Gesamtverkehr $Q_i^{\text{SS}} + Z_i^{\text{SS}}$ in den Bezirken i proportional zu der Anzahl an SS-Strukturmerkmalen zu lassen, setzen wir

$$Q_i^{\text{SS}} = \tilde{Q}_i^{\text{SS}} + b_i, \quad (3.18)$$

$$Z_i^{\text{SS}} = \tilde{Z}_i^{\text{SS}} - b_i, \quad (3.19)$$

wobei, um weiterhin die räumliche Geschlossenheit (3.12) zu gewährleisten,

$$\sum_i b_i = 0 \quad (3.20)$$

gelten muss. Aus (3.14) und der Symmetrie zwischen Quellen und Zielen, $\tilde{Q}_i^{\text{SS}} = \tilde{Z}_i^{\text{SS}}$, erhält man

$$b_i = \frac{1}{2} \sum_{g=I,II} (Z_i^g - Q_i^g), \quad (3.21)$$

wobei $\sum_{g=I,II}$ die Summe über alle QZG vom Typ I und II, also z.B. bei der 5er-Einteilung WA, WS, AW und SW, darstellt. Wegen der Erfüllung der räumliche Geschlossenheit für alle Q_i und Z_i aus den QZG-Typen I und II ist die Bedingung der räumliche Geschlossenheit, (3.20), ebenfalls erfüllt.

Verständnisfrage:

Geben Sie den kompletten Satz an Modell- bzw. Mobilitätsparametern der Erzeugung an. Denken Sie dabei an spezifische Verkehrsaufkommen, Erzeugungsraten, Binnenanteile und Tagesganglinien.

σ^g, ϵ^g (hängen gar nicht oder nur schwach von den Bezirken ab!), u_i^g, v_i^g (größer, d.h. nahe 1, im Zentrum, kleiner in den Randbezirken), w_{TGL}^g (hängen gar nicht oder nur schwach von den Bezirken ab)

²Bei Lohse sind anstattdessen unterschiedliche Strukturgrößen für Quell- und Zielverkehr definiert, was aber eigentlich nicht sinnvoll ist, da man ja in der QZG jedes Ziel auch wieder verlässt; hingegen können die spez. Verkehrsaufkommen unterschiedlich sein, wenn z.B. häufig ein SS-Weg mit einem SW-Weg fortgesetzt wird, also ein Strukturmerkmal über die QZG SS erreicht, aber über SW wieder verlassen wird.

3. Verkehrserzeugung

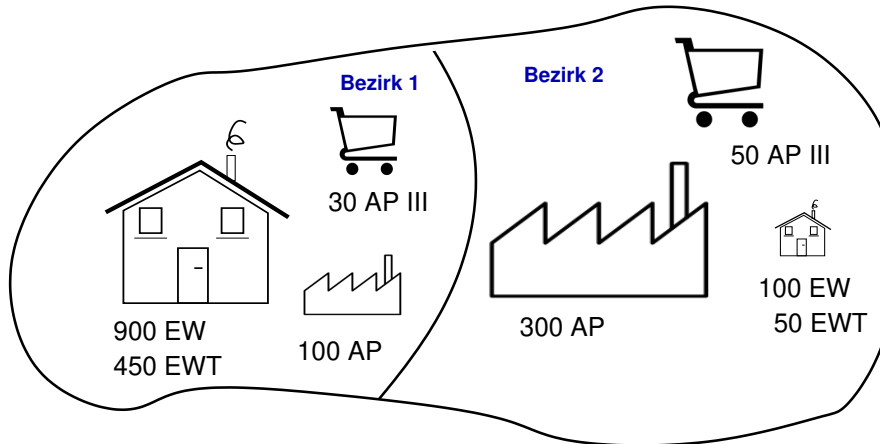


Figure 3.7.: Bezirke und Raumstrukturen für das Beispiel zur Verkehrserzeugung

3.8. Beispiel

In folgender Abbildung sind die Raumstrukturen eines Minimal-Untersuchungsgebietes dargestellt, welches aus nur zwei Bezirken besteht, bei denen als exogene Variablen folgende Raumstrukturen gegeben sind:

- 900 bzw. 100 Einwohner (EW),
- 450 bzw. 50 Erwerbstätige (EWT),
- Industrien/Gewerbe mit 100 bzw. 300 Arbeitsplätzen (AP),
- Sonstige Raumstrukturpotenziale, welche allgemein durch die Anzahl der “Struktureinheiten” (SE) quantifiziert werden, welche z.B. die Zahl der im tertiären Sektor (Dienstleistung) Beschäftigten (z.B. Verkäufer, Wirte, Theater- und Museen-Angestellten etc) bedeuten können: 300 bzw. 500 SE.

Ferner wird die Fünfer-Einteilung in QZG mit folgenden Modell- bzw. Mobilitätsparametern (spezifische Verkehrsaufkommen und Erzeugungsraten) angenommen:

$$\begin{aligned}
 \sigma^{WA} &= 0.8, & \epsilon^{WA} &= 0.9, \\
 \sigma^{AW} &= 0.6, & \epsilon^{AW} &= 0.8, \\
 \sigma^{WS} &= 1.0, & \epsilon^{WS} &= 2.0, \\
 \sigma^{SW} &= 1.0, & \epsilon^{SW} &= 2.0, \\
 \sigma^{SS} &= 1.2, & \epsilon^{SS} &= 1.2.
 \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber werden die Binnenanteile $u_i = v_i = 1$ gesetzt.

3. Verkehrserzeugung

3.8.1. Quelle-Ziel-Gruppen des Typs I

Diese sind in der Fünfer-Einteilung die QZG WA und WS. Für beide QZG braucht man zunächst die Heimatverkehrsaufkommen und die über alle Bezirke summierten Gesamtverkehre, hier

$$V^{\text{WA}} = \sigma^{\text{WA}}(n_1^{\text{WA}} + n_2^{\text{WA}}) = 0.8 * (450 + 50) = \underline{400},$$

$$V^{\text{WS}} = \sigma^{\text{WS}}(n_1^{\text{WS}} + n_2^{\text{WS}}) = 1.0 * (900 + 100) = \underline{1\ 000}.$$

sowie die Korrekturfaktoren

$$\alpha^{\text{WA}} = \frac{V^{\text{WA}}}{\epsilon^{\text{WA}}(S_1^{\text{WA}} + S_2^{\text{WA}})} = \frac{400}{0.9 * (100 + 300)} = \frac{10}{9},$$

$$\alpha^{\text{WS}} = \frac{V^{\text{WS}}}{\epsilon^{\text{WS}}(S_1^{\text{WS}} + S_2^{\text{WS}})} = \frac{1000}{2 * (300 + 500)} = \frac{10}{16}$$

Daraus werden dann die Zielsummen berechnet. Diese Schritte sind detailliert in folgender Arbeitstabelle zusammengefasst, welche zeilenweise, also von oben nach unten, zu bearbeiten ist:

Größe (Typ I)	WA	WS
$H_1 = Q_1$	$450 * 0.8 = 360$	$900 * 1 = 900$
$H_2 = Q_2$	$50 * 0.8 = 40$	$100 * 1 = 100$
$V = \sum_i H_i$	400	1 000
\tilde{Z}_1	$100 * 0.9 = 90$	$300 * 2 = 600$
\tilde{Z}_2	$300 * 0.9 = 270$	$500 * 2 = 1\ 000$
$\tilde{V} = \sum_i \tilde{Z}_i$	360	1 600
$\alpha = V/\tilde{V}$	10/9	10/16
$Z_1 = \alpha\tilde{Z}_1$	$90 * 10/9 = 100$	$600 * 10/16 = 375$
$Z_2 = \alpha\tilde{Z}_2$	$270 * 10/9 = 300$	$1\ 000 * 10/16 = 625$

3.8.2. Quelle-Ziel-Gruppen des Typs II

Hier gilt dasselbe Berechnungsschema, nur sind Quellen und Ziele vertauscht:

Größe (Typ II)	AW	SW
$H_1 = Z_1$	$450 * 0.6 = 270$	$900 * 1 = 900$
$H_2 = Z_2$	$50 * 0.6 = 30$	$100 * 1 = 100$
$V = \sum_i H_i$	300	1 000
\tilde{Q}_1	$100 * 0.8 = 80$	$300 * 2 = 600$
\tilde{Q}_2	$300 * 0.8 = 240$	$500 * 2 = 1\ 000$
$\tilde{V} = \sum_i \tilde{Q}_i$	320	1 600
$\alpha = V/\tilde{V}$	15/16	10/16
$Q_1 = \alpha\tilde{Q}_1$	$80 * 15/16 = 75$	$600 * 10/16 = 375$
$Q_2 = \alpha\tilde{Q}_2$	$240 * 15/16 = 225$	$1\ 000 * 10/16 = 625$

3. Verkehrserzeugung

3.8.3. Quelle-Ziel-Gruppe des Typs III (SS)

Hier berechnet man zunächst, wie in den anderen QZG, das Heimatverkehrsaufkommen:

$$V^{\text{SS}} = \sum_i H_i^{\text{SS}} = 1\,200$$

Das Besondere des Typs III ist, dass dieser Heimatverkehr weder der Quelle noch dem Ziel zuzuordnen ist. Vielmehr werden die vorläufigen Quell- und Zielsummen als identisch angenommen und mit den Erzeugungsraten und Strukturgrößen berechnet:

$$\tilde{Q}_i = \tilde{Z}_i = \epsilon^{\text{SS}} S_i^{\text{SS}}$$

Der sich daraus ergebende Gesamtverkehr $\tilde{V} = \sum_i \tilde{Q}_i$ ist i.A. ungleich V^{SS} , woraus sich ein Korrekturfaktor als gemeinsamer Multiplikator ergibt:

$$\alpha^{\text{SS}} = \frac{V^{\text{SS}}}{\sum_j S_j^{\text{SS}} \epsilon^{\text{SS}}} = 1.25.$$

Dies ergibt jedoch noch nicht die endgültigen Quell- und Zielsummen, da bis jetzt nur die räumliche, nicht jedoch die zeitliche Geschlossenheit berücksichtigt wurde. Man bekommt also wieder vorläufige Größen, welche nun mit einem Dach gekennzeichnet werden:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_1^{\text{SS}} = \hat{Z}_1^{\text{SS}} &= \alpha^{\text{SS}} S_1^{\text{SS}} \epsilon^{\text{SS}} = 450, \\ \hat{Q}_2^{\text{SS}} = \hat{Z}_2^{\text{SS}} &= \alpha^{\text{SS}} S_2^{\text{SS}} \epsilon^{\text{SS}} = 750\end{aligned}$$

Erst nach Berücksichtigung der zeitlichen Geschlossenheit, d.h. Addition/Subtraktion der Korrektur-Summanden b_i gemäß (3.21), ergeben sich die endgültigen Quell- und Zielsummen. Alle Schritte werden übersichtlich in einer Arbeitstabelle zusammengefasst:

3. Verkehrserzeugung

Größe (Typ III)	nur SS
H_1	$900 * 1.2 = 1080$
H_2	$100 * 1.2 = 120$
$V = \sum_i H_i$	1200
$\tilde{Q}_1 = \tilde{Z}_1$	$300 * 1.2 = 360$
$\tilde{Q}_2 = \tilde{Z}_2$	$500 * 1.2 = 600$
$\tilde{V} = \sum_i \tilde{Q}_i$	960
$\alpha = \tilde{V} / \tilde{V}$	5/4
$\hat{Q}_1 = \hat{Z}_1 = \alpha \tilde{Q}_1$	450
$\hat{Q}_2 = \hat{Z}_2 = \alpha \tilde{Q}_2$	750
$b_1 = \frac{1}{2}(Z_1^{I+II} - Q_1^{I+II})$	$\frac{1}{2}(100 + 375 + 270 + 900 - 360 - 900 - 75 - 375) = -32.5$
$b_2 = \frac{1}{2}(Z_2^{I+II} - Q_2^{I+II})$	$\frac{1}{2}(300 + 625 + 30 + 100 - 40 - 100 - 225 - 625) = +32.5$
$Q_1 = \hat{Q}_1 + b_1$	417.5
$Q_2 = \hat{Q}_2 + b_2$	782.5
$Z_1 = \hat{Z}_1 - b_1$	482.5
$Z_2 = \hat{Z}_2 - b_2$	717.5

Das Ergebnis für die QZG "Sonstiges-Sonstiges" ist also

$$Q_1^{SS} = 417.5, \quad Z_1^{SS} = 482.5,$$

$$Q_2^{SS} = 782.5, \quad Z_2^{SS} = 717.5.$$

Zur Übersicht wird das Endergebnis der gesamten Berechnung, also alle endogenen Variablen des Erzeugungsmodells, in folgender Tabelle zusammengefasst:

	WA	WS	AW	SW	SS	Σ
Q_1	360.0	900.0	75.0	375.0	417.5	2 127.5
Q_2	40.0	100.0	225.0	625.0	782.5	1 772.5
$\Sigma = V$	400.0	1 000.0	300.0	1 000.0	1 200.0	3 900.0
Z_1	100.0	375.0	270.0	900.0	482.5	2 127.5
Z_2	300.0	625.0	30.0	100.0	717.5	1 772.5
$\Sigma = V$	400.0	1 000.0	300.0	1 000.0	1 200.0	3 900.0

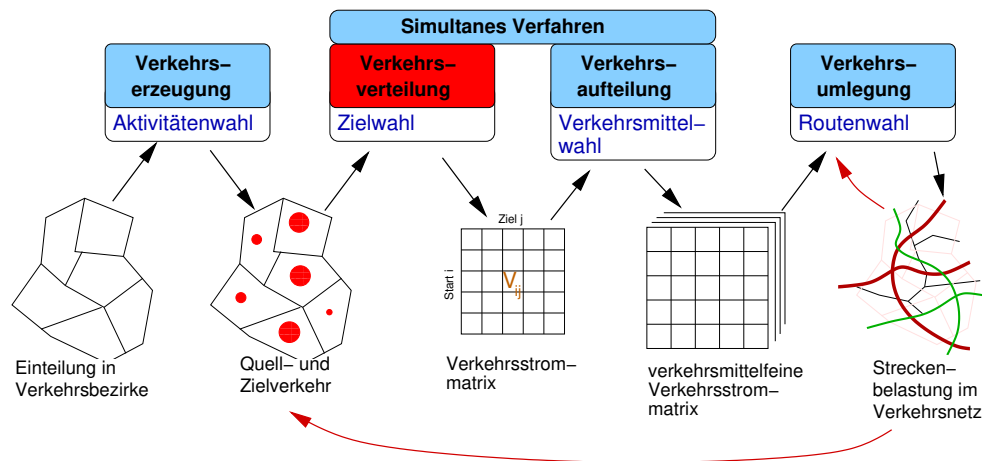
Anhand dieser Zusammenstellung sieht man schön, dass sowohl die räumlichen als auch die zeitlichen Randsummenbedingungen (3.12) und (3.13) für alle QZG bzw. alle Bezirke erfüllt sind!

3. Verkehrserzeugung

3.9. Verwendete Symbole

$i, j = 1, \dots, n$	Zählindices für Bezirke
g	Zählindices für Quelle-Ziel-Gruppen (QZG), z.B. $g \in \{WA, AW, WS, SW, SS\}$ für die 5-er Einteilung
V_{ij}^g	Verkehrstrommatrix: Zahl der zur QZG g gehörigen personenbezogenen Ortsveränderungen von Bezirk i nach Bezirk j im Bezugszeitraum (üblicherweise 1 Tag)
$Q_i^g = \sum_{j=1}^n V_{ij}^g$	Quellsumme: Alle vom Bezirk i zu irgendeinem anderen Bezirk gehenden und zur QZG g gehörigen Ortsveränderungen im Bezugszeitraum
$Z_i^g = \sum_{j=1}^n V_{ji}^g$	Analog zur Quellsumme gebildete Zielsumme
N_i^g	Zahl der für die QZG g relevanten Bezugspersonen in Bezirk i , z.B. N_i^{WA} ist Zahl der Erwerbstätigen
S_i^g	Zahl der für die QZG g relevanten Struktureinheiten in Bezirk i , z.B. S_i^{WA} : Zahl der Arbeitsplätze, S_i^{WE} : Verkaufsfläche in m ²
$S_i^{g,1}$	Falls zu einer QZG mehrere Struktureinheiten unterschieden werden, z.B. $S_i^{WE,1}$ = Verkaufsfläche, $S_i^{WE,2}$ = Zahl der Verkäufer
σ_g	spezifisches Verkehrsaufkommen (SVA) in QZG g : Zahl der Fahrten in dieser QZG pro Bezugspersonenzahl im Bezugszeitraum
ϵ_g	Erzeugungsrate (EZR) in QZG g : Zahl der (induzierten) Quell- oder Zielfahrten pro Struktureinheit im Bezugszeitraum
u_i^g	Binnenanteil der von den Heimatorten im Bezirk i erzeugten Fahrten in QZG g (hängt nur schwach von i ab)
v_i^g	Binnenanteil der von den Struktureinheiten erzeugten Fahrten

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung



4.1. Allgemeines

Bei der **Verkehrsverteilung** bzw. **Zielwahl** geht es darum, die durch die Verkehrserzeugung erhaltenen Quellsummen Q_i und Zielsummen Z_j für einzelne Bezirke i auf konkrete **Verkehrsströme** V_{ij} von Bezirk i nach Bezirk j zu verteilen. Die endogenen Variablen von Zielwahlmodellen sind also die Elemente V_{ij} :

Die Elemente V_{ij} der **Verkehrstrommatrix** geben die mittlere Zahl der Wege von Bezirk i nach Bezirk j im Bezugszeitraum (meist ein Werktag) an. Im Rahmen von Kennwertmodellen sind sie weiterhin nach Quelle-Ziel-Gruppen (QZG) disaggregiert: $V_{ij}^{(g)}$ ist die Zahl der Wege in QZG g .

Die **Randsummen** dieser Verkehrstrommatrix sind dabei, zumindest bei **harten Randsummenbedingungen**, durch die Quellsummen Q_i (Zeilensummen) und Zielsummen Z_j (Spaltensummen) vorgegeben, wie folgende Matrix-Schreibweise veranschaulicht:

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

	$j = 1$	$j = 2$	\cdots	$j = n$	$\sum_{j=1}^n V_{ij} = Q_i$
$i = 1$	V_{11}	V_{12}	\cdots	V_{1n}	Q_1
$i = 2$	V_{21}	V_{22}	\cdots	V_{2n}	Q_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$i = n$	V_{n1}	V_{n2}	\cdots	V_{nn}	Q_n
$\sum_{i=1}^n V_{ij} = Z_j$	Z_1	Z_2	\cdots	Z_n	$V = \sum_{j=1}^n Z_j = \sum_{i=1}^n Q_i$

Die Grundaufgabe der Verteilung ist also die Folgende:

Verkehrsverteilung: Ermittlung der Elemente V_{ij} der Verkehrsstrommatrix unter Berücksichtigung der Randsummenbedingungen (RSB). Für harte RSB gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} \sum_j V_{ij} &= Q_i && \text{Quellsummenbedingung,} \\ \sum_i V_{ij} &= Z_j && \text{Zielsummenbedingung.} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Im Rahmen der Verkehrsnachfragemodellierung mit Kennwertmodellen wird die Verteilung separat für alle Quelle-Ziel-Gruppen (QZG) g durchgeführt, so dass man in jeder Verteilung die Teilströme $V_{ij}^{(g)}$ ermittelt. Da das Vorgehen der Verteilung jedoch für alle QZG dasselbe ist und die einzelnen Verteilungen hier (im Gegensatz zur Erzeugung und auch zur simultanen Ziel- und Verkehrsmittelwahl, Kap. 6 weiter unten) unabhängig voneinander durchgeführt werden, werden in diesem Kapitel die Superskripte zwecks Übersichtlichkeit meist weggelassen.

Randsummenbedingungen

Es gibt drei grundsätzliche Typen von RSB, welche in Abhängigkeit der Quelle-Ziel-Gruppen zum Einsatz kommen:

- **Harte Randsummenbedingungen:** Hier müssen die Quell- bzw. die Zielsummen der Verkehrserzeugung exakt gemäß Gl. (4.1) erfüllt werden. Solche RSB modellieren den Fall, dass die Aktivität am Ausgangsort bzw. die Zielaktivität ortsgebunden ist. Dies ist bei den Aktivitäten W(ohnen), A(rbeiten), K(indergarten) und B(ildung) der Fall. Insbesondere sind also bei den QZG WA, AW, WK, KW, WB und BW sowohl die Quell- als auch die Zielsummen hart.
- Bei **weichen Randsummenbedingungen** hingegen können die vorgegebenen Quell- bzw. Zielsummen bis zu einem Überlastfaktor \ddot{u} überschritten und beliebig unterschritten werden. Die Quell- bzw. Zielsummen der Erzeugung spielen hier also nur die Rolle einer Richtgröße. Die mathematische Implementierung ist schwierig und wird hier nicht weiter besprochen.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

- **Freie Randsummenbedingungen** stellen den Grenzfall weicher RSB für einen Überlastfaktor $\ddot{u} \rightarrow \infty$ dar. Die Quell- und Zielsummen die Rolle von **Quell- und Zielpotentialen**, welche nicht unbedingt genau eingehalten werden müssen. Typische QZG für weiche bzw. freie Quellsummenbedingungen sind alle, deren Quelle z.B. "S" oder "E" ist, z.B. SW, SA, EW; Die dazu korrespondierenden QZG wie WS, AS oder WE weisen hingegen weiche/freie Zielsummenbedingungen auf. Die jeweils andere RSB ist hart. Nur bei der QZG SS sind sowohl die Quell- als auch die Ziel-RSB weich bzw. frei.

Verständnisfrage:

Machen Sie sich die Gründe dafür klar, dass in der Verkehrsverteilung je nach QZG harte oder weiche RSB verwendet werden.

Da es n^2 Matrixelemente, aber nur $2n - 1$ Randsummenbedingungen (RSB) gibt, ist die Aufgabe ohne weitere Angaben unterbestimmt. Dies kann dazu genutzt werden, *attraktivere* Wege stärker bei der Zielwahl zu gewichten, was zum im nächsten Kapitel vorgestellten Grundmodell der Verteilung führt.

Verständnisfrage:

Warum gibt es nur $2n - 1$ und nicht $2n$ Randsummenbedingungen?

4.2. Grundmodell der Verteilung

Definiert man die Attraktivität der Wege von i nach j durch die Elemente B_{ij} einer **Bewertungsmatrix** und interpretiert B_{ij} als bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach den RSB erlaubter Weg auch tatsächlich durchgeführt wird, so kann man folgendes **Grundmodell der Verkehrsverteilung** herleiten:

$$V_{ij} = V B_{ij} f_i g_j, \quad B_{ij} = B(W_{ij}) \quad \text{Grundmodell der Verteilung} \quad (4.2)$$

Die Herleitung kann dabei mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten und dem Satz von Bayes oder unter Verwendung eines allgemeinen Entropieprinzips erfolgen und ist für Interessierte in den Abschnitten 4.8 bzw. 4.9 dargestellt. Im Rahmen des Kennwertmodells erhält man ein solches Grundmodell getrennt für jede Quelle-Ziel-Gruppe.

Nach dem Grundmodell sind die Verkehrsströme von i nach j

- proportional zum gesamten täglichen Verkehrsaufkommen V (in der jeweiligen Quelle-Ziel Gruppe),
- proportional zur Bewertung B_{ij} bzw. der Attraktivität des entsprechenden Weges,
- und proportional zu zwei multiplikativen Faktoren f_i und g_j , deren Werte sich aus den Quell- und Zielsummen sowie aus der Art der RSB ergeben und häufig direkt

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

proportional zu Q_i bzw. Z_j sind. Wegen dieser doppelten Proportionalität wird das Grundmodell auch als **bilineares Modell** bezeichnet.

Der erste Faktor des Grundmodells, der Gesamtverkehr V , kann als Doppelsumme über die zu bestimmenden Matrixelemente V_{ij} oder auch als Einfachsumme über alle Quellsummen oder Zielsummen dargestellt werden:

$$V = \sum_i \sum_j V_{ij} = \sum_i Q_i = \sum_j Z_j, \quad (4.3)$$

Unabhängig von der Art der RSB ist die Bedingung (4.3) für den Gesamtverkehr immer "hart" erfüllt. Durch die Definition folgender relativer Größen kann man den Gesamtverkehr aus den Gleichungen eliminieren:

$$q_i = \frac{Q_i}{V}, \quad z_j = \frac{Z_j}{V}, \quad v_{ij} = \frac{V_{ij}}{V}. \quad (4.4)$$

Anschaulich bedeuten

- q_i : Anteil des Gesamtverkehrs mit Bezirk i als Quelle,
- z_j : Anteil des Gesamtverkehrs mit Bezirk j als Ziel,
- v_{ij} : Anteil des Gesamtverkehrs mit Bezirk i als Quelle und Bezirk j als Ziel.

Das Grundmodell wird dann einfach

$$v_{ij} = B_{ij} f_i g_j, \quad B_{ij} = B(W_{ij}) \quad (4.5)$$

und die harten RSB lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} \sum_j v_{ij} &= q_i && \text{Quellsummenbedingung,} \\ \sum_i v_{ij} &= z_j && \text{Zielsummenbedingung.} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die weiteren Komponenten des Grundmodells werden in den folgenden Abschnitten 4.3 (Bewertungsmatrix B_{ij}) und 4.5 (Bestimmung der bilinearen Faktoren f_i und g_j aus den RSB) näher beschrieben.

4.3. Attraktivität von Wegen: Widerstandsfunktionen und deren Bewertung

Die Unterbestimmtheit des Verkehrs-Verteilungsproblems erlaubt die Modellierung der Tatsache, dass kürzere Wege bevorzugt werden und deshalb Verbindungen von i nach j , die einen großen **Aufwand** bzw. **Widerstand** W_{ij} nach sich ziehen, eher gemieden werden, zumindest, wenn es die RSB zulassen.

Die Frage, "wie stark" Wege mit kürzerem Aufwand bevorzugt werden und wie dies evtl. von der Quelle-Ziel-Gruppe und/oder vom verwendeten Verkehrsmittel abhängt,

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

wird durch monoton fallende **Bewertungsfunktionen** $B(W)$ charakterisiert. Diese beiden Komponenten der Bewertung der Attraktivität von Wegen werden in der **Bewertungsmatrix**

$$B_{ij} = B(W_{ij}) \quad (4.7)$$

zusammengefasst.

4.3.1. Definition und Ermittlung des Widerstandes

Der Aufwand bzw. Widerstand, manchmal auch als *negative utility* bezeichnet, setzt sich aus mehreren Einflussgrößen zusammen. Da man nach Gl. (4.7) die Bewertungsfunktionen als Funktionen nur einer unabhängigen Variablen (des Widerstandes W) ansetzt, ergibt sich die Notwendigkeit, alle Einflussgrößen des Widerstandes auf eine Einheit, z.B. die Zeiteinheit, umzurechnen. Die *Reisezeit* ist in der Regel das wichtigste Kriterium, so dass sich für den Widerstand Zeiteinheiten (z.B. Minuten) anbieten. Der Widerstand kann z.B. folgende Bestandteile enthalten:

- *Zeitaufwand*: Dies ist die wichtigste und häufig ausschließlich verwendete Einflussgröße.
- *Kosten*. Diese können über einen “Zeit=Geld”-Ansatz mit dem Zeitaufwand “verrechnet” werden. Tendenziell ist der Zeitwert bei den QZG WA (z.B. 20 €/h) höher als bei “unwichtigeren” QZG wie WF oder SS (z.B. 5 €/h).
- *Flexibilität*: Kann ich die Fahrt jederzeit durchführen (Kfz, Rad, Schusters Rappen) oder muss ich mich z.B. auf gewisse Abfahrtszeiten von Bahnen oder Bussen festlegen? Die Kosten mangelnder Flexibilität können auf die Reisezeit abgebildet werden, indem man z.B. die zusätzliche mittlere Wartezeit auf die erste ÖV-Verbindung bei zufälliger Antrittszeit der Fahrt bestimmt.
- *Zuverlässigkeit*: Die Bedeutung dieses Kriteriums für die Verkehrsnachfragemodellierung wurde bisher unterschätzt und ist aktuelles Forschungsthema. Analog zum “Value at Risk” Ansatz der Finanzmathematik kann man das Risiko mangelnder Zuverlässigkeit z.B. dadurch berücksichtigen, dass man bei der Bestimmung der Reisezeit nicht den Mittelwert, sondern z.B. das 99-te Perzentil ansetzt (nur in 1% der Fahrten wird das 99-te Perzentil überschritten).
- Und schließlich *Bequemlichkeit*: Bei gleicher Reisezeit, Kosten und Zuverlässigkeit wird z.B. eine Fahrt ohne Umsteigen günstiger bewertet als eine mit zweimaligem Umsteigen. Dieser Einflussfaktor wird ebenfalls häufig unterschätzt. Man kann ihn z.B. dadurch berücksichtigen, dass man Wartezeiten mit einem Faktor größer 1 gewichtet und außerdem jeden Umsteigevorgang mit einer “Strafzeit” von z.B. 5 Minuten belegt.
- Weitere Kriterien wie z.B. *Opportunität* (“Kann ich auf diesem Weg weitere Aufgaben gleich mit erledigen?”) sind auch wichtig, aber schwer quantifizierbar.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

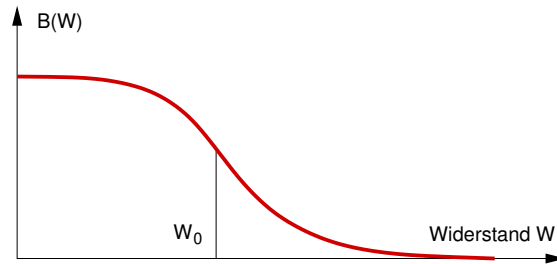


Figure 4.1.: Typisches schematisches Aussehen der Bewertungsfunktion.

Die obige Liste macht klar, dass der Widerstand i.A. nicht nur von den Eigenschaften der Fahrt selbst (wie Länge oder Verkehrsmittel) abhängt, sondern auch von der Quelle-Ziel-Gruppe. Bei der QZG WA beispielsweise wird der Zeit-Ist-Geld-Faktor höher liegen als bei WE oder SS (z.B. 20 €/h gegenüber 5 €/h), so dass Kosten geringer gewichtet werden. Flexibilität wird in WA ebenfalls geringer gewichtet, denn Fahrten dieser Kategorie sind ja i.A. langfristig geplant. Zuverlässigkeit hingegen wird bei WA-Fahrten aus nahe liegenden Gründen hoch gewichtet.

Verständnisfrage:

Warum ist die räumliche Distanz s_{ij} zweier Bezirke bzw. die Länge ihrer Verbindung kein gutes Maß für den Streckenwiderstand? Berücksichtigen Sie dabei die Prognosefähigkeit von Modellen und Abb. 4.2.

4.3.2. Bewertungsfunktionen

Die Bewertungsfunktion $B(W_{ij})$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein von den RSB her erlaubter und damit potenziell möglicher Weg auch tatsächlich durchgeführt wird (vgl. Abschnitt 4.8 weiter unten). Aus dieser Definition sowie dem “Gesunden Menschenverstand” folgen einige Bedingungen für die Bewertungsfunktion $B(W)$ des Widerstandes (vgl. Abb. 4.1):

- Da ein geringerer Widerstand immer höhere Attraktivität aufweist, ist die Funktion $B(W)$ monoton fallend, $B'(W) \leq 0$.
- Für hinreichend hohem Widerstand wird ein Weg irgendwann unter allen Umständen inakzeptabel: $B(W) \rightarrow 0$ für $W \rightarrow \infty$.
- Bei verschwindendem Widerstand wird ein zulässiger Weg in jedem Fall auch durchgeführt: $B(0) = 1$.
- Ferner gibt es bei den meisten Bewertungsmodellen (vgl. Abschnitt 4.6 weiter unten) einen charakteristischen Widerstand W_0 , ab dem die Bewertungsfunktion

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

deutlich abzufallen beginnt, wie in Abb. 4.1 schematisch dargestellt. Der Wert von W_0 liegt typischerweise bei 10 min - 20 min und stellt auch die Größenordnung des mittleren zeitlichen Aufwandes für die entsprechende Wegekategorie dar.

Prinzipiell können Bewertungsfunktionen nur empirisch durch Umfragen oder Verteilungen der Reisezeiten bestimmt werden, was im Abschnitt 4.7 weiter unten näher ausgeführt wird. Insbesondere wird kontrovers diskutiert, ob Bewertungsfunktionen einen Wendepunkt aufweisen sollen, also einen endlichen Widerstandswert mit maximaler Sensitivität bezüglich Widerstandsänderungen, oder ob die maximale Sensitivität beim Widerstand Null liegt.

Abhängigkeit der Bewertung von der Quelle-Ziel-Gruppe

Im Allgemeinen hängen die Bewertungsfunktionen $B(W)$ von den QZG ab. WA-Wege haben typischerweise eine geringere Sensitivität bezüglich des Widerstandes als z.B. WE- oder SS-Wege. Eine geringere Sensitivität bedeutet dabei, dass die Bewertungsfunktion mit W langsamer abfällt und der Mittelwert des Widerstandes höher ist als bei hoher Sensitivität.

Verständnisfrage:

Wie wirkt sich eine geringere Sensitivität bezüglich der Reisezeit auf den Parameter W_0 der meisten Widerstandsfunktionen bzw. auf den mittleren Zeitaufwand aus? Warum haben WA-Wege i.A. einen höheren Wert von W_0 als die meisten anderen QZG?

Abhängigkeit der Bewertung vom Verkehrsmodus

Abbildung 4.2 zeigt, dass die mittleren *täglichen* Reisezeiten vom hauptsächlich verwendeten Verkehrsmittel abhängen, aber innerhalb eines Verkehrsmittels bemerkenswerterweise über viele Jahrzehnte konstant sind.¹ Sie liegen bei "anstrengenderen" Verkehrsmitteln wie "Schusters Rappen" und dem Rad höher als bei MIV oder ÖPNV.

Es wurde gezeigt (Kölbl/Helbing, New Journal of Physics 5, 48.1), dass die Bewertungsfunktionen $B(W)$ sogar weitgehend unabhängig vom Modus werden, wenn man den Widerstand W_{ij} nicht auf die Reisezeit, sondern auf die zur Durchführung der Fahrt benötigte *physiologische Energie* E_{ij} bezieht. Insbesondere fanden die Autoren einen universellen Mittelwert des täglichen, physiologischen Energieverbrauchs von 615 KJ, *unabhängig* vom Modus, also bei drei Fahrten täglich etwa $E(E) = 200$ KJ/Fahrt. Diesen Widerstand kann man anschaulich als Maß für die "Anstrengung" dieser Ortsveränderung verstehen. Da aber natürlich auch E_{ij} vom Verkehrsmittel abhängt, ändert sich nichts an der Abhängigkeit der Attraktivität $B_{ij}^{(k)}$ einer Verbindung

¹Gemäß manchen Quellen lässt sich dieses konstante Reisezeitbudget sogar bis auf die Postkutschenzeit zurückverfolgen!

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

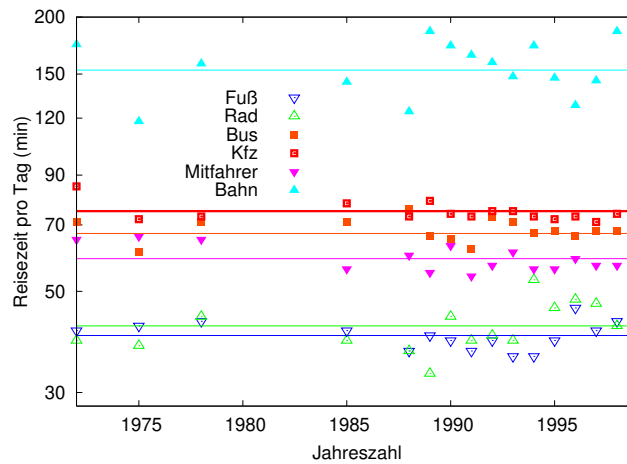


Figure 4.2.: Mittlere tägliche Reisezeiten in Abhängigkeit des hauptsächlich verwendeten Verkehrsmittels.

von i nach j vom Modus. Wegen seiner schlechten Messbarkeit hat der auf den physiologischen Energieverbrauch bezogene Widerstand eher grundsätzliche als praktische Bedeutung.

Zusammenfassend ist die Bestimmung der Attraktivität einer Verbindung ein zweistufiger Prozess: Zuerst bestimmt man den Aufwand anhand verschiedener Einflussgrößen und bewertet diesen im zweiten Schritt. Im Allgemeinen hängen sowohl die Widerstände W_{ij} als auch die Bewertungsfunktion $B(W_{ij})$ dieser Widerstände vom Verkehrsmittel k und der QZG g ab.

Verständnisfrage:

Gilt die im Wesentlichen zeitunabhängige Bewertungsfunktion auch für den Fall, dass man für den Widerstand nicht den Zeitbedarf sondern die Weglänge verwendet? Welche Widerstandsdefinition ist also geeigneter?

Verständnisfrage:

Warum ist bei den Verkehrsmodi "Rad" und "zu Fuß" die Sensitivität bezüglich des Zeitaufwandes W höher bzw. der typische Widerstand W_0 geringer als bei PKW und ÖPNV?

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Aufgabe: Fahrten pro Tag

Für Erwerbstätige bzw. Rentner wurde eine mittlerer tägliche Reisezeit von 70 Minuten bzw. 50 Minuten festgestellt. Wie kann man daraus die mittlere Reisezeit pro Fahrt abschätzen, wenn eine bestimmte QZG-Einteilung (z.B. in 5, 13 oder 19 QZG) und für jede QZG die spezifischen Verkehrsaufkommen bekannt sind?

4.3.3. Lagegunst der Bezirke

Mit der **Bewertungsmatrix** nach Gl. (4.7) ist es möglich, anhand der Attraktivitäten einzelner Verbindungen die **Lagegunst** L_i eines gesamten Bezirks im Planungsgebiet zu definieren. Prinzipiell hängt die Lagegunst eines Bezirks i von allen Elementen der Bewertungsmatrix mit i als Quelle oder Ziel ab:

$$\text{Lagegunst (Bezirk } i) = f(\{B_{ij}\}, \{B_{ji}\}), j = 1, \dots, n.$$

Um zu einer einzigen Maßzahl zu kommen, kann man die Bewertungen der einzelnen Verbindungen mit den Quell- bzw. Zielsummen gewichtet aufsummieren:

$$L_i = \frac{1}{2V} \sum_j (B_{ij}Z_j + B_{ji}Q_j) \quad (4.8)$$

Diese Maßzahl geht von 0 (“in the middle of nowhere”) bis 1 (Zentralbezirk, “da brummt der Bär”). Analog kann man Lagegunstfaktoren nur für den hereinkommenden und herausgehenden Verkehr definieren:

$$L_i^{\text{ein}} = \frac{1}{V} \sum_j B_{ji}Q_j, \quad L_i^{\text{aus}} = \frac{1}{V} \sum_j B_{ij}Z_j. \quad (4.9)$$

4.4. Wechselseitige Abhängigkeiten von Verkehrsverteilung und -Aufteilung

Eng verknüpft mit der Verkehrsverteilung ist die **Verkehrsaufteilung**, bei der man das Verkehrsaufkommen V_{ij} auf die verschiedenen Verkehrsmittel k , auch **Transportmodi** genannt, aufspaltet und welche in Kap. 5 näher betrachtet wird. In der Aufteilung werden z.B. die folgenden Modi berücksichtigt:

- $k = 1$: Fußgänger,
- $k = 2$: Radfahrer,
- $k = 3$: Kfz bzw. motorisierter Individualverkehr (MIV),
- $k = 4$: Bus, Bahn bzw. öffentlicher Personennahverkehr (ÖPNV).

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

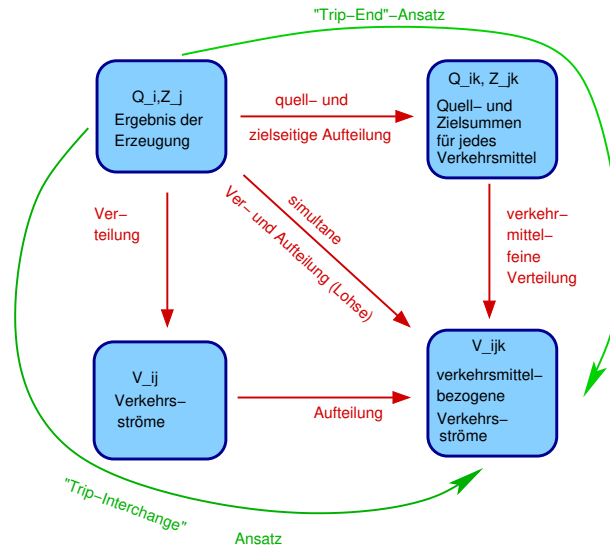


Figure 4.3.: Flussdiagramm des **Trip-Interchange** und **Trip-End-Ansatzes** zur Verkehrsverteilung und Aufteilung sowie der simultane Weg.

Die Liste kann durch weitere Modi wie Motorrad, LKW, Flugzeug, Schiffe oder z.B. "Luftschiffe" erweitert werden.

Die Abhängigkeit der für die Verkehrsverteilung sehr wichtigen Widerstandsfunktion W_{ij} vom verwendeten Verkehrsmittel impliziert eine *wechselseitige Abhängigkeit von Verkehrsverteilung und -aufteilung*, welche prinzipielle Grenzen für die Genauigkeit des hier beschriebenen Verfahrens der getrennten Verteilung und Aufteilung vorgibt: Kaum jemand geht jeden Tag 10 km zu Fuß z.B. zur Arbeit, während dies mit dem Auto übliche Reiseweiten sind (vgl. Abb. 4.10). Nimmt man den Widerstand W_{ij} proportional zur Reisezeit T_{ij} an, ist bei einer festen räumlichen Entfernung s_{ij} die Abhängigkeit von den verschiedenen mittleren Geschwindigkeiten \bar{v}_k der Verkehrsmodi k offensichtlich:

$$W_{ij}^{(k)} \propto T_{ij}^{(k)} = \frac{s_{ij}}{\bar{v}_k}. \quad (4.10)$$

Führt man Verteilung und Aufteilung dennoch getrennt durch, bieten sich zwei Ansätze an (vgl. Abb. 4.3):

- Beim **Trip-Interchange-Ansatz** wird der Verkehr zuerst ohne Berücksichtigung der Verkehrsmittel verteilt und dann auf die Verkehrsmittel aufgeteilt. Dabei ergibt sich bei der *Verteilung* das Problem, bezüglich welchen Modus man die Widerstandsfunktionen und die Bewertung berechnet, da der Modal-Split ja noch nicht bekannt ist. In der Praxis behilft man sich häufig mit einer pauschalen Bewertung eines für alle Modi gültigen Widerstandsmaßes wie der Luftlinienentfernung und kalibriert die Modellparameter der Verteilung z.B. auf die empirisch erfassbare Reiseweitenverteilung (Abb. 4.10 und Abschnitt 4.7).

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Die nachfolgende *Aufteilung* wird separat für jede Quelle-Ziel-Beziehung $i \rightarrow j$ (und jede Quelle-Ziel-Gruppe g) durchgeführt und ist problemlos, da die Widerstandsfunktionen bekannt sind.

- Beim **Trip-End-Ansatz** werden zuerst die Quell- und Zielsummen aufgeteilt und dann die verkehrsmittelaufgelösten Quell- und Zielsummen separat verteilt. Da im initialen *Aufteilungs-Schritt* die dafür eigentlich notwendigen Widerstände noch nicht bekannt sind (da die Quelle-Ziel-Beziehungen ja noch nicht bestimmt wurden!), nimmt man deshalb *a priori* eine feste Aufteilung an, welche dem flussgewichteten Mittelwert der Aufteilungen über alle Verkehrsströme, dem sog. **globalen Modal-Split**, entspricht. Im **Analysefall** bestimmt man ihn getrennt für jede Quelle-Zielgruppe, d.h. man bestimmt die Anteile $A_k^{(g)}$ an Verkehrsmittel k in der QZG g durch die relativen Häufigkeiten einer empirische Befragung. Im **Prognosefall** behält man diese Anteile im einfachsten Fall bei oder schreibt einen Trend linear fort.

Die folgende *Verteilung* wird separat für jeden Modus durchgeführt und ist, wegen der Möglichkeit, die Widerstände verkehrsmittelspezifisch anzugeben, problemlos.

Naturgemäß eignen sich Trip-Interchange-Modelle relativ gut zur Bestimmung des zukünftigen Modal-Splits und sind für die Prognose des zukünftigen Verkehrsaufkommens und der Reiseweitenverteilung eher ungünstig. Bei den Trip-End Modellen liegen die Verhältnisse genau ander herum.

In Kapitel 6 wird eine von Prof. Lohse entwickelte Verallgemeinerung dieser Verfahren, die **simultane Ver- und Aufteilung** vorgestellt, welche die obigen konzeptionellen Probleme überwindet. Gerade der Trip-Interchange-Ansatz ist jedoch nach wie vor ein Standardverfahren der Verkehrsplanung

4.5. Lösungsmethoden

Nach dem Grundmodell 4.2 ist das Verkehrs-Verteilungsproblem auf die Ermittlung der bis jetzt unbekannt bilinearen Multiplikatoren f_i und g_j reduziert. Diese werden durch Einsetzen des Grundmodells in die Randsummenbedingungen (RSB) (4.1) bestimmt. Wie in Abschnitt 4.1 diskutiert, sind je nach QZG “harte” oder “weiche” RSB dem Sachverhalt angemessen:

- Beidseitig harte RSB, wenn die Wege “verpflichtend” sind, z.B. WA oder WB,
- quellseitig hart und zielseitig weich/frei bei QZG des Typs I mit “flexiblen” Ziel, z.B. WE, WS, AS,
- quellseitig weich/frei und zielseitig hart bei den korrespondierenden QZG des Typs II (EW, SW, SA),
- beidseitig weich/frei bei der QZG “SS”.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Während bei den harten RSB die Quell- bzw. Zielsummen exakt eingehalten werden, stellen sie für weiche RSB nur einen "Anhaltspunkt" dar, welcher innerhalb einer durch einen Überlastfaktor definierten Obergrenze überschritten werden darf. Da die Berechnung mit endlichem Überlastfaktor sehr komplex ist, wird hier nur der Spezialfall "freier" RSB mit unendlichem Überlastfaktor behandelt.² Aus den Quell- bzw. Zielsummen wird dann ein **Quellpotential** \tilde{Q}_i bzw. **Zielpotential** \tilde{Z}_j , welches in der Erzeugung prinzipiell wie die harten Quell- und Zielsummen berechnet wird, aber die Berechnung der Multiplikatoren f_i und g_j beeinflusst:

4.5.1. Quellseitig und zelseitig weiche RSB (globale Fixierung)

Wegen des Fehlens harter RSB sind die Verkehrsströme V_{ij} direkt proportional zu den Quell- und Zielpotentialen:

$$V_{ij} = cB_{ij}\tilde{Q}_i\tilde{Z}_j. \quad (4.11)$$

Die Proportionalitätskonstante c ergibt sich durch Einsetzen dieses Ansatzes in die einzige harte Bedingung (4.3) eines festen Gesamtverkehrs V . Damit ergibt sich die Lösung

$$V_{ij} = \frac{VB_{ij}\tilde{Q}_i\tilde{Z}_j}{\sum_{k,l} B_{kl}\tilde{Q}_k\tilde{Z}_l} \quad (4.12)$$

4.5.2. Quellseitig harte und zelseitig weiche RSB (quellseitige Fixierung)

Hier werden die harten Quell-RSB durch die Multiplikatoren f_i berücksichtigt, während die Ziel-RSB wie oben durch die weichen Zielpotentiale \tilde{Z}_j definiert sind:

$$V_{ij} = B_{ij}f_i\tilde{Z}_j. \quad (4.13)$$

Nachdem die f_i durch die Quellsummenbedingungen

$$\sum_j V_{ij} = f_i \sum_j B_{ij}\tilde{Z}_j = Q_i$$

bestimmt wurden, erhält man nach Einsetzen die Elemente der Verkehrsstrommatrix

$$V_{ij} = \frac{B_{ij}Q_i\tilde{Z}_j}{\sum_k B_{ik}\tilde{Z}_k}. \quad (4.14)$$

Diese Formel besagt, dass die Randsummenbedingungen bezüglich der Ziele nicht erfüllt werden. Die einzelnen Zielsummen gehen jedoch nicht verloren. Haben insbesondere zwei Bezirke j und $j' \neq j$ dieselbe **Lagegunst** L_i^{ein} bezüglich hereinkommenden Verkehr, z.B. gemäß Gl. (4.9), so steigt die Zielsumme $\sum_i V_{ij}$ direkt proportional zur in der Erzeugung berechneten Zielsumme Z_j , welche nun als Potenzial \tilde{Z}_j dient. Im Normalfall

²In PTV-Viseva ist der Fall endlicher Überlastfaktoren berücksichtigt.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

unterschiedlicher Lagegunst dienen die Zielsummen als Ausgangspunkt, werden aber zugunsten der Bezirke mit vergleichsweise großer Lagegunst verschoben. Die Gesamt-Zielsumme $\sum_j Z_j = V$ bleibt natürlich weiterhin exakt erfüllt. Damit ist klar, dass eine lediglich quellseitige Kopplung dann in Frage kommt, wenn die Verkehrsströme quellseitig hart (Wohnen, Arbeit), zielseitig aber flexibel sind (Einkaufen, Freizeit).

4.5.3. Quellseitig weiche und zielseitig harte RSB (zielseitige Fixierung)

Hier werden gegenüber Fall (ii) Quellen und Ziele vertauscht. Der Ansatz

$$V_{ij} = B_{ij} \tilde{Q}_i g_j \quad (4.15)$$

liefert nach Ermitteln von g_j unter Berücksichtigung der Ziel-RSB die Verkehrsstrommatrix

$$V_{ij} = \frac{B_{ij} \tilde{Q}_i Z_j}{\sum_k B_{kj} \tilde{Q}_k}. \quad (4.16)$$

Analog zum vorhergehenden Fall kommt diese Kopplung für Verkehrsströme mit “weichen” Ausgangspunkten, aber “harten” Zielpunkten in Frage.

4.5.4. Beidseitig harte RSB (beidseitige Fixierung bzw. Kopplung)

Hier gelten sowohl Quell-RSB als auch Ziel-RSB hart und Einsetzen des Grundmodell-Ansatzes (4.2) in die RSB (4.1) liefert ein **bilineares Gleichungssystem** für die $2n$ Unbekannten f_i und g_j . Mit folgenden Definitionen relativer Flüsse (Verkehrsflussanteile)

$$q_i = \frac{Q_i}{V}, \quad z_j = \frac{Z_j}{V}, \quad v_{ij} = \frac{V_{ij}}{V} \quad (4.17)$$

erhält man aus den umformulierten RSB $\sum_j v_{ij} = q_i$ bzw. $\sum_i v_{ij} = z_j$ das System

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{q_i}{\sum_j B_{ij} g_j}, \\ g_j &= \frac{z_j}{\sum_i B_{ij} f_i}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dessen Lösung ist nur iterativ, z.B. durch sukzessives Einsetzen der jeweils aktuellsten Lösungssiteration der Faktoren f_i bzw. g_j in die rechten Seiten von (4.18) möglich. Für die m -te Iteration ergibt sich

$$\begin{aligned} f_i^{(m)} &= \frac{q_i}{\sum_j B_{ij} g_j^{(m-1)}}, \\ g_j^{(m)} &= \frac{z_j}{\sum_i B_{ij} f_i^{(m)}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Für den Start (“Nullte” Iteration, Superskript (0)) muss man Anfangswerte vorgeben, welche in weitem Rahmen beliebig gewählt werden können, z.B.

$$f_i^{(0)} = g_i^{(0)} = 1.$$

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

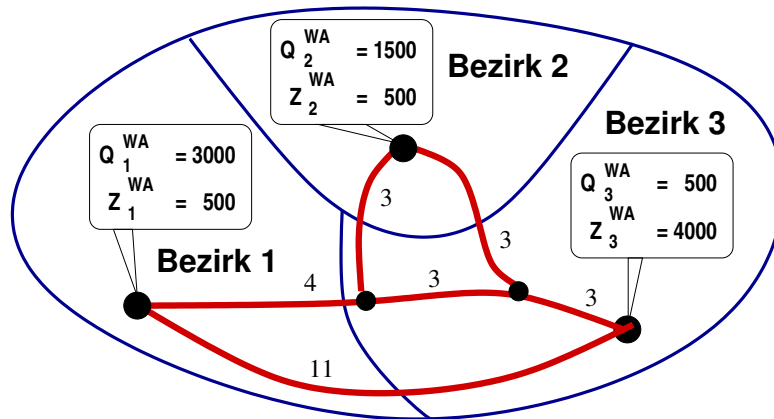


Figure 4.4.: Untersuchungsgebiet für die Beispielsrechnung zur Verteilung bei harten Quell- und Zielsummenbedingungen

Als Beispiel wird die Zielwahl (Verkehrsverteilung) der Quelle-Ziel-Gruppe "WA" für das **Wilson-Modell** (vgl. S. 76) anhand des in Abb. 4.4 definierten Untersuchungsgebiets durchgeführt. Die (kürzesten) Reisezeiten zwischen den Anbindungspunkten der drei Bezirke ergeben sich direkt aus dieser Abbildung. In Minuten: $T_{12} = T_{21} = 7$, $T_{13} = T_{31} = 10$ und $T_{23} = T_{32} = 6$. Die Quell- und Zielsummen wurden bereits im vorhergehenden Schritt der Aktivitätenwahl ermittelt. Mit dem Gesamtverkehrsaufkommen $V = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 5000$ ergeben sich die relativen Quell- und Zielsummen zu

$$q_1 = 0.6, \quad q_2 = 0.3, \quad q_3 = 0.1,$$

$$z_1 = 0.1, \quad z_2 = 0.1, \quad z_3 = 0.8.$$

Mit dem Wilson-Modell und dem Modellparameter $\beta = 0.1 \text{ min}^{-1}$ ergeben sich zunächst die Elemente der Bewertungsmatrix $B_{ij} = e^{-\beta T_{ij}}$ zu

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0.4966 & 0.3679 \\ 0.4966 & 0 & 0.5488 \\ 0.3679 & 0.5488 & 0 \end{pmatrix}$$

Man startet die Iteration mit $f_i = g_i = 1$ und setzt die *jeweils aktuellsten* Werte von f_i

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

und g_i fortlaufend in (4.19) ein:

Iteration	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	$f_1 = 1$	$f_2 = 1$	$f_3 = 1$
0	$g_1 = 1$	$g_2 = 1$	$g_3 = 1$
1	$f_1 = 0.321808176647478$	$f_2 = 0.146670797315656$	$f_3 = 0.0521732485668318$
1	$g_1 = 0.241641497008773$	$g_2 = 0.298410105823893$	$g_3 = 3.18655908107113$
2	$f_1 = 0.384099031406901$	$f_2 = 0.138425776173922$	$f_3 = 0.0290763184178919$
2	$g_1 = 0.215733059387455$	$g_2 = 0.289753337754216$	$g_3 = 3.24743684082831$
3	$f_1 = 0.386029450360936$	$f_2 = 0.137670610406493$	$f_3 = 0.028687649604386$
3	$g_1 = 0.215077700082051$	$g_2 = 0.289761611156671$	$g_3 = 3.2486626136856$
4	$f_1 = 0.386079207727287$	$f_2 = 0.137648151373062$	$f_3 = 0.028679510817527$
4	$g_1 = 0.21506122851403$	$g_2 = 0.289763472532253$	$g_3 = 3.24869110728804$

Offensichtlich wird bereits nach vier Iterationen eine Konvergenz bis zur fünften signifikanten Stelle erreicht. Setzt man die Ergebnisse der letzten Iteration für f_i und g_i in (4.2) ein, erhält man die Verkehrsstrommatrix für die QZG WA:

V_{ij}	1	2	3	Q_i
1	415.15	277.77	2307.07	3 000
2	73.50	199.43	1227.08	1 500
3	11.35	22.80	465.85	500
Z_j	500	500	4 000	5 000

Die Zeilen- und Spalten-Randsummen wurden als Test der Konvergenz des Verfahrens ebenfalls mit angegeben. Bereits nach 4 Iterationen sind die harten Randsummenbedingungen auf sechs signifikante Stellen erfüllt.

Verständnisfrage:

Entsprechen die Lösungen (4.12), (4.14) und (4.16) jeweils der Struktur des Grundmodells? Wie sehen ggf. jeweils die Multiplikatoren f_i und g_j aus?

4.6. Spezielle Verteilungsmodelle

Die Modelle unterscheiden sich neben der gerade besprochenen Art der Kopplung an die Quell- und Zielsummen und der Definition des Widerstandes W (Abschnitt 4.3) vor Allem durch die funktionale Form der *Bewertungsfunktion* $B(W)$.

Zufallsmodell

Im **Zufallsmodell** sind alle Wege gleich attraktiv:

$$B(W_{ij}) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad V_{ij} = \frac{Q_i Z_j}{V} \quad \text{Zufallsmodell.} \quad (4.20)$$

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

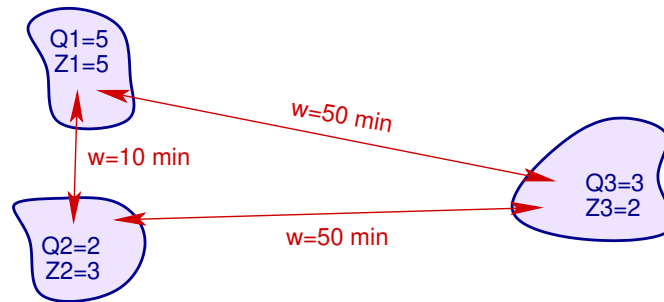


Figure 4.5.: Verteilung bei drei Bezirken mit vorgegebenen Widerständen, Quell- und Zielsummen (bzw. -potentialen im Falle weicher RSB).

Dies ist allenfalls realistisch in sehr kleinräumigen Untersuchungsgebieten, in denen Entfernungen eine untergeordnete Rolle spielen. Die Lösungsformeln für die Verkehrsstrommatrix des Zufallsmodells sind, im Gegensatz zu anderen Bewertungsfunktion, für alle vier der in Abschnitt 4.2 beschriebenen Ankopplungen (i)-(iv) an die Randsummen dieselben. Man muss nur ggf. Quell- und Zielsummen durch die entsprechenden Potentiale ersetzen.

Aufgabe: Lösung des Zufallsmodells

Leiten Sie die Lösung (4.20) für das Zufallsmodell $B_{ij} = 1$ mit beidseitiger Fixierung aus den Formeln (4.19) her. *Hinweis:* In diesem Fall ist keine Rekursion notwendig, sondern man erhält direkt $f_i = c_1 q_i$ und $g_j = c_2 z_j$ mit zwei Konstanten c_1 und c_2 .

Verständnisfrage:

Machen Sie sich klar, dass man für die verschiedenen, in Abschnitt 4.5 dargestellten Ankopplungen an weiche und harte RSB stets eine Lösungsfunktion der Form (4.20) bekommt, wobei man ggf. die Quell- und Zielsummen durch die entsprechenden Potentiale ersetzt.

Aufgabe: Konkrete Verteilung mit dem Zufallsmodell

Berechnen Sie die Verkehrsstrommatrix V_{ij} für ein aus drei Bezirken bestehendes Untersuchungsgebiet gemäß Abb. 4.5!

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

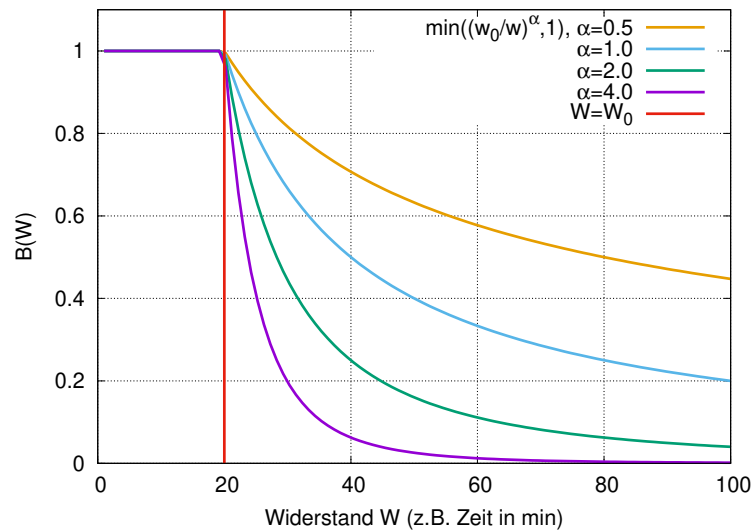


Figure 4.6.: Klassisches Gravitationsmodell mit der Bewertungsfunktion $B(W) = (W_0/W)^E$.

Gravitationsmodell

Im **klassischen Gravitationsmodell** ist die Bewertungsfunktion durch die Potenzfunktion

$$B(W) = \min \left(\left(\frac{W_0}{W} \right)^E, 1 \right); \quad E > 0 \quad (4.21)$$

gegeben.³ Hierbei gibt der charakteristische Widerstand W_0 den Widerstandswert an, bei dem die Bewertungsfunktion=1 ist. Das Modell hat seinen Namen aufgrund der Analogie mit dem **Gravitationsgesetz** der Physik,

$$F_{\text{grav}} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$

mit der Gravitationskonstante γ und den beiden Massen m_1 und m_2 im Abstand r . Diese Beziehung entspricht in (4.21) dem Exponenten $E = 2$. Verallgemeinerungen mit beliebigen Exponenten $E > 0$ werden aber auch als “klassisches Gravitationsmodell” bezeichnet. Auch allgemeinere Widerstandsfunktionen wie die des weiter unten besprochene Logit-Modells oder des EVA-Modells werden bisweilen als (**verallgemeinerte**) **Gravitationsmodelle** bezeichnet.

Abb. 4.6 zeigt, dass die Abstandsabhängigkeit mit wachsendem Exponenten immer ausgeprägter wird. Für kleine Untersuchungsgebiete (z.B. kleine Kreisstädte), bei denen auch die größten Entfernungen noch akzeptabel sind, nimmt man daher kleine Exponenten (z.B. $E = 0.5$) an, während für große Untersuchungsgebiete wie den Großraum

³wobei die Begrenzung durch die Minimum-Funktion teils unkorrekterweise weggelassen wird.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Dresden höhere Werte (z.B. $E = 3$) dem Sachverhalt angemessen sind. Für $E = 0$ wird das klassische Gravitationsmodell zum Zufallsmodell.

Das klassische Gravitationsmodell hat einige Nachteile, weshalb es für ernsthafte Anwendungen nicht mehr eingesetzt wird und für sehr kleine Untersuchungsgebiete sogar das Zufallsmodell vorzuziehen ist:

- $B(W)$ ist, je nach Formulierung, entweder nicht auf Werte ≤ 1 beschränkt, wodurch sehr kleine Wege unverhältnismäßig stark bevorzugt werden, oder es gibt beim Widerstand eine unnatürliche abrupte Änderung der Attraktivitätsbewertung.
- die zur Bewertungsfunktion gehörige **Elastizitätsfunktion**

$$\epsilon_B(W) = \frac{d \ln B(W)}{d \ln W} = \frac{W}{B} \frac{dB(W)}{dW} = E \quad (4.22)$$

ist konstant, was nicht den Beobachtungen entspricht. Ein Beispiel für $E = 1$ verdeutlicht dies:

- Vergleicht man zwei Wege mit $W_1 = 1$ min und $W_2 = 2$ min, so gilt $B(W_1) = 2B(W_2)$, also wird der eine Minute lange Weg doppelt so hoch bewertet wie der 2 Minuten lange, obwohl dieser Unterschied *in praxi* irrelevant ist. Der Quotient sollte also nicht stark von 1 verschieden sein (vgl. Abb. 4.1).
- Gilt dagegen $W_1 = 120$ min und $W_2 = 240$ min, so ist der Quotient der Bewertungen $B(W_1)/B(W_2)$ ebenfalls =2. In diesem Falle ist jedoch der Weg 2 mit 240 Minuten prohibitiv lang (es handelt sich ja um *einen* Weg, z.B. einen WA-Weg!), während 120 min im Extremfall, zumindest kurzfristig und für WA-Wege, gerade noch akzeptabel sein kann. Der Quotient sollte also in diesem Fall viel größer als 2 sein.

Für große Widerstände (lange Wege) kann durch einen Exponenten $E > 1$ eine akzeptable Modellierung erreicht werden.

Aufgabe: klassisches Gravitationsmodell

Berechnen Sie die Verkehrsstrommatrix V_{ij} für das Untersuchungsgebiet gemäß Abb. 4.5 bei quellseitig harten und zielseitig weichen RSB mit dem klassischen Gravitationsmodell und den Parametersätzen

(i) $W_0 = 10$ min, $E = 1$,

(ii) $W_0 = 10$ min, $E = 2$.

Werden die langen Wege von und zu Bezirk 3 für $E = 2$ weniger benutzt als für $E = 1$? Wenn ja, wo fließt dann der Rest des fest vorgegebenen Quellverkehrs hin? Vergleichen Sie auch mit dem Ergebnis des Zufallsmodells und mit dem Gravitationsmodell für quellseitig *weiche* und zielseitig *harte* Kopplung!

Hinweis: Nehmen Sie innerbezirkliche Widerstände $W_{ii} = 0$ min an.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

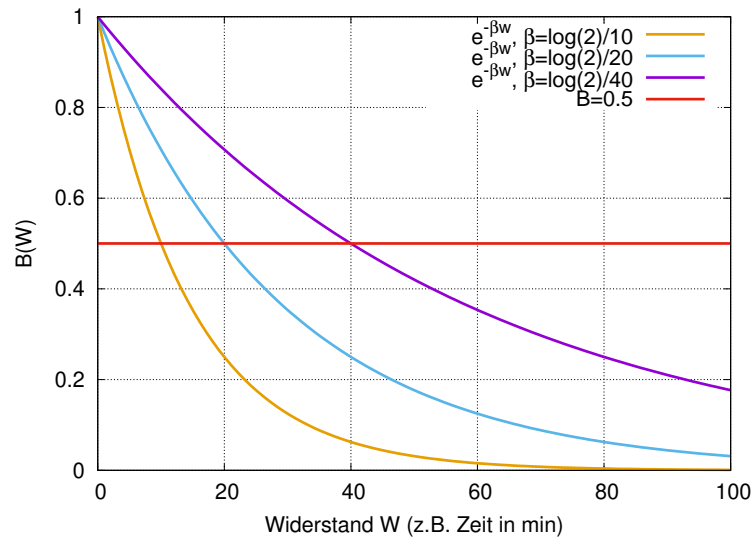


Figure 4.7.: Logitmodell mit der Bewertungsfunktion $B(W) = e^{-\beta W}$.

Logit- Modell bzw. Modell von Wilson

Das **Logit-Modell der Verteilung** ist durch die **exponentielle Bewertungsfunktion**

$$B(W) = e^{-\beta W} \quad (4.23)$$

charakterisiert. Interessanterweise kann diese Form der Bewertungsfunktion zusammen mit den Grundgleichungen der Verteilungen aus dem **Wilson'schen Entropieansatz** hergeleitet werden, vgl. Abschnitt 4.9.1.

Der Exponent β charakterisiert dabei typische Widerstände, bei denen sich die Attraktivität von Wegen merklich verschlechtert. Insbesondere ist der "Halbwerts-Widerstand" $W_{1/2}$, bei dem die Bewertung vom Maximalwert 1 auf die Hälfte gefallen ist, durch

$$W_{1/2} = \frac{\ln 2}{\beta} \quad (4.24)$$

gegeben (vgl. Abb. 4.7). Das Logit-Modell der Verteilung hat folgende Eigenschaften:

- Für kleine Widerstände ist die Funktion konsistent mit den Beobachtungen: Es gilt $B(0) = 1$ und $B'(0) = -\beta$.
- Für große Widerstände ist problematisch, dass das Bewertungs-*Verhältnis* $B(W_1)/B(W_2)$ nur von der *Differenz* der Widerstände abhängt. Falls $W_2 = W_1 + \Delta W$ mit $\Delta W = \text{const}$, so gilt

$$\frac{B(W_2)}{B(W_1)} = \frac{B(W_1 + \Delta W)}{B(W_1)} = \frac{e^{-\beta(W_1 + \Delta W)}}{e^{-\beta W_1}} = e^{-\beta \Delta W} = \text{const.}$$

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Beispiel mit $\beta = \ln 2/10$ min und $\Delta w = 10$ min: In diesem Falle gilt $B(W_2) = 2B(W_1)$, der kürzere Weg wird also doppelt so hoch bewertet. Während dies beim Vergleich eines 10 min langen und 20 min langen Weges realistisch erscheint, ist der subjektive Unterschied beim Vergleich eines 110 min langen mit einem 120 min langen Weg nicht mehr so hoch.

Die Eigenschaften der Exponentialfunktion sind also komplementär zu denen der Potenzfunktion: geeignet für kleine Widerstände und ungeeignet für sehr große. Dies wird am Beispiel der empirischen Reisezeitverteilung in Abb. 4.13 im Vergleich mit der aus dem Logit-Modell berechneten theoretischen Verteilung mit der Dichtefunktion $f(W) \propto WB(W)$ (vgl. Abschnitt 4.7) klar: Für Widerstände (Reisezeiten) kleiner als der vierfachen mittleren Reisezeit ist die Übereinstimmung gut (linkes Bild), für größere Widerstände gibt es starke Abweichungen (rechtes Bild). Um eine für alle Modi vereinheitlichte Darstellung zu erhalten, wurde als unabhängige Variable der auf das arithmetische Mittel bezogene **skalierte Widerstand**

$$w = \frac{W}{E(W)} \quad (4.25)$$

gewählt. In dieser Darstellung ist β durch den beobachteten Mittelwert $E(W)$ fixiert, es gibt also *keinen* Fitparameter!

Modell von Wilson als restringiertes Multinomiales Logit-Modell. Das Grundmodell (4.2) bzw. (4.5) mit (4.23) stellt im Wesentlichen die Auswahlwahrscheinlichkeiten des normalen Multinomial-Logit-Modells (MNL) dar, allerdings mit zusätzlichen Multiplikatoren, welche die Nebenbedingungen (4.6) berücksichtigen: Identifiziert man den mit der Sensitivität β multiplizierten Wegewiderstand $\beta W_{ij} = -U_{ij}^{\text{det}}$ mit der negativen deterministischen Nutzenfunktion des MNL, lauten die Auswahlwahrscheinlichkeiten des normalen unrestringierten MNL

$$P_{ij} = v_{ij} = \frac{V_{ij}}{V} = \frac{\exp(-\beta W_{ij})}{\sum_{kl} \exp(-\beta W_{kl})} = c \exp(-\beta W_{ij})$$

Durch die Randsummenbedingungen werden aus der Konstanten c die beiden Multiplikatoren f_i und g_j , siehe auch die Abschnitte 4.5.4 und 4.9.1.

Aufgabe: Rechenbeispiel für das Logitmodell

Berechnen Sie die Verkehrsverteilung für das Untersuchungsgebiet gemäß Abb. 4.5 für das Wilson-Modell ($\beta^{-1} = 10$ min) für quelseitig weiche und zielseitig harte RSB!

Auf die EFG-Funktion (EVA-Funktion) basierendes Modell

Bei der Entwicklung der von Prof. Lohse vorgeschlagenen **EFG-Funktion** (benannt nach ihren Parametern, manchmal auch als **EVA-Funktion** bezeichnet), wurde ver-

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

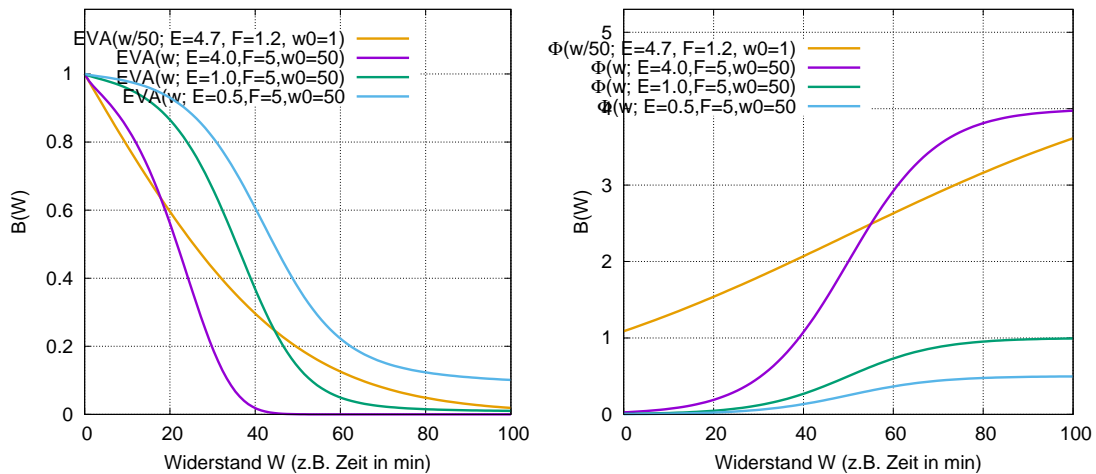


Figure 4.8.: Die EFG- oder EVA-Funktion $B(W)$ (links) und der dazugehörige Exponent Φ (rechts). Die jeweils erste Kurve entspricht den kalibrierten Werten der Abb. 4.10.

sucht, die positiven Eigenschaften der Potenzfunktion für große Widerstände mit einem plausiblen Verhalten für kurze Entfernungen zu verknüpfen. Konkrete soll diese Funktion folgende Vorgaben erfüllen:

- monoton fallend,
- das Verhalten bei kleinen Widerständen ist durch $B(0) = 1$, $B'(0) < 0$ und $B''(0) < 0$ charakterisiert,
- es gibt einen charakteristischen Widerstand W_0 , ab dem Wege deutlich unattraktiver werden,
- das asymptotische Verhalten für große Widerstände ist das einer Potenzfunktion: $B(W) \propto W^{-E}$ für $W \gg W_0$.

Dies wird durch folgende Funktion erfüllt:

$$B_{\text{EVA}}(W) = \frac{1}{(1+w)^{\phi(W)}} \quad (4.26)$$

mit dem Exponenten

$$\phi(W) = \frac{E}{1 + e^{F(1-\frac{W}{W_0})}} \quad (4.27)$$

Im Wesentlichen beschreibt Gl. (4.26) eine Potenzfunktion, allerdings mit variablem und mit W ansteigenden Exponenten $\Phi(W)$. Manchmal wird der dritte Parameter W_0 auch durch $G = FW_0$ ersetzt, daher kommt auch der Name 'EFG-Funktion'.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

- Prinzipiell verhält sich die EVA-Funktion wie ein klassisches Gravitationsmodell (4.21) mit selber Bedeutung der typischen Reiseweite W_0 und des Exponenten E , allerdings mit weichem Übergang in der Nähe von $W = W_0$.
- Der stärkste Anstieg von $\Phi(W)$, also der Wendepunkt, ist durch den Parameter W_0 gegeben.⁴
- Wie steil $\Phi(W)$ in der Nähe von W_0 ansteigt (bzw. $B(W)$ abfällt), ist durch den Parameter F charakterisiert. Je größer F , desto steiler der Anstieg von Φ bzw. der Abfall von B bei $W = W_0$ und desto flacher sind beide Kurven für sehr kleine Widerstände. Die Zone des steilen Abfalls hat etwa die Breite von W_0 für F im Bereich 3-4.
- Für $W \gg W_0$ nähert sich $\Phi(W)$ seiner Asymptote E an. Für diesen Fall kann man in (4.26) auch 1 gegenüber W vernachlässigen, so dass sich das gewünschte Potenzgesetz-Verhalten $B \propto W^{-E}$ ergibt, also "Heavy tails" für große Widerstände in der Verteilungsfunktion (vgl. Abb. 4.10).
- Für $W \rightarrow 0$ hingegen ergibt sich unabhängig von $\Phi(0)$ der Wert $B(W) = 1$.

Typische Werte sind $E = 3$, $F = 5$ und $W_0 = 30$ min. Der Wert von W_0 entspricht in etwa dem mittleren Widerstand, ist also für Fußgänger und Radfahrer niedriger als für Kfz und ÖV (vgl. Abb. 4.2). Manchmal wird der Parameter W_0 mittels der Definition $W_0 = F/G$ durch den Parameter G ersetzt, dieser ist aber weniger anschaulich.

Konzeptionell problematisch an der EFG-Funktion ist der Faktor $(1+w)$ in (4.26), da der Widerstand W im Allgemeinen einheitenbehaftet ist (z.B. 1 Minute) und damit – im Gegensatz zu allen anderen vorgestellten Bewertungsfunktionen – eine Einheitenänderung (z.B. auf Stunden oder auch auf Energieeinheiten) eine nicht durch Neuanpassung der Parameter korrigierbare *Änderung der funktionalen Form* bewirkt. Dies lässt sich nur dadurch korrigieren, dass man anstelle von $B_{\text{EVA}}(W; E, F, W_0)$ die Funktion

$$\tilde{B}_{\text{EVA}}(W; E, F, W_0) = B_{\text{EVA}}(W/W_0; E, F, 1) \quad (4.28)$$

betrachtet, welche sich mittels W_0 an verschiedene Einheiten skalieren lässt. Im Gegensatz zur ursprünglichen Funktion lässt sich diese Funktion auch viel besser an die empirischen Daten der Abb. 4.10 anpassen (das Ergebnis ist die jeweils erste Kurve in Abb. 4.8).

4.7. Empirische Bestimmung der Bewertungsfunktion



Abbildungen 4.10 und 4.11 zeigen, dass die Form der *Verteilung* der Reisezeiten und Reiseweiten pro Fahrt für alle Verkehrsmittel und in verschiedenen Ländern ähnlich

⁴ W_0 ist i.A. jedoch *nicht* der Wendepunkt der EVA-Funktion selbst!

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

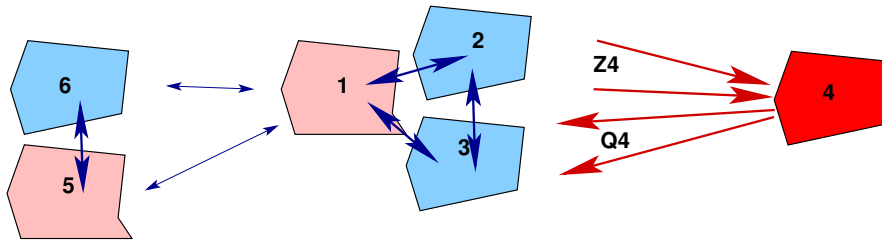


Figure 4.9.: Die Quellsummen und Zielsummenbedingungen erzwingen für abgelegene Bezirke, hier Bezirk 4, auch die Benutzung langer, unattraktiver Wege.

ist, was auf eine einheitliche Form der Bewertungsfunktion schließen lässt. Dies wird deutlich, wenn man den Widerstand skaliert, auf den für das jeweilige Verkehrsmittel geltenden *mittleren Widerstand* $E(W)$ darstellt (Abb. 4.13 weiter unten). Die Parameter, insbesondere der typische Widerstand W_0 als Maß für den mittleren Widerstand bzw. Zeitbedarf eines Weges, hängt jedoch im Allgemeinen von der QZG und dem Verkehrsmittel ab, vgl. Abbildung 4.2.

Beim Vergleich der Dichten der empirischen Reisezeit- bzw. Widerstandsverteilungen fällt sofort auf, dass diese nicht proportional zu den Bewertungsfunktionen $B(W)$ sind: Während bei verschwindendem Widerstand die Bewertung $B(0) = 1$ maximal ist, fällt dort die Dichte der Reisezeitverteilung auf Null ab. Wie kann das sein, wo doch $B(W)$ als Wahrscheinlichkeit für die Realisierung eines Weges angesehen werden kann und wir $B(W)$ mit Hilfe der Reisezeitverteilung kalibrieren wollen?

Die Lösung besteht darin, dass die Reisezeitverteilungsdichte $f(W)$ nicht nur von der Bewertungsfunktion $B(W)$, sondern auch von den RSB (vgl. Abb. 4.9) sowie der Infrastruktur (Abb. 4.12) abhängt: Da nach Abschnitt 4.8 die Bewertungsfunktion die *bedingte* Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass ein von den RSB her erlaubter Weg auch tatsächlich durchgeführt wird, ist die Reisezeitverteilungsdichte $f(W)$ proportional zum *Produkt* aus $B(W)$ und der Dichte $\rho(W)$ an erlaubten Wegen mit Widerstand W . Da $\rho(W) \rightarrow 0$ für $W = 0$ (es gibt keine erlaubten Wege mit Reisezeit = 0, wenn man von *Beamen* absieht!), wird das empirische Ergebnis plausibel. Für eine konkrete Berechnung treffen wir folgende vereinfachende Annahmen:

- Ein Verteilungsmodell mit globaler oder quellseitiger Fixierung nach (4.12) bzw. (4.14) und zu bestimmender Bewertungsfunktion $B(W_{ij})$ bzw. $B(W)$,
- Bezirke mit identischer Raumstruktur, so dass die Erzeugung $Q_i = Q$ und $Z_j = Z$ ergibt.

Nach Gl. (4.14) ist der Verkehrsstrom von i nach j durch

$$V_{ij} = \frac{B_{ij} Q_i \tilde{Z}_j}{\sum_k B_{ik} \tilde{Z}_k} \quad (4.29)$$

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

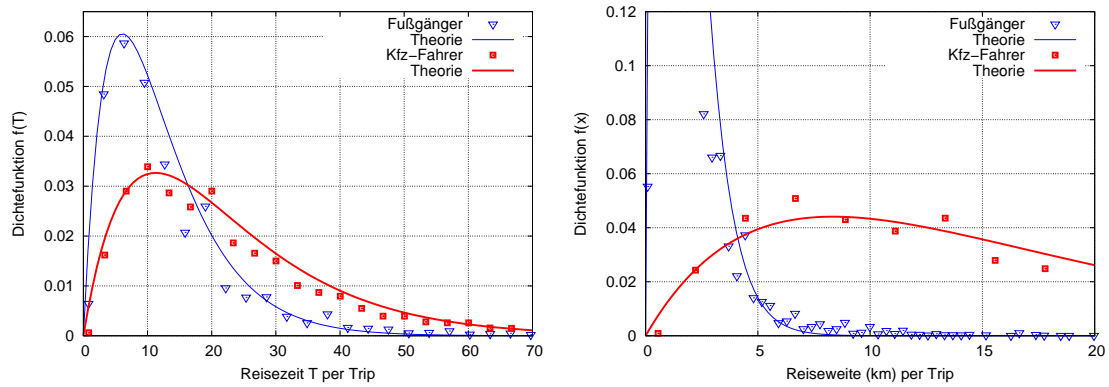
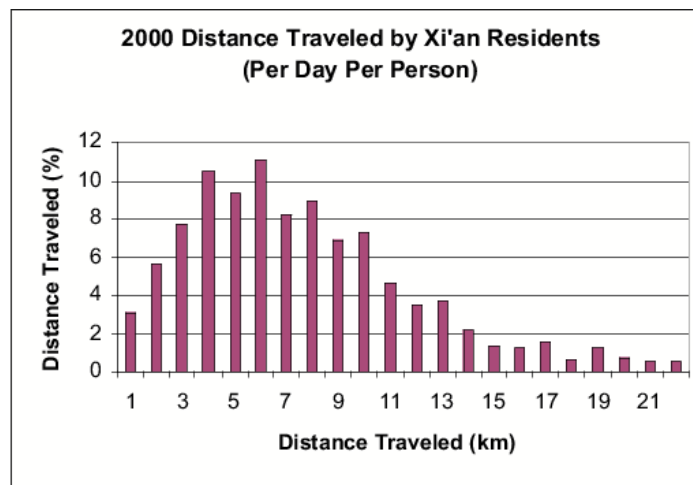


Figure 4.10.: Empirisch aus Umfragen gewonnene Reisezeit-Verteilungen (links) und Reiseweiten-Verteilungen (rechts). Die Symbole stammen jeweils aus empirischen Befragungs-Daten und die durchgezogene Kurven vom Wilson-Modell mit den Annahmen in Abschnitt 4.7. Der gefittete Parameter β dieses Modells beträgt $\beta^{-1} = 7$ min für Fußgänger und 12 min für MIV. Als mittlere Geschwindigkeiten wurden $V_{\text{Fuß}} = 6$ km/h und $V_{\text{MIV}} = 40$ km/h angenommen.



Source: Chang-an University's calculations from 2000 Xi'an O-D survey.

Figure 4.11.: tägliche Reiseweitenverteilung in China. Die Wege wurden hauptsächlich mit dem Fahrrad und dem ÖV zurückgelegt. Es gab im Mittel nur 2.5 Wege pro Tag.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

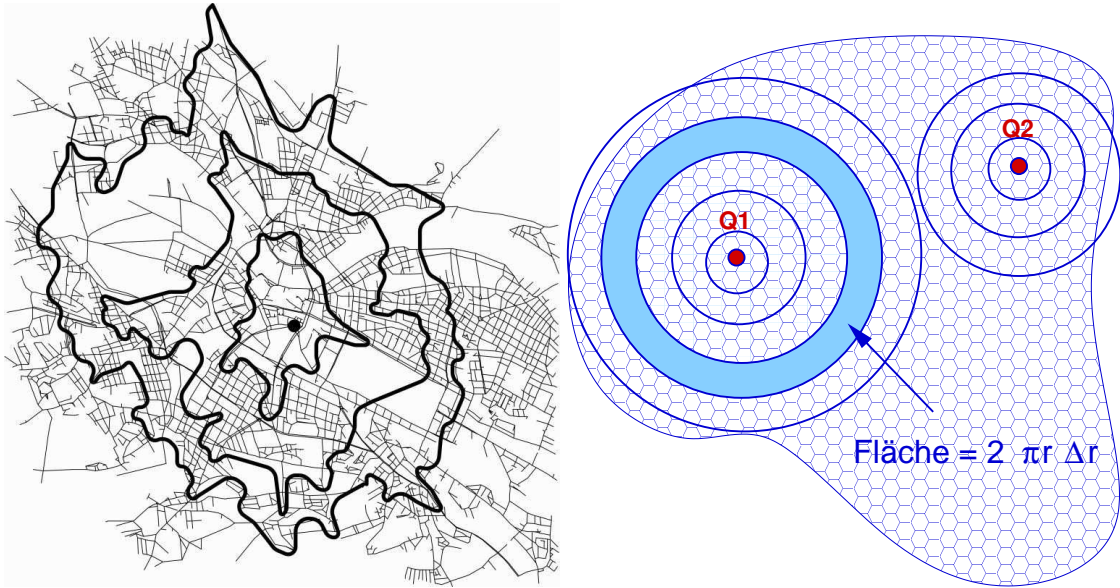


Figure 4.12.: Isochronen in Dresden für von dem Rathaus aus beginnenden Routen (links) und Zieldichte bei homogener Raumstruktur (rechts).

gegeben. Mit den konstanten Quellsummen und Zielpotentialen, $Q_i = Q$ und $\tilde{Z}_j = \tilde{Z}$, vereinfacht sich dies zu

$$V_{ij} = Q \frac{B_{ij}}{\sum_k B_{ik}}. \quad (4.30)$$

Wir führen nun zwei Verteilungen über ihre Zielfunktionen ein:

- Die *Zieldichte* $\rho(w)$ gibt die Dichtefunktion der Verteilung der Widerstände W_{ij} der Wege von einem festen Ausgangsbezirk i zu den verschiedenen Zielbezirken an. Definiert man die Teilsumme \sum_{j_w} aller Bezirke, die sich mit Streckenwiderständen zwischen w und $w + dw$ erreichen lassen,

$$\sum_{j_w} = \sum_{j: W_{ij} \in [w, w+dw]} \quad (4.31)$$

und lässt $d \rightarrow 0$ gehen, gilt mit der Gesamtzahl $n = \sum_j$ an Bezirken:

$$\frac{1}{n} \sum_{j_w} 1 = \rho(w) dw. \quad (4.32)$$

- Die Dichtefunktion $f(w)$ der Widerstände der *realisierten* Wege lässt sich mit (4.31) und der Quellsumme $Q = \sum_j V_{ij}$ schreiben als

$$\frac{1}{Q} \sum_{j_w} V_{ij} = f(w) dw \quad (4.33)$$

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Setzt man nun für V_{ij} das Grundmodell (4.30) ein, erhält man mit den obigen Definitionen der Dichtefunktionen:

$$\begin{aligned}
 f(w) \, dw &= \frac{1}{Q} \sum_{j_w} V_{ij} \\
 &= \frac{\sum_{j_w} B_{ij}}{\sum_j B_{ij}} \\
 &= \frac{B(w) \sum_{j_w} 1}{\sum_j B_{ij}} \\
 &= \frac{B(w) n \rho(w) \, dw}{\int_0^\infty B(w') n \rho(w') \, dw'}
 \end{aligned}$$

und damit das Ergebnis

$$f(w) = \frac{\rho(w) B(w)}{\int_0^\infty \rho(w') B(w') \, dw'} \quad (4.34)$$

4.7.1. Spezialfall eines räumlich homogenen Untersuchungsgebietes

Abbildung 4.12 verdeutlicht, dass bei räumlich homogener Raum- und Infrastruktur, wie sie etwa innerhalb großer Städte angenähert anzutreffen ist, die Zahl der Ziele zwischen zwei Isochronen $T_{ij} = T$ und $T_{ij} = T + dT$ proportional zu T ist.

Dies wird durch die idealisierte Raumstruktur auf Abb. 4.12 veranschaulicht: Bei homogener Raumstruktur sind die potenziellen Ziele (jedes Ziel ist hier symbolisiert durch ein kleines Hexagon) gleichmäßig verteilt mit der Dichte ρ_z (=z.B. Zahl der Ziele pro km^2). Von jedem Quellbezirk aus (z.B. Q_1 oder Q_2 ist die Zahl der neuen Ziele pro Abstandsänderung Δr gegeben durch $\frac{dn_z}{dr} = 2\pi\rho_z r$, zumindest solange man sich innerhalb des homogenen Untersuchungsgebietes befindet. Falls der Widerstand bzw. die Reisezeit linear mit der Entfernung ansteigt, $W = r/v$, gilt für die widerstandsbezogene Zieldichte $\rho(W) = \frac{dn_z}{dW} = 2\pi\rho_z v^2 W \propto W$. Damit erhält man als Endergebnis die Schätzung der Widerstandsverteilung der durchgeführten Routen als Funktion der Bewertungsfunktion:

$$f(W) = \frac{WB(W)}{\int_0^\infty W'B(W') \, dW'} \quad (4.35)$$

Beispielsweise ergibt sich für die sich aus den Wilson-Ansatz ergebende exponentielle Bewertungsfunktion (4.54) die Dichtefunktion der Widerstandsverteilung als Funktion des auf den Erwartungswert normierten Widerstandes $w = W/E(W)$ als

$$f(w) = 4we^{-2w}. \quad (4.36)$$

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

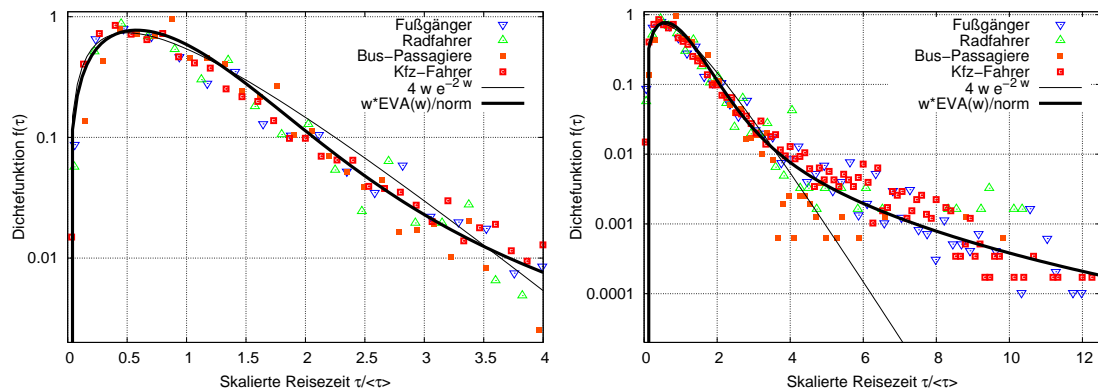


Figure 4.13.: Empirische Verteilung (Symbole) der skalierten Widerstände $w = W/E(W)$ in halblogarithmischer Darstellung. Die linke Grafik zeigt die Daten von Abb. 4.10 zusammen mit denen weiterer Verkehrsmittel. Die rechte Grafik berücksichtigt auch die “Ausreißer” extremer Reisezeiten. Die durchgezogenen dünnen bzw. dicken Kurven stellen das theoretische Ergebnis Gl. (4.36) bei Verwendung des Wilson-Ansatzes bzw. einer skalierten EFG-Funktion (EVA-Funktion) dar (vgl. Haupttext).

Das wesentliche Ergebnis dabei ist, dass aufgrund des Mangels an sehr nahen Zielen die Wahrscheinlichkeitsdichte für sehr geringe Widerstände mit dem Widerstand *zunimmt*, und zwar für alle Modi. Insbesondere gilt für sehr geringe Widerstände ein linearer Anstieg $f(W) \propto W$, was konsistent mit den Abbildungen 4.10 und 4.11 ist.

Die Abbildung 4.13 zeigt, dass das parameterfreie (!) Ergebnis (4.36) für die Dichtefunktion des skalierten Aufwands $w = W/E(W)$ der durchgeführten Wege bemerkenswert gut mit empirisch erfassten Daten übereinstimmt. Bei sehr großen Zeiten sieht man allerdings in der halblogarithmischen Darstellung deutliche Abweichungen, die durch verfeinerte Widerstandsfunktionen wie der EFG-Funktion berücksichtigt werden können. Bemerkenswerterweise liefert Gl. (4.36) mit der EFG-Funktion (4.26) eine Dichtefunktion für den skalierten Aufwand bzw. die skalierte Reisezeit w ,

$$f_{\text{EVA}}(w) = \frac{w B_{\text{EVA}}(w)}{\int_0^\infty w' B_{\text{EVA}}(w') dw'}, \quad (4.37)$$

welche sich viel besser an die Daten anpassen lässt. Die Abbildung 4.13 zeigt das Ergebnis mit den kalibrierten Parametern $E = 4.7$, $F = 1.2$ und $w_0 = W_0/E(W) = 1$.

Verteilung der skalierten Reisezeit

Leiten Sie die Beziehung

$$f(w) = 4we^{-2w}$$

für die nach dem Wilson-Modell erwartete Verteilung der skalierten Reisezeit $w = W/E(W)$ aus dem allgemeinen Ausdruck (4.35) her!

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Verkehrsleistung aus der Verkehrsstrommatrix

Aus dem Verteilungsergebnis, insbesondere aus der Reisezeitverteilung, kann man unter der Annahme einer bekannten mittleren Reisegeschwindigkeit $E(v) = v_0$ die **gesamte Verkehrsleistung** in Fz*km bzw. Personen*km herleiten.

Leiten Sie einen Ausdruck für die Verkehrsleistung (i) ganz allgemein aus V_{ij} und B_{ij} , (ii) aus der Dichtefunktion $f(W)$ für das Wilson-Modell her. Nehmen Sie dabei an, dass der Widerstand durch die Reisezeit gegeben ist.

Fehler zwischen Empirie und Modell

In Abb. 4.13 gibt es bei hohen Widerständen, $W > 4E(W)$, starke Abweichungen zwischen den empirischen Daten und der mit dem Wilson-Modell berechneten theoretischen Kurve.

- Schätzen Sie (i) den Anteil der Fahrten und (ii) den Anteil an der Verkehrsleistung bzw. der Verkehrsbelastung ab, der von dieser Abweichung betroffen ist (Lösung: Etwa 1% der Fahrten und 5% de Verkehrsleistung.)
- Wann ist eine korrekte Modellierung der auf die längsten Wege entfallenden 5% der Verkehrsleistung dennoch wesentlich?

4.8. Herleitung des Grundmodells mit dem Satz von Bayes



Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine mögliche Verbindung von i nach j realisiert wird, hängt nicht nur von der mit der Bewertungsfunktion gemessenen Attraktivität der Route ab, sondern auch von den RSB: In Abb. 4.9 sind für den isolierten Bezirk alle Wege lang. Um dennoch die Quellsummenbedingung $\sum_j V_{4j} = Q_4$ und Zielsummenbedingung $\sum_i V_{i4} = Z_4$ zu erfüllen, müssen diese langen Wege dennoch benutzt werden. Hingegen werden die langen Wege $5 \leftrightarrow 1$ und $6 \leftrightarrow 1$ kaum benutzt, da es eine kürzere Alternative $5 \leftrightarrow 6$ gibt.⁵

Wir können deshalb $B_{ij} = B(W_{ij})$ nicht einfach als unbedingte (“*a-priori*”-) Wahrscheinlichkeit definieren, sondern nur als **bedingte Wahrscheinlichkeit**:

$$B_{ij} = B(W_{ij}) = P(R|A_i \cap E_j). \quad (4.38)$$

Hierin sind die Ereignisse wie folgt definiert:

⁵Dieses Beispiel ist besonders anschaulich, wenn man innerbezirklichen Verkehr V_{ii} ausschließt.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

- A_i : Die Route beginnt in Bezirk i ,
- E_j : Die Route endet in Bezirk j ,
- R : Die Ortsveränderung (“Route”) wird tatsächlich durchgeführt.

Schließlich bedeutet $P(A|B)$ ganz allgemein die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis A stattfindet, unter der Bedingung, dass das Ereignis B zutrifft bzw. stattgefunden hat. Damit bedeutet B_{ij} die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Route von i nach j gewählt wird, wenn man RSB außer acht lässt, also *a priori* diese Route als zulässig, also konsistent mit den RSB, annimmt. Dies ist dann gegeben, wenn ein Start in Bezirk i möglich ist, so dass man die *a-priori*-Bedingung A_i auf “wahr” setzen kann und gleichzeitig (logisches Symbol \cap) eine Ankunft in Bezirk j möglich ist, also E_j auf “wahr” gesetzt werden kann.

Die Verkehrsstrommatrix kann man ebenfalls durch bedingte Wahrscheinlichkeiten ausdrücken. Die Summe aller Wege ist gegeben durch das Gesamtverkehrsaufkommen

$$V = \sum_{ij} V_{ij}. \quad (4.39)$$

Nach der statistischen Definition der Wahrscheinlichkeit (“Wahrscheinlichkeit gleich relativer Häufigkeit für eine große Zahl von zufälligen Ergebnissen”) ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Weg in Bezirk i beginnt (A_i) und in j endet (E_j), wenn er überhaupt angetreten wird (R), gegeben durch die relative Häufigkeit V_{ij}/V :⁶

$$P(A_i \cap E_j | R) = \frac{V_{ij}}{V} = v_{ij}. \quad (4.40)$$

Diese Gleichung drückt die Verkehrsstrommatrix durch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_i \cap E_j | R)$ aus, während nach Gl. (4.38) die Bewertungsmatrix durch die “umgekehrte” bedingte Wahrscheinlichkeit $P(R | A_i \cap E_j)$ definiert ist. Wir benötigen also eine statistische Satz, welche diese beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten in Beziehung setzt. Dieser Satz ist der **Satz von Bayes**, der sich direkt aus der Produktregel für Wahrscheinlichkeiten, $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$ ergibt. Er lautet allgemein

$$P(A|B) = P(B|A) \frac{P(A)}{P(B)}. \quad (4.41)$$

Setzt man hier für die Ereignisse $A \equiv A_i \cap E_j$ und $B \equiv R$, so erhält man mit (4.38) die Verkehrsstrommatrix in Abhängigkeit der Bewertungsmatrix:

$$V_{ij} = VP(A_i \cap E_j | R) = VB_{ij} \frac{P(A_i \cap E_j)}{P(R)}. \quad (4.42)$$

Schließlich berücksichtigen wir noch, dass die *a-priori*-Ereignisse A_i und E_j als unabhängig angesehen werden können: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein potentieller (nicht

⁶Man sollte immer im Hinterkopf behalten, dass es in der Verkehrsplanung grundsätzlich um Mittelwerte von Zufallsgrößen geht!

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

unbedingt benutzter!) Weg im Bezirk j endet, wird nicht vom Ausgangsbezirk i beeinflusst, solange es nur überhaupt eine Verbindung von i nach j gibt. Es gilt also

$$P(A_i \cap E_j) = P(A_i)P(E_j|A_i) = P(A_i)P(E_j). \quad (4.43)$$

Damit erhalten wir das **Grundmodell der Verkehrsverteilung** (4.2), welches hier der Übersichtlichkeit halber noch einmal hingeschrieben ist:

$$V_{ij} = VB_{ij}f_i g_j, \quad B_{ij} = B(W_{ij}) \quad \text{Grundmodell der Verteilung}$$

Die Verkehrsstrommatrix V_{ij} ist also proportional der Bewertungsmatrix B_{ij} , aber enthält zwei zusätzliche Faktoren f_i und g_j , die nur von i bzw. j abhängen. Die einzelnen Faktoren sind nicht eindeutig bestimmt, sondern nur ihr Produkt. Mit Gl. (4.42) und (4.43) kann man z.B. setzen: $f_i = P(A_i)/P(R)$ und $g_j = P(E_j)$. Dies ist aber nicht relevant, da die f_i und g_j i.A. direkt durch (rekursives) Einsetzen in die Randsummenbedingungen bestimmt werden, vgl. Abschnitt 4.5 weiter unten.

Gleichung (4.2) ist ein Gleichungssystem, in dem die Unbekannten f_i und g_j immer als Proportionalitätsfaktoren vorkommen. Man nennt deshalb dieses Grundmodell auch das **bilineare Modell der Verteilung**.

Zu beachten ist, dass die innerbezirklichen Wege i.A. die kürzesten sind, so dass die Diagonalelemente B_{ii} der Bewertungsmatrix und damit letztendlich die Diagonalelemente V_{ii} der Verkehrsstrommatrix häufig größer als die Nichtdiagonalelemente sind. Die innerbezirklichen Wege fallen jedoch beim letzten Schritt der Verkehrsplanung, der Umlegung, unter den Tisch. Von daher stellt sich die Forderung nach möglichst vielen Verkehrsbezirken, so dass für alle Bezirke die Bedingung

$$V_{ii} \ll \sum_{j,j \neq i} V_{ij}$$

erfüllt ist. Der vernachlässigte Binnenverkehr sollte also im Vergleich zur Summe der sonstigen Flüsse klein sein. Andererseits muss man die Bezirke natürlich so wählen, dass Raumstrukturdaten dafür verfügbar sind.

Verständnisfrage:

Machen Sie sich klar, dass die Unabhängigkeit der A-Priori-Wahrscheinlichkeiten für gültige Start- und Zielpunkte von Wegen, $P(A_i \cap E_j) = P(A_i)P(E_j)$, *nicht* für die bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt: $P(A_i \cap E_j|R) \neq P(A_i|R)P(E_j|R)$!

Verständnisfrage:

Drücken Sie $P(A_i|R)$ und $P(E_j|R)$ durch Quell- und Zielsummen sowie den Gesamtverkehr aus. Was bedeutet $P(A_i|R)$ in Worten?

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

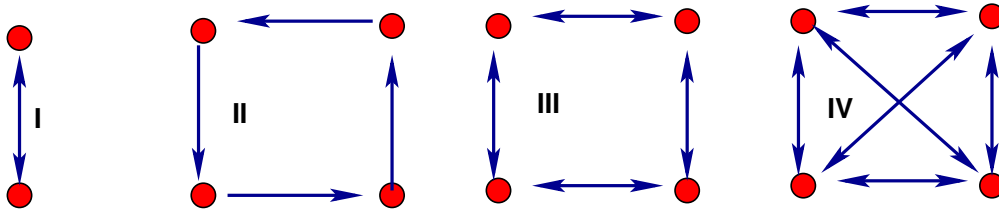


Figure 4.14.: Einige einfache Verkehrsstrommatrizen zur Bestimmung der Informationse-
sentropie

4.9. Herleitung des Grundmodells mit der Entropie-Methode



Wie bereits erwähnt, stellt die Verkehrsstrommatrix Mittelwerte von statistisch schwankenden Verkehrsaufkommen dar, welche darüberhinaus über den Bezugszeitraum integriert werden. Zu jedem konkreten Satz V_{ij} von Verkehrsströmen, die den RSB genügen, gibt es daher eine Vielzahl von “mikroskopischen” zeitabhängigen Verkehrsfluss-Szenarien, die genau zu diesen “makroskopischen” Flüssen V_{ij} führen. Dabei gibt es für einige Verkehrsstrommatrizen mehr “mikroskopische” Konfigurationen als für andere. Ein Maß für die Zahl der Konfigurationen ist die **Informationsentropie** oder **Shannon-Entropie**

$$S = - \sum_{i,j} v_{ij} \text{ld } v_{ij} = - \sum_{i,j} v_{ij} \frac{\ln v_{ij}}{\ln 2} \quad \text{Informationsentropie der Verteilung.} \quad (4.44)$$

Diese Größe gibt die im Mittel benötigte Information in Bits (entspricht der Zahl der gleich wahrscheinlichen Zweier-Entscheidungen) an, um von einem durchgeführten Ortswechsel (ein “mikroskopisches” Ereignis) die Quelle und das Ziel zu erfahren. Hierbei ist $\text{ld}(\cdot)$ der binäre Logarithmus (zur Basis 2) und $\ln(\cdot)$ der natürliche Logarithmus (zur Basis e).

Verständnisfrage:

Wie groß sind die Informationsentropien der in Abb. 4.14 abgebildeten vier Verkehrsflusskonfigurationen, wenn alle abgebildeten Flüsse gleich groß sind? Wie würde sich die Entropie qualitativ ändern, wenn bei denselben Netztopologien (i) die Flüsse unterschiedlich groß, (ii) alle Flüsse doppelt so groß wären?

Nimmt man an, dass alle mikroskopischen Konfigurationen gleich wahrscheinlich sind, so ist ein konkreter Satz von Werten der Verkehrsstrommatrix umso wahrscheinlicher, je mehr mikroskopische Konfigurationen es für sie gibt, also je größer die Information-

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

entropie der Verkehrsstrommatrix ist. Da die Zahl dieser Konfigurationen $\propto 2^{VS}$ ist, also drastisch mit S wächst, sind alle Verkehrsstrommatrizen, die nicht *sehr* nahe am Entropiemaximum sind, extrem unwahrscheinlich. Also kann man das Grundmodell der Verteilung auch durch Maximierung der Entropie herleiten!

Nun gibt obige Entropieformel die benötigte Information für den Fall an, dass man *a priori* nur weiß, dass ein Ortswechsel durchgeführt wurde. Durch die Bewertungsmatrix weiß man aber mehr: Lange Wege sind *a priori* unwahrscheinlicher als kurze! Mit dieser Zusatzinformation $\Delta S = -\sum_{i,j} v_{ij} \text{ld } B_{ij}$ ist die im Mittel benötigte Information, um Quelle und Ziel des Weges zu erfahren, gegeben durch die Entropiedifferenz

$$\tilde{S} = S - \Delta S = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i,j} v_{ij} (\ln v_{ij} - \ln B_{ij}) = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i,j} v_{ij} \ln \left(\frac{v_{ij}}{B_{ij}} \right). \quad (4.45)$$

Die tatsächlich beobachtete Verteilung ist diejenige, welche die Entropiedifferenz (den Informationsunterschied) \tilde{S} maximiert, wobei die Randsummenbedingungen als Nebenbedingungen berücksichtigt werden müssen.

Eine Maximierung oder Minimierung unter Berücksichtigung fester Nebenbedingungen wird mit der sog. **Multiplikatorenmethode von Lagrange** ermöglicht: Hat man allgemein eine zu minimierende Funktion $F(x_1, x_2, \dots)$ und Nebenbedingungen der Form $g_1(x_1, x_2, \dots) = 0$, $g_2(x_1, x_2, \dots) = 0$ usw. so wird zunächst die **Lagrange-Funktion** definiert:⁷

$$L(x_1, x_2, \dots) = -F(x_1, x_2, \dots) + \sum_j \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots).$$

Indem man nun statt F die Lagrange-Funktion L ableitet und gleich Null setzt, erhält man Gleichungen fürs Extremum, die neben den x_i auch die **Lagrange-Parameter** λ_j erhalten. Letztere werden danach durch die Nebenbedingungen bestimmt.

Bei der Verkehrsverteilung sieht das komplette Extremalwertproblem in der ‘‘Lagrange-Form’’ wie folgt aus (der irrelevante Faktor $1/\ln(2)$ wurde weggelassen):

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\{v_{ij}\}) &= -\sum_{i,j} v_{ij} \ln \left(\frac{v_{ij}}{B_{ij}} \right) = \max! \\ \sum_j v_{ij} - q_i &= 0, \\ \sum_i v_{ij} - z_j &= 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Damit erhält man die Lagrangefunktion

$$L = \sum_{i,j} v_{ij} \ln \left(\frac{v_{ij}}{B_{ij}} \right) + \sum_i \lambda_i \left(\sum_j v_{ij} - q_i \right) + \sum_j \mu_j \left(\sum_i v_{ij} - z_j \right) \quad (4.47)$$

und durch Ableiten nach den v_{ij} und Nullsetzen die Bedingungen

$$\frac{\partial L}{\partial v_{ij}} = \ln \left(\frac{v_{ij}}{B_{ij}} \right) + 1 + \lambda_i + \mu_j = 0. \quad (4.48)$$

⁷Das negative Vorzeichen vor F ist willkürlich

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Figure 4.15.: Zu einigen den RSB entsprechenden Verkehrsstrommatrizen gibt es mehr mikroskopische Szenarien (links) als zu anderen (rechts).

Nach Auflösen bezüglich v_{ij} ergibt sich schließlich

$$V_{ij} = Vv_{ij} = VB_{ij}e^{-(1+\lambda_i)}e^{-\mu_j}. \quad (4.49)$$

Identifiziert man $e^{-(1+\lambda_i)} = f_i$ und $e^{-\mu_j} = g_j$, ist dies genau das Grundmodell (4.2).

4.9.1. Simultane Herleitung einer Bewertungsfunktion

Alternativ zur expliziten Streckenbewertung mit Bewertungsfunktionen kann man auch von der Beobachtung eines festen mittleren Widerstandes $E(W) = \sum_{ij} v_{ij}W_{ij}$ ausgehen (z.B. einer festen mittleren Reisezeit nach Abb. 4.2) und die Verkehrsverteilung suchen, die bei diesen Vorgaben die meisten "mikroskopischen" Szenarien zulässt, also nach obigen Überlegungen die wahrscheinlichste ist.

Die Maximierung der Entropie S (nicht der Entropiedifferenz \tilde{S}) ergibt dann folgendes Extremalwertproblem:

$$\begin{aligned} S(\{v_{ij}\}) &= - \sum_{i,j} v_{ij} \ln v_{ij} = \max! \\ \sum_j v_{ij} - q_i &= 0, \\ \sum_i v_{ij} - z_j &= 0, \\ \sum_{ij} v_{ij}W_{ij} - E(W) &= 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Analog zu (4.47) erhält man die Lagrangefunktion

$$L = \sum_{i,j} v_{ij} \ln v_{ij} + \sum_i \lambda_i \left(\sum_j v_{ij} - q_i \right) + \sum_j \mu_j \left(\sum_i v_{ij} - z_j \right) + \beta \left(\sum_{ij} v_{ij}W_{ij} - E(W) \right) \quad (4.51)$$

und durch Ableiten und Nullsetzen die Bedingungen

$$\frac{\partial L}{\partial v_{ij}} = \ln v_{ij} + 1 + \lambda_i + \mu_j + \beta W_{ij} = 0 \quad (4.52)$$

und nach Auflösen bezüglich v_{ij} :

$$V_{ij} = Vv_{ij} = Ve^{-(1+\lambda_i)}e^{-\mu_j}e^{-\beta W_{ij}}. \quad (4.53)$$

Identifiziert man wieder $e^{-(1+\lambda_i)} = f_i$ und $e^{-\mu_j} = g_j$, entspricht dies genau dem Grundmodell (4.2) mit der Bewertungsfunktion

$$B_{ij} = e^{-\beta W_{ij}}. \quad (4.54)$$

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

Interpretiert man den Widerstand als negativen deterministischen Nutzen (**Utility**), so ist diese **Wilson'schen Bewertungsfunktion** identisch zur Gewichtungsfunktion der **Logit-Modelle**, die bei der Verkehrsaufteilung eine große Rolle spielen werden.⁸ Ihr einziger Parameter β wird durch die Nebenbedingung $\sum_{ij} v_{ij} W_{ij} = E(W)$ bestimmt. Der Wert von β ist von der Größenordnung $2/E(W)$, aber hängt auch von der Art der Infrastruktur und den RSB ab (vgl. die Aufgabe "Verkehrsleistung aus der Verkehrsstrommatrix" auf S. 85).

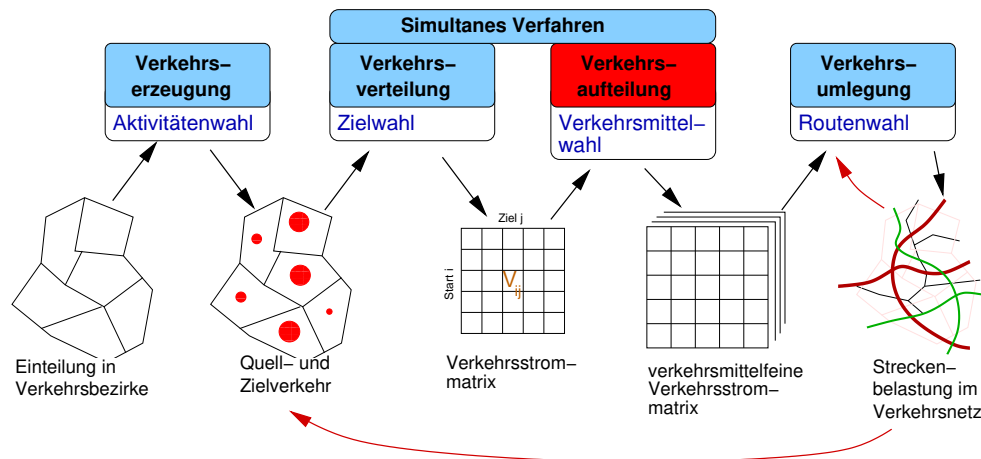
⁸In der Literatur zur diskreten Wahltheorie wird der deterministische Nutzen einer Alternative, hier $i \rightarrow j$, mit $U_{ij}^{\text{det}} = V_{ij}$ bezeichnet. Da dies hier zu Kollisionen mit den Verkehrsstrommatrixelementen führt, wird hier immer der negative Wert, der Widerstand $W_{ij} = -\beta U_{ij}^{\text{det}}$, verwendet.

4. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung

4.10. Verwendete Symbole

$i, j = 1, \dots, n$	Zählindices für Bezirke
$B_{ij}^{(g,k)}$	“Bewertungsmatrix”: Wahrscheinlichkeit für die positive Bewertung eines Weges von i nach j mit Verkehrsmittel k für die QZG g (Die Indices g und k werden der Übersichtlichkeit halber häufig weggelassen)
$W_{ij}^{(k)}$	“Widerstandsmatrix”: Verallgemeinerter Widerstand (Disutility) der Verbindung von i nach j mit Verkehrsmittel k .
$w = W/E(W)$	Auf den Erwartungswert normierter Widerstand.
$B^{(g,k)}(W)$	Bewertungsfunktion des Widerstandes (z.B. die “EFG-Funktion”). Es gilt $B_{ij} = B(W_{ij})$.
\tilde{Q}_i, \tilde{Z}_j	Quell- und Ziel-Potentiale, die bei “weichen” RSB an die Stelle der Quell- und Zielsummen Q_i bzw. Z_j treten.
$V = \sum_{ij} V_{ij}$	Gesamt-Verkehrsaufkommen: Summe aller Fahrten in der betrachteten Zeiteinheit für die betrachtete QZG und das betrachtete Verkehrsmittel im gesamten Untersuchungsgebiet.
\tilde{Q}_i, \tilde{Z}_j	Quell- und Zielpotential: Quellsumme bzw. Zielsumme für weiche RSB
f_i, g_j	Aus den RSB zu bestimmende Multiplikatoren des bilinearen Verteilungsmodells.
R	Ereignis “der Weg (von i nach j) wurde durchgeführt”
A_i	Ereignis “Der Anfang des Weges ist in Bezirk i ”
E_j	Ereignis “Das Ende des Weges ist in Bezirk j ”
$q_i = \frac{Q_i}{V}$ $= P(A_i R)$	Spezifische Quellstärke: Anteil der Fahrten, die von Bezirk i ausgehen
$z_j = \frac{Z_j}{V}$ $= P(Z_j R)$	Spezifische Senkenstärke: Anteil der Fahrten, die in Bezirk j enden
$v_{ij} = \frac{V_{ij}}{V}$	Spezifische Verkehrsstrommatrix
S	Informationsentropie der Verteilung: Im Mittel benötigte Informationsmenge, um Ausgangs- und Endbezirk eines Weges anzugeben.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung



5.1. Allgemeines

Grundaufgabe dieses dritten Schrittes des klassischen Vorgehens der Verkehrsplanung (Verkehrserzeugung, -verteilung, -aufteilung und -umlegung) ist die Aufteilung (engl. **Modal Split**) von Verkehrsströmen auf die verschiedenen Verkehrsmittel oder **Modi** k , d.h., man sucht die **Anteile** A_k mit $\sum A_k = 1$, z.B. A_1 : Anteil der zu Fuß zurückgelegten Wege, A_2 : Rad, A_3 : ÖPNV, A_4 : MIV (motorisierter Individualverkehr), etc. Die Anteile können dabei auf alle Ortsveränderungen von Bezirk i nach Bezirk j (*Trip-Interchange Ansatz*, siehe unten) oder auf alle von einem Bezirk ausgehenden oder eingehenden Verkehrsströme (*Trip-End Ansatz*) bezogen werden. Im Rahmen des Kennwertmodells werden die Anteile für jede Quelle-Ziel-Gruppe (QZG) getrennt ermittelt.

Tabelle 5.1 zeigt als Beispiel eine möglicherweise nichtrepräsentative Erhebung der Fahrten zur Vorlesung "Verkehrsplanung" im Winter 2005: Es wurden also die Anteile $A_k^{i,WB}$ der Fahrten in der QZG "WB" in den "Uni-Bezirk" i ermittelt. Die Unterscheidung nach Entfernungsklassen zeigt eine der wichtigsten Einflussgrößen der Aufteilung: Aus naheliegenden Gründen werden bei großen Entfernungen die Anteile $A_{Fu\beta}$ und A_{Rad} klein, bei dementsprechend steigenden Anteilen A_{MIV} und $A_{\ddot{O}V}$. Abbildung 5.1 stellt die aus der Tabelle gewonnenen Anteile grafisch dar. Zum Vergleich sind auch die mit den im Abschnitt 5.5 vorgestellten **Multinomial-Logit-Modell** gewonnenen theoretischen Ergebnisse dargestellt.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

	Fuß	Rad	ÖV	Kfz
0-1 km	4	3	1	0
1-2 km	2	7	7	0
2-5 km	0	6	10	2
5-10 km	0	1	10	2
> 10 km	0	0	9	1
Σ	6	17	37	5
$A_k^{(WB)}$	6/65	17/65	37/65	5/65

Table 5.1.: Erhebung des zur Fahrt “Wohnung-Universität” bevorzugt verwendeten Verkehrsmittels in Abhängigkeit der Entfernung (Dezember 2005, $N = 65$ anwesende Studierende).

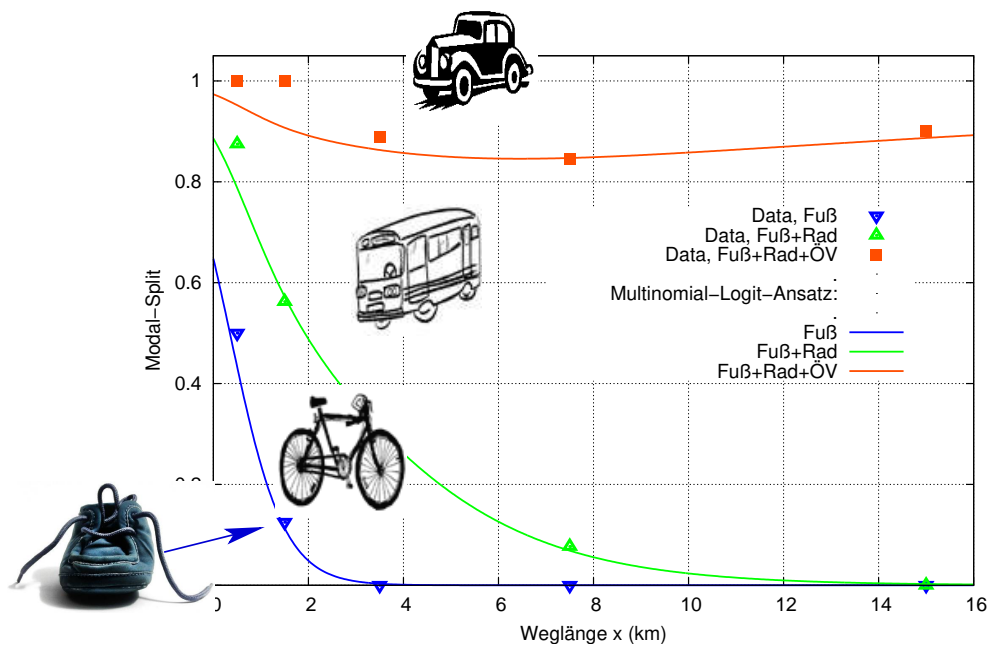


Figure 5.1.: Darstellung des aus Tabelle 5.1 gewonnenen kumulierten Modal-Splits in Abhängigkeit der Entfernung (Symbole). Die durchgezogenen Kurven stellen die nach dem kalibrierten Multinomial-Logit-Modell in Abhängigkeit der Entfernung zu erwartenden Anteile dar. (Näheres dazu in Abschnitt 5.5).

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

Die Aufgabenstellung der Aufteilung unterscheidet sich in Abhängigkeit der globalen Vorgehensweise (vgl. Abb. 4.3):

- Beim **Trip-End-Ansatz** werden die Anteile $A_k^{(ig)}$ für das Verkehrsmittel k im Quell- oder Zielverkehr der QZG g im Bezirk i empirisch erfasst, z.B. durch die relative Häufigkeit von entsprechenden Umfrageergebnissen, vgl. Tabelle 5.1. Das Ergebnis sind verkehrsmittelaufgelöste Quell- und Zielsummen

$$Q_{ik}^{(g)} = Q_i^{(g)} A_k^{(ig)}, \quad Z_{jk}^{(g)} = Z_j^{(g)} A_k^{(jg)}, \quad (5.1)$$

welche dann als Basis der verkehrsmittelaufgelösten Verteilung (siehe vorheriges Kapitel) dienen. Bei Mangel an entsprechenden Daten nimmt man für jede QZG ggf. einen über alle Bezirke gemittelten **globalen Modal-Split** $A_k^{(g)}$ an.

- Beim **Trip-Interchange-Ansatz** liegen durch die bereits erfolgte Verteilung die über alle Modi k summierten Verkehrsströme $V_{ij}^{(g)}$ sowie für jede Beziehung $i \rightarrow j$ die verkehrsmittelabhängigen Widerstände W_{ijk} vor. Mit den Methoden der **diskreten stochastischen Wahltheorie** oder mit der aus der Elektrotechnik entlehnten **Kirchhoffschen Regel** werden daraus *Verkehrsmittelanteile* $A_{ijk}^{(g)}$ bestimmt. Das Ergebnis der Aufteilung ist die **verkehrsmittelaufgelöste Verkehrsstrommatrix**

$$V_{ijk}^{(g)} = V_{ij}^{(g)} A_{ijk}^{(g)} \quad (5.2)$$

- Beim **simultanen Ansatz** werden die $V_{ijk}^{(g)}$ direkt aus den $Q_i^{(g)}$ und $Z_j^{(g)}$ bestimmt. Auch hier wird jedoch die getrennte Behandlung einer jeden Quelle-Ziel-Gruppe beibehalten.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels gehen wir vom Trip-Interchange-Ansatz aus. Zwecks besserer Lesbarkeit werden dabei die Indices i, j der Quelle-Ziel-Beziehung sowie das Superskript (g) für die betrachtete Quelle-Ziel-Gruppe weggelassen. Man sollte aber im Hinterkopf behalten, dass in einer konkreten Verkehrsplanung mit n Bezirken, der 5-er, 13-er oder 19-er Einteilung in Quelle-Ziel-Gruppen, sowie n_I Iterationen zwischen Nachfrage- und Angebotsmodellierung (vgl. das Flussdiagramm am Beginn dieses Kapitels)

$$n(n-1)(5, 13 \text{ oder } 19)n_I$$

einzelne Aufteilungen berechnet werden.

Aufgabe:

Drücken Sie den Modal-Split der Quell- und Zielsummen eines Bezirks i durch die verkehrsmittelaufgelöste Verkehrsstrommatrix V_{ijk} aus. Wodurch können evtl. Abweichungen zu den empirisch bestimmten Verkehrsmittelanteilen dieses Bezirks entstehen? Wie könnte man sie beheben?

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

Aufgabe: Summen der Verkehrsstrommatrix

Beantworten Sie folgende Fragen allgemein, in dem Sie die entsprechenden Summen der Verkehrsstrommatrizen angeben und auch die Raumstrukturdaten sowie Tagesganglinien der verschiedenen QZG (mindestens 13er Einteilung) berücksichtigen:

1. Wieviele Personen halten sich um 13h in Bezirk i auf?
2. Wieviel Leute verlassen Bezirk i mit dem Fahrrad zwischen 13h und 15 h?
3. Wieviel Kleinkinder befinden sich um 11h in Kintertagesstätten des Bezirks i ? (vernachlässigen Sie die QZG "SS"). Wieviel Prozent davon wurden mit öffentlichen Verkehrsmitteln hingebacht?
4. Wieviel parkende Fahrzeuge kommen in Bezirk i zur Zeit t gegenüber Mitternacht hinzu? Mit welcher Fahrzeugzahl sind die Einkaufsparkplätze belegt? (Besetzungszahl b (Personen/Kfz), QZG "SS" vernachlässigt.)
5. Wieviel Leute sind um 16 h (noch) an Arbeitsplätzen in Bezirk i ?

5.2. Modellierung des Nutzens

5.2.1. Einflussgrößen

Offensichtlich benutzt man das Verkehrsmittel K , von welchem man sich, unter Berücksichtigung gewisser Restriktionen, den meisten Nutzen bzw. **Utility** U_k bzw. den geringsten **Widerstand** $W_k = -U_k$ verspricht. Der Nutzen wird von mehreren Kategorien von Einflussfaktoren (exogenen Variablen) bestimmt:

- **Generische Variable**, welche vom Verkehrsmittel und von der Person (bzw. der Relation $i \rightarrow j$) abhängen:
 - Reisezeiten T_{ijk} : Diese werden als "Komplex-Reisezeiten" von Haustür zu Haustür gerechnet und sind der wichtigste, manchmal sogar der einzige Faktor bei der Modellierung.
 - Die Entfernung r_{ijk} kann alternativ zur Reisezeit verwendet werden. Sie ist zwar leichter erhebbbar (und oft bei den verschiedenen Modi fast gleich), aber verschiedene Modi haben bei gleicher Entfernung stark unterschiedlichen Nutzen, so dass man für jede Alternative einen eigenen alternativenspezifischen Parameter als Vorfaktor benötigt, der die Entfernung wieder in eine Zeit umrechnet und im Wesentlichen die Rolle einer (inversen) Geschwindigkeit hat (vgl. Gl. (5.3)).
 - Reisekosten C_{ijk} . Diese können durch einen "Zeit=Geld"-Ansatz ebenfalls in

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

Zeit-Einheiten umgerechnet werden; der bzw. die entsprechenden Modellparameter (vgl. Gl. (5.3)) haben die Einheit Stunden pro Euro

- Zuverlässigkeit. Diese geht z.B. als zusätzlicher Term proportional der Standardabweichung der Reisezeit ein.
- Komfort und andere “weiche” Faktoren.
- **Sozioökonomische Variable** hängen nur von der Person ab. Die wichtigsten sind:
 - Geschlecht,
 - Alter,
 - Einkommen. Dieses beeinflusst z.B. das obige Zeit=Geld-Verhältnis,
 - Alter, Konstitution, Gewohnheit.
- Die **alternativenspezifischen Konstanten** beschreiben die globale Präferenz für eine bestimmte Alternative k , d.h. alle systematischen Einflussfaktoren, welche nicht explizit berücksichtigt wurden (zufällige Einflussfaktoren werden separat modelliert, siehe Abschnitt 5.3).
- **Externe Variable** hängen weder von der Person noch von der Relation $i \rightarrow j$ noch vom Verkehrsmittel ab, z.B. Jahreszeit, Tagezeit, Witterungsbedingungen. z.B. nimmt im Winter sowie bei Nässe oder Nacht der Anteil des Radverkehrs ab.
- Nebenbedingungen, z.B. Gebundenheit an ein Verkehrsmittel oder Nichtverfügbarkeit eines Verkehrsmittels (dies könnte man auch als sozioökonomische Variable interpretieren). Insbesondere ist man während aller Wege einer Rundfahrt i.A. an Rad oder Kfz gebunden, wenn man diese Modi für den den ersten Weg der Rundfahrt gewählt hat. Auch der Zweck der Fahrt kann ein bestimmtes Verkehrsmittel notwendig machen, z.B. Möbeltransport. Im Rahmen des Kennwertmodells macht sich dies in unterschiedlichen Aufteilungen für unterschiedliche QZG bemerkbar (Abb. 5.2)

5.2.2. Nutzenfunktionen bei der Verkehrsmittelwahl

Bei der Modellierung der Verkehrsmittelwahl wird die Alternative mit dem höchsten Nutzen gewählt (vgl. Abschnitt 5.3). Daraus folgt:

- Nur Nutzendifferenzen sind relevant. Da man i.A. nur eine festgelegte Zahl an Alternativen zur Verfügung hat, kann man ohne Einschränkung den Nutzen einer Alternative (z.B. Kfz) komplett =0 setzen
- Nur Ordinalbeziehungen (“größer”, “kleiner”) sind beim Vergleich der Alternativen relevant. Man kann also insbesondere alle verbleibenden Nutzenfunktionen mit einem gemeinsamen festen Vorfaktor multiplizieren oder eine streng monotone Funktion (wie den Logarithmus) darauf anwenden.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

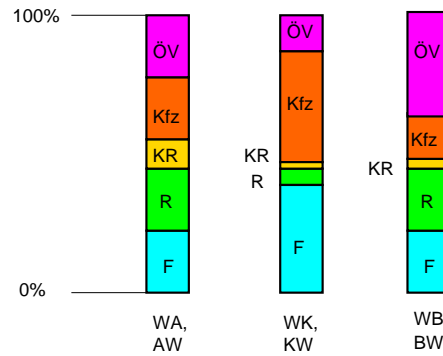


Figure 5.2.: Je nach Quelle-Ziel-Gruppe kann die Aufteilung für dieselbe Weglänge deutlich unterschiedlich sein.

Als Beispiel werden folgende Annahmen getroffen:

- Es gibt 4 Alternativen: Fuß ($k = 1$), Rad ($k = 2$), ÖV ($k = 3$) und MIV, Motorisierter Individualverkehr ($k = 4$).
- Als einzige generische Variable wird die Entfernung r gewählt, welche mit alternativenspezifischen Vorfaktoren in die Nutzenfunktion eingeht, um die unterschiedlichen Geschwindigkeiten zu berücksichtigen
- Als sozioökonomische Variablen wird das Geschlecht g ($0 = \overset{\circ}{\sigma}$, $1 = \overset{\circ}{\tau}$) berücksichtigt. Man beachte, dass das Geschlecht ein nominalskaliertes dichotomes (zweiwertiges) Merkmal ist, welches hier durch eine kardinalskalierte **Pseudo-Variable** mit den Werten 0 und 1 dargestellt wird, um “rechnen” zu können.
- Es wird (wichtig!) ein vollständiger Satz von alternativenspezifischen Konstanten berücksichtigt.
- Schließlich werden Nebenbedingungen einfach dadurch modelliert, dass man die nicht möglichen Alternativen weglässt, bzw. die “verbotenen” Alternativen mit einer extrem negativen Nutzenfunktion (z.B. -10^{10}) belegt, hier am Beispiel der Kfz-Verfügbarkeit v ($0 = \text{nein}$, $1 = \text{ja}$) gezeigt.

Dies führt auf folgende Nutzenfunktion:

$$U_k = U_k^{\text{gen}} + U_k^{\text{soz}} + U_k^{\text{alt}} + U_k^{\text{restr}} \quad (5.3)$$

mit

$$U_k^{\text{gen}} = (\beta_1 \delta_{k1} + \beta_2 \delta_{k2} + \beta_3 \delta_{k3}) r, \quad (5.4)$$

$$U_k^{\text{alt}} = \beta_4 \delta_{k1} + \beta_5 \delta_{k2} + \beta_6 \delta_{k3}, \quad (5.5)$$

$$U_k^{\text{soz}} = \beta_7 g, \quad U_k^{\text{restr}} = -(1 - v) 10^{10} \delta_{k4}. \quad (5.6)$$

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

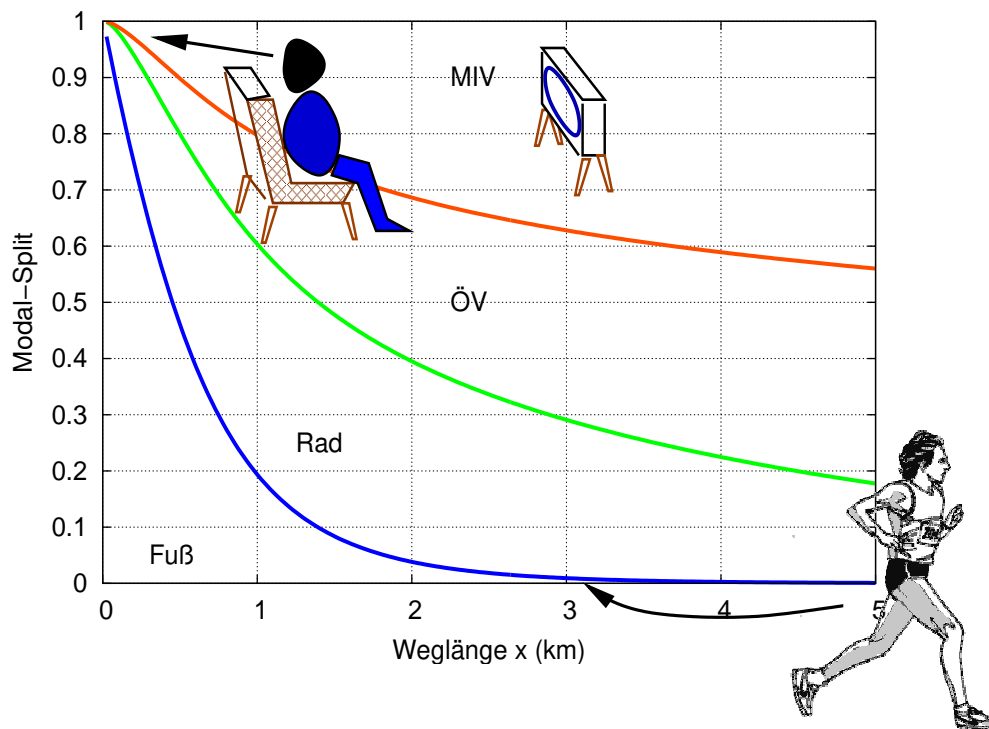


Figure 5.3.: Diskrete stochastische Wahltheorie: Jeder hat bei der Verkehrsmittelwahl andere Präferenzen. Deshalb gibt es individuelle Abweichungen bezüglich des mittleren Nutzens $\bar{u}_k = B(W_k)$, welcher eine deterministische Funktion des Widerstandes ist. Infolgedessen gibt es auch bei sehr kurzen Strecken noch einige Kfz-Fahrer (“*Couch potatoes*”) und bei langen Strecken einige, welche die eher “sportlichen” Verkehrsmittel wählen (“*Triathleten*”).

wobei der “Selektor”

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.7)$$

bei alternativenspezifischen Nutzenanteilen die jeweilige Alternative auswählt. Man beachte, dass (bis auf den Kfz-Verfügbarkeitsterm) der Nutzen für MIV gleich null ist, es kommt ja nur auf Nutzendifferenzen an!

Verständnisfrage:

Die WB-Wege und die SS-Wege seien in einem Untersuchungsgebiet ungefähr gleich lang. In welcher QZG wird ein höherer ÖV-Anteil zu erwarten sein?

5.3. Diskrete stochastische Wahltheorie

Die **diskrete stochastische Wahltheorie** (engl.: *Discrete Choice Theory*), eine der wichtigsten Ansätze für die Verkehrsaufteilung, beruht auf folgenden Annahmen:

- Der Verkehrsteilnehmer wählt unter K verschiedenen Alternativen (Modi) die Alternative (das Verkehrsmittel) k aus, für welche der **individuelle Nutzen** U_k maximal ist:

$$k_{\text{gewählt}} = \arg \left(\max_k U_k \right). \quad (5.8)$$

Dies ist die zentrale Annahme des **Homo oeconomicus**, ohne die ein sinnvolles mathematisches Vorgehen schlechterdings nicht möglich ist.

- Der individuelle Nutzen U_k setzt sich aus einem **mittleren Nutzen** \bar{u}_k und einem **stochastischen Anteil** bzw. **Zufallsanteil** Z_k zusammen:

$$U_k = \bar{u}_k + Z_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (5.9)$$

Der mittlere Nutzen wird dabei gemäß den Einflussgrößen von Abschnitt 5.2 mehr oder weniger detailliert modelliert. Der Zufallsanteil (vgl. Abb. 5.3) beschreibt die nichtsystematischen Schwankungen des individuellen Nutzens um den mittleren Nutzen aufgrund

- aller nicht berücksichtigten exogenen Variablen,
 - Messfehler,
 - Unzulänglichkeiten des Modells.
- Da man alle systematischen nicht modellierten Einflüsse in die alternativenspezifischen Konstanten der Nutzenfunktion verlagert hat, kann man bei den Zufallsanteilen einen verschwindenden Erwartungswert annehmen. Außerdem werden sie als unabhängig voneinander angenommen:

$$E(Z_k) = 0, \quad E(Z_k Z_l) = \begin{cases} \sigma_k^2 & k = l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.10)$$

Häufig wird neben der Unabhängigkeit auch eine identische Verteilung aller Zufallsgrößen angenommen. Beide Eigenschaften zusammen bezeichnet man auch als **i.i.d.: independent and identically distributed**.

Die Annahme der Unabhängigkeit muss durchaus nicht immer zutreffen. Beispielsweise sind für eher ökologisch orientierte Verkehrsteilnehmer die stochastischen Anteile $z_{\text{Fuß}}$, z_{Rad} und $z_{\text{ÖV}}$ tendenziell eher positiv und z_{MIV} eher negativ, während für "Autonarren" das Umgekehrte zutrifft. Also sind $z_{\text{Fuß}}$, z_{Rad} und $z_{\text{ÖV}}$ untereinander positiv korreliert, während sie mit z_{MIV} negativ korreliert sind.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

5.4. Spezialfall zweier Alternativen

Für zwei Alternativen, sog. binäre Modelle, lässt sich die Auswahlwahrscheinlichkeit $P(1)$ für Alternative 1 – welche nach dem Gesetz der großen Zahl gleich dem Anteil A_1 für Alternative ist – und die komplementärwahrscheinlichkeiten $P(2) = 1 - P(1)$ bzw. $A_2 = 1 - A_1$ analytisch angeben. Die Zufallsanteile Z_1 und Z_2 werden durch ihre **Verteilungsfunktionen**

$$F_k(z) = P(Z_k \leq z) = \int_{-\infty}^z f_k(z') dz' \quad (5.11)$$

oder, alternativ, durch die **Dichtefunktionen**

$$f_k(z) = \frac{dF_k}{dz} \quad (5.12)$$

charakterisiert. Aus der Annahme der Nutzenmaximierung (Homo oeconomicus) erhält man bei zwei Alternativen direkt

$$\begin{aligned} A_1 = P(1) &= P(U_1 \geq U_2) \\ &= P(\bar{u}_1 + Z_1 \geq \bar{u}_2 + Z_2) \\ &= P(Z_1 - Z_2 \geq \bar{u}_2 - \bar{u}_1) \\ &= P(Z_1 - Z_2 \leq \bar{u}_1 - \bar{u}_2). \end{aligned}$$

Definiert man die Zufallsvariable Z durch die Zufallsnutzendifferenz

$$Z := Z_1 - Z_2, \quad (5.13)$$

so kann man dies mit der Verteilungsfunktion $F_{z_1-z_2}$ von Z schreiben als

$$A_1 = P(1) = F_{z_1-z_2}(\bar{u}_1 - \bar{u}_2). \quad (5.14)$$

Wegen der Unabhängigkeit der Z_1 und Z_2 kann man die Verteilungs- und Dichtefunktionen der Zufallsnutzendifferenz mit dem Faltungssatz berechnen (vgl. Formelsammlung in Statistik):

$$f_{z_1-z_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 f_1(z_1) f_2(z + z_1), \quad (5.15)$$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 f_1(z_1) F_2(z + z_1). \quad (5.16)$$

Im Folgenden werden mit der für allgemeine Zufallsnutzenverteilung gültigen Formel (5.14) spezielle Aufteilungsmodelle hergeleitet. Die verschiedenen Modelle unterscheiden sich dabei nur bezüglich der Verteilung des Zufallsnutzens.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

5.4.1. LP-Modelle

Bei den **Linear Probability (LP)** Modellen nimmt man für die stochastischen Nutzenanteile i.i.d. Gleichverteilungen an, deren Dichtefunktionen

$$f_1(z) = f_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & |z| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.17)$$

nur im Bereich $\pm a$ von Null verschieden sind (vgl. Abb. 5.4) und deren Varianz durch $\sigma^2 = a^2/12$ gegeben ist. Die Dichtefunktion der Zufallsnutzendifferenz ist nach (5.15) eine Dreiecksverteilung:

$$f_{z_1-z_2}(z) = \begin{cases} \frac{1}{4a} \left(1 - \frac{|z|}{2a}\right) & |z| \leq 2a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.18)$$

Durch eine weitere Integration (Dichtefunktion \rightarrow Verteilungsfunktion) erhält man mit (5.14) die Auswahlwahrscheinlichkeit des LP-Modells für Alternative 1 in Abhängigkeit der Differenz $\bar{u}_1 - \bar{u}_2$ der deterministischen Nutzen:

$$A_1^{\text{LP}} = P(1)^{\text{LP}} = \begin{cases} 0 & \bar{u}_1 - \bar{u}_2 < -2a \\ 1 & \bar{u}_1 - \bar{u}_2 > 2a \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{a} + \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2^2}{4a^2}\right) & -2a \leq \bar{u}_1 - \bar{u}_2 < 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{a} - \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2^2}{4a^2}\right) & 0 \leq \bar{u}_1 - \bar{u}_2 < 2a \end{cases} \quad (5.19)$$

Die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der deterministischen Nutzendifferenz ist also durch zwei Parabeläste gegeben (vgl. Abb. 5.4).¹

5.4.2. Probit-Modell

Im **Probit-Modell für zwei Alternativen** sind die Zufallsanteile Z_1 und Z_2 i.i.d. gauß- bzw. normalverteilt:

$$Z_1, Z_2 \sim N(0, \sigma^2). \quad (5.20)$$

Die Summe bzw. Differenz zweier gaußverteilter Zufallsvariablen ist ebenfalls gaußverteilt, wobei sich die Varianzen summieren:

$$Z_2 - Z_1 \sim N(0, 2\sigma^2). \quad (5.21)$$

Aus (5.14) erhält man wieder die Auswahlwahrscheinlichkeit $P(1)$ für Alternative 1 in Abhängigkeit der gemittelten Nutzendifferenz (vgl. Abb. 5.5):

$$A_1 = P(1) = \Phi\left(\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{\sqrt{2\sigma^2}}\right), \quad (5.22)$$

¹Bisweilen wird der Einfachheit halber auch direkt für die Nutzendifferenz $\bar{u}_1 - \bar{u}_2$ eine Gleichverteilung angenommen. Dies führt aber zu konzeptionell-mathematischen Problemen: Es gibt schlicht und ergreifend keine Wahrscheinlichkeitsdichte, deren Faltung mit sich selbst die Dichte einer Gleichverteilung ergeben würde! Damit ist die Verteilungsfunktion der stochastischen Einzel-Nutzen Z_k undefiniert, die Annahmen der Variante 2 also inkonsistent. Insbesondere ist eine Verallgemeinerung auf den multinomialen Fall prinzipiell nicht möglich.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

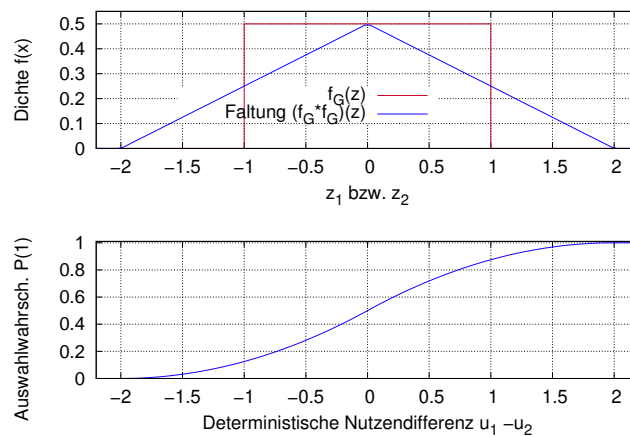


Figure 5.4.: LP-Modell: Dichtefunktion $f_z(z)$ der individuellen Nutzenfunktionen für eine Alternative (oben, rot), die Dichtefunktion $f_{Z_1-Z_2}$ der Nutzendifferenz (oben, blau) und die resultierende Auswahlwahrscheinlichkeit $P(1) = F_{Z_1-Z_2}(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)$ für Alternative 1 nach Gl. (5.19).

wobei $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$ die tabellierte Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ ist.

Diskussion des Probitmodells:

- Ein *Vorteil* des Probit-Modells besteht in der Normalverteilung der Zufallsanteile: Nach dem **Zentralen Grenzwertsatz der Statistik** ist nämlich eine aus vielen voneinander unabhängigen Einflussgrößen (z.B. denen von Abschnitt 5.2) resultierende Zufallsgröße Z_k normalverteilt, *unabhängig* von den Verteilungen der einzelnen Einflussgrößen, solange jeder Einflussfaktor für sich nur einen kleinen Anteil hat. Unter sehr allgemeinen und schwachen Annahmen bekommt man daher eine Gaußverteilung für die Z_k .
- Der *Nachteil* des Probit-Modells ist die sehr aufwändige Verallgemeinerung auf mehr als zwei Alternativen, welche i.A. nur numerisch möglich ist.

5.4.3. Logit-Modell

Beim **Logit-Modell** gehorchen die stochastischen Anteile der Nutzenfunktion einer sog. **Extremwertverteilung**, auch **Gumbel-Verteilung** genannt. Eine Gumbel-verteilte Zufallsgröße X mit Erwartungswert $E(X) = 0$ und Varianz $\sigma^2 = \pi^2/(6\lambda^2)$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_{\text{Gu}}(x) = e^{-e^{-(\lambda x + \gamma)}} = \exp\left(-e^{-(\lambda x + \gamma)}\right) \quad (5.23)$$

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

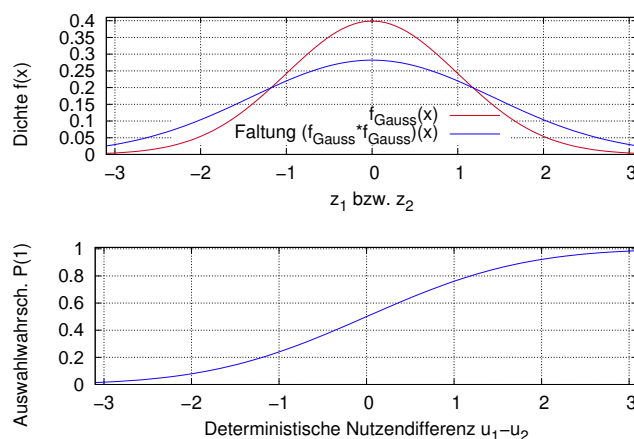


Figure 5.5.: Probit-Modell: Dichtefunktion $f_z(z)$ der individuellen Nutzenfunktionen für eine Alternative (oben, rot), die Dichtefunktion $f_{Z_1-Z_2}$ der Nutzendifferenz (oben, blau) und die resultierende Auswahlwahrscheinlichkeit $P(1) = F_{Z_1-Z_2}(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)$ für Alternative 1 nach Gl. (5.22).

mit der *Euler'schen Konstante* $\gamma \approx 0.577$, die nötig ist, um den Erwartungswert zu null zu machen.² Um die doppelte Exponentiation übersichtlicher zu schreiben, wird im Weiteren die Schreibweise auf der rechten Seite von (5.23) verwendet. Die Dichtefunktion ist, wie üblich, durch die Ableitung gegeben:

$$f_{\text{Gu}}(x) = F'_{\text{Gu}}(x) = \lambda e^{-(\lambda x + \gamma)} \exp\left(-e^{-(\lambda x + \gamma)}\right). \quad (5.24)$$

Wie der Name schon andeutet, beschreibt die Extremwertverteilung die Verteilung des *Maximums* von mehreren unabhängigen Zufallsvariablen.³ Neben vielen weiteren Eigenschaften hat die Gumbelverteilung aber vor allem die bemerkenswerte Eigenschaft, dass die Differenz zweier gumbelverteilten Zufallsvariablen einer einfachen Verteilung gehorcht (der "logistischen" Verteilung) und dass das Ergebnis – im Gegensatz zu den anderen Modellen – auf den multinomialen Fall (mehr als zwei Alternativen) leicht erweiterbar ist.

Für zwei Alternativen ergibt der Faltungssatz (5.16) zusammen mit (5.24) und (5.23) die *Verteilungsfunktion* der Differenz zweier gumbelverteilten Zufallsnutzen Z_1 und Z_2 :

$$F_{z_1-z_2}(z) = \frac{e^{\lambda z}}{1 + e^{\lambda z}} \quad (5.25)$$

²Wir könnten γ aber auch weglassen, da es ja nur auf Nutzendifferenzen ankommt und sich gleiche Erwartungswerte bei den Zufallsnutzen der verschiedenen Alternativen in der Entscheidungsfindung quasi wegheben. In der Tat kommt im Ergebnis (5.26) kein γ vor.

³Unter der Einschränkung, dass deren Dichte für große x -Werte exponentiell abfällt.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

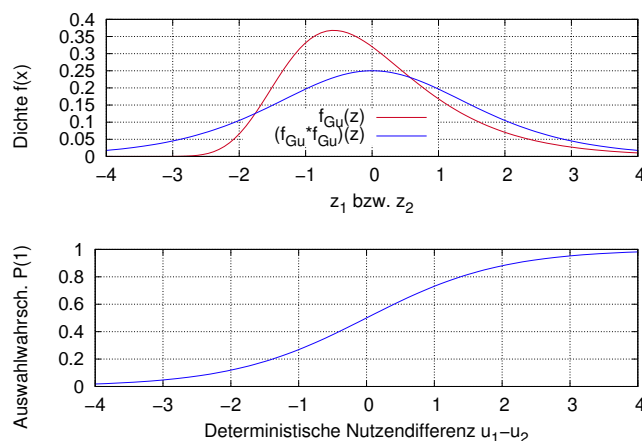


Figure 5.6.: Logit-Modell: Dichtefunktion $f_z(z)$ der individuellen Nutzenfunktionen für eine Alternative (oben, rot), die Dichtefunktion $f_{Z_1-Z_2}$ der Nutzendifferenz (oben, blau) und die resultierende Auswahlwahrscheinlichkeit $P(1) = F_{Z_1-Z_2}(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)$ für Alternative 1 nach Gl. (5.26).

Damit ergibt das allgemeine binäre Modell (5.14) das binäre Logit-Modell:

$$A_1 = P(1) = \frac{e^{\lambda(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)}}{1 + e^{\lambda(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)}} = \frac{e^{\lambda\bar{u}_1}}{e^{\lambda\bar{u}_1} + e^{\lambda\bar{u}_2}} \quad (5.26)$$

Da das Logit-Modell, im Gegensatz zu den LP- und Probit-Modellen, in einfacher Weise auf mehr als zwei Alternativen erweiterbar ist (vgl. nächsten Abschnitt), ist es das am häufigsten angewandte Aufteilungsmodell. Man sollte aber immer im Hinterkopf behalten, dass es auf einer speziellen, unsymmetrischen Verteilung der individuellen Nutzenfunktion beruht, für die es i.A. keine empirische Motivation gibt.⁴

Aufgabe:

Berechnen Sie den Anteil $A_1(\Delta\bar{u})$ der Alternative 1 als Funktion der mittleren Nutzendifferenz für exponentialverteilte Zufallsanteile, die also der Verteilung

$$F_1(z) = F_2(z) = \begin{cases} e^{-z/\tau} & z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gehörchen. Was könnte eine solche Verteilung beschreiben?

⁴Die Tatsache, dass die Gumbelverteilung die Verteilung des Maximums vieler Zufallsvariablen mit exponentiell abfallenden Dichten beschreibt, hat nichts mit dem Nutzenmaximum bei der Formulierung der stochastischen Wahltheorie zu tun. Vielmehr bedeutet der Inhalt der stochastischen Wahltheorie, dass von Gumbel-verteilten Zufallsvariablen *selbst* das Maximum gebildet wird.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

5.5. Das Multinomial-Logit-Modell

Die Annahmen der diskreten Wahltheorie kann man für mehr als zwei Alternativen zu folgendem allgemeinen Ausdruck für den Anteil A_k des Verkehrsmodus k zusammenfassen:

$$A_k = P((\bar{u}_k + Z_k \geq \bar{u}_1 + Z_1) \cap (\bar{u}_k + Z_k \geq \bar{u}_2 + Z_2) \cap \dots \cap (\bar{u}_k + Z_k \geq \bar{u}_K + Z_K)). \quad (5.27)$$

Hier steht $P()$ für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis in der Klammer zutrifft und \cap für die Schnittmenge (“AND”-Bedingung) der Ereignisse

Dies führt auf eine Integralformulierung, welche bemerkenswerterweise für das Logit-Modell (und nur für dieses) analytisch ausrechenbar ist. Das Ergebnis ist das **Multinomial-Logit-Modell** (MNL) für die Wahrscheinlichkeit, Alternative k von K Alternativen zu wählen:

$$A_k = P(\text{Alternative } k) = \frac{e^{\lambda \bar{u}_k}}{\sum_{k'} e^{\lambda \bar{u}_{k'}}} \quad (5.28)$$

Es hat folgende Eigenschaften

- Formal ist das MNL-Modell nichts anderes als das Wilson-Modell der Verkehrsverteilung mit allen Vor- und Nachteilen. Insbesondere folgt aus der Annahme konstanter Verteilungen für den Zufallsnutzen, dass bei sehr langen Wegen beispielsweise 5 min Differenz genauso viel zählen wie bei sehr kurzen, während in Realität bei langen Wegen auch die Nutzenunschärfe, also die Varianz des Zufallsnutzens, eher zunimmt.
- Das MNL-Modell hat die wichtige **IIA-Eigenschaft**. Diese Eigenschaft, englisch *independence from irrelevant alternatives* bedeutet, dass der Quotient $A_k/A_l = P(k)/P(l)$ der Anteile zweier Alternativen nicht von weiteren Alternativen $k' \neq k, l$ abhängt, diese also somit “irrelevant” sind. Der “relative Vorteile” von Alternative 1 gegenüber 2 hängt also nicht davon ab, ob es z.B. eine viel bessere weitere Alternative gibt oder nicht.

Aufgabe:

Zeigen Sie die IIA-Eigenschaft des Multinomial-Logit-Modells indem Sie aus (5.28) einen expliziten Ausdruck für den Quotient zweier Auswahlwahrscheinlichkeiten, $P(k)/P(l)$, herleiten.

Aufgabe:

Zeigen Sie, dass pro 25 km der Quotient $A_{\text{ÖV}}/A_{\text{MIV}}$ um den Faktor $1/e = 0.368$ abnimmt, falls $\lambda^{-1} = 5$ min und die mittleren Geschwindigkeiten durch $v_{\text{ÖV}} = 50$ km/h und $v_{\text{MIV}} = 60$ km/h gegeben sind.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

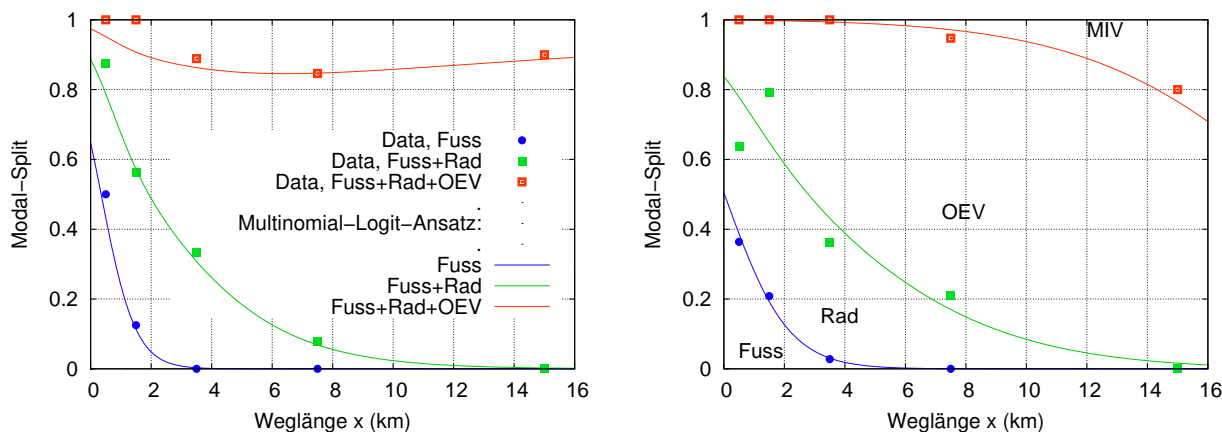


Figure 5.7.: Kalibrierung des Multinomial-Logit-Modells an die Daten der Tabelle 5.1 (links) und an Daten einer späteren Erhebung mit geringerem Pkw-Anteil (rechts). Die kalibrierten Modellparameter für das linke Bild sind $\beta_1 = -2.33$, $\beta_2 = -0.47$, $\beta_3 = -0.02$, $\beta_4 = 4.50$, $\beta_5 = 3.11$, $\beta_6 = 2.14$.

Im Folgenden wenden wir das Multinomial-Logit-Modell (5.28) auf die in Tabelle 5.1 wiedergegebenen empirischen Daten an (Abb. 5.7). Dabei verwenden wir als Ansatz für die Nutzenfunktion Ausdruck (5.3), allerdings ohne die (nicht erhobenen) Merkmale Geschlecht und Kfz-Verfügbarkeit:

$$U(k, r) = (\beta_1 \delta_{k1} + \beta_2 \delta_{k2} + \beta_3 \delta_{k3})r + \beta_4 \delta_{k1} + \beta_5 \delta_{k2} + \beta_6 \delta_{k3}. \quad (5.29)$$

Im MNL-Modell (5.28) selbst wurde der Unschärfeparameter $\lambda = 1$ gesetzt. Dies ist möglich, da eine Multiplikation der Nutzenfunktionen (des deterministischen *und* stochastischen Anteils!) mit einem festen Faktor ja nichts am Ergebnis ändert und somit dieser Faktor verwendet werden kann, um den Skalierungsfaktor λ der Gumbelverteilung (im Wesentlichen der Kehrwert der Standardabweichung) =1 zu setzen. Abbildung 5.7 zeigt das Ergebnis einer Kalibrierung (mit der erst in Vertiefungskursen behandelten **Maximum-Likelihood-Methode**) für die Daten von in den Vorlesungen durchgeführten "Erhebungen". Dabei wurde die besonders anschauliche *kumulierte Darstellung* des Modal-Split gewählt, bei der explizit ersichtlich wird, dass sich die einzelnen Anteile zu 1 summieren.

Die Nutzenfunktion (5.29) kann man als negative Haustür-zu-Haustür-Zeit T_k relativ zum MIV ($k = 4$) ansehen, und zwar durch die δ -Selektoren alternativenspezifisch für jedes Verkehrsmittel getrennt:

$$\bar{u}_k(r) - u_4(r) = - \left(T_{0,k} + \frac{r}{v_k} \right). \quad (5.30)$$

Die Anteile T_{0k} bezeichnet einen konstanter Anteil (*Rüstzeit*), der z.B. bei IV-Modi die Zeit zum Holen und Abstellen des Verkehrsmittels (Parkplatzsuche!), bei Fahrrad und

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

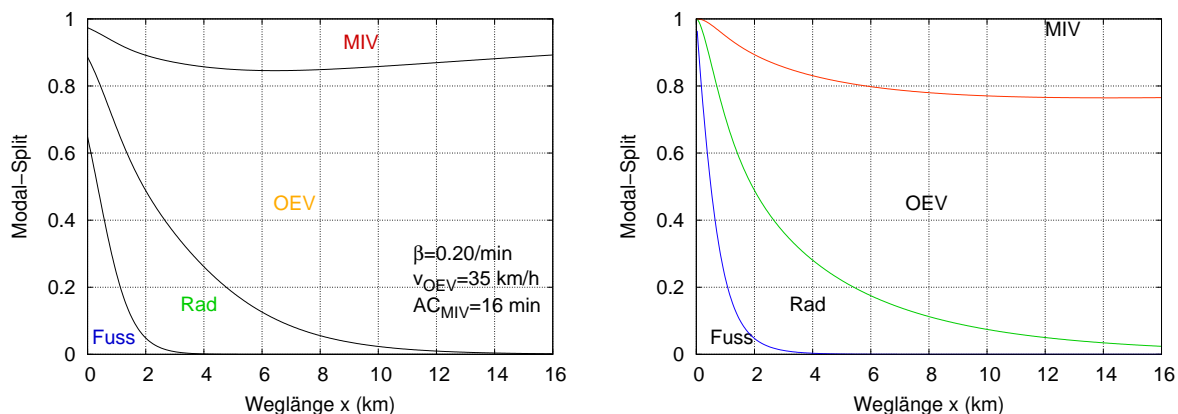


Figure 5.8.: Links: Modal-Split in Abhängigkeit der Streckenentfernung (kumulierte Darstellung) für konstanten Unschärfeparameter $1/\lambda = 5 \text{ min}$ sowie Streckenwiderstände $W_k(x) = T_{0k} + x/v_k$ mit Konstantanteilen (“Rüstzeiten”) $T_{0,\text{Fuß}} = 0$, $T_{0,\text{Rad}} = 5 \text{ min}$, $T_{0,\text{ÖV}} = 10 \text{ min}$, $T_{0,\text{IV}} = 16 \text{ min}$, und Geschwindigkeiten $v_{\text{Fuß}} = 5 \text{ km/h}$, $v_{\text{Rad}} = 15 \text{ km/h}$, $v_{\text{ÖV}} = 35 \text{ km/h}$, und $v_{\text{IV}} = 30 \text{ km/h}$. Im rechten Plot ist der Unschärfeparameter variabel und durch Gl. (5.31) gegeben. Außerdem ergeben sich andere (hier nicht angegebene) Werte für die T_{0k} und v_k .

Motorrad zusätzlich das Anziehen und Ablegen der Schutzkleidung und bei den ÖV-Modi die Zugangszeit, Abgangszeit sowie die mittlere Wartezeit einschließt. Dieser Anteil entspricht den Parametern β_4 bis β_6 . Die Anteile β_4 und β_5 sind positiv, da Fußgänger und Radler weniger Konstantzeiten haben als Autofahrer. Dass allerdings auch $\beta_6 > 0$ ist, die Konstantzeit der Alternative 3=ÖV also geringer als die des MIV ist, verwundert zunächst. In T_{03} sind ja schließlich die gesamten Wartezeiten und Zugangszeiten des ÖV enthalten. Der Grund ist hier die nichtberücksichtigte Kfz-Verfügbarkeit. Man sieht an diesem Beispiel sehr schön, wie nichtberücksichtigte systematische Effekte auf die alternativenspezifischen Konstanten umgeschlagen werden können.

Der mit der Streckenlänge r unterschiedlich schnell linear wachsender Anteil berücksichtigt die unterschiedlichen mittleren Geschwindigkeit v_k der Verkehrsmittel, wobei die β_k , $k = 1, \dots, 3$ proportional zur Differenz $1/v_k - 1/v_4$ der Geschwindigkeits-Kehrwerte, bezogen auf den Geschwindigkeits-Kehrwert für MIV sind. Bei allen Geschwindigkeiten sind Ampelstopps bzw. Stopps an Haltestellen berücksichtigt, so dass im Stadtverkehr die mittleren Geschwindigkeiten kaum über 30 km/h hinausgehen. Wie erwartet, sind β_1 und β_2 deutlich negativ (zu Fuß und mit dem Rad braucht man deutlich länger als mit dem Kfz), während $\beta_3 \approx 0$ bedeutet, dass der ÖV im Mittel etwa gleich schnell ist wie der MIV.

Die Übereinstimmung ist erstaunlich gut, abgesehen von sehr kurzen und sehr langen Strecken. Dies geht auf folgende Eigenschaften des MNL-Modells mit konstanter Unschärfe λ zurück, wenn man es auf Verkehr anwendet:

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

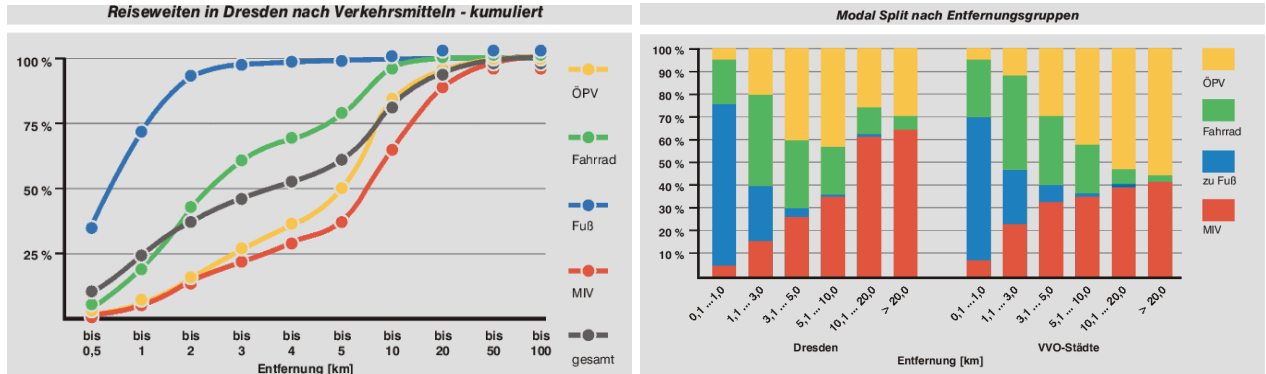


Figure 5.9.: Typische empirisches Ergebnisse für die Verteilungsfunktionen der Reiseweitenverteilung der einzelnen Verkehrsmodi (links) und für den entfernungsabhängigen Modal Split in kumulierter Darstellung (rechts). Quelle: “Mobilität in Dresden und Umland”, Stadt Dresden, im Rahmen der SrV (2003).

1. Feste *Differenzen* in den komplexen Reisezeiten führen zu festen *Quotienten* im Modal-Split. Eine Differenz von $1/\lambda=5$ Minuten führt z.B. zu einem Quotientne von e^{-1} . Als Folgerung daraus wird beispielsweise bei 100 km Streckenlänge ein Unterschied von 10 Minuten zwischen verschiedenen Verkehrsmitteln genauso bewertet wird wie bei 100 m, was offensichtlich nicht der Realität entspricht. Daraus ergeben sich die beiden folgenden Inkonsistenzen.
2. Im Grenzfall verschwindender Streckenlänge geht der Fußgängeranteil nicht gegen 100%. Vielmehr ist er durch

$$A_{\text{Fuß}}(0) = A_1(0) = \frac{e^{-\lambda T_{10}}}{\sum_{k=1}^K e^{-\lambda T_{k0}}}$$

gegeben.

Wie bereits gesagt, ist dies eine Folge der konstanten Standardabweichung des Zufallsnutzens. Diese Unzulänglichkeit kann man lösen, indem man eine mit der Weglänge x ansteigende Unschärfe $\lambda(x)$ einführt (die Herleitungen des MNL werden dadurch nicht berührt). Folgender Ansatz mit dem Exponenten α erlaubt kontinuierliche Übergänge zwischen dem konstanten und dem linearen Fall:

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{x_0}{x} \right)^\alpha. \quad (5.31)$$

Für den konstanten Fall gilt $\alpha = 0$ und für den linearen Anstieg $\alpha = 1$.

Abbildung 5.8 zeigt das Ergebnis für das Modell mit variablem λ gemäß obiger Gleichung mit den Werten $\lambda_0 = 1/(4 \text{ min})$ und $\alpha = 0.3$. Dieses Modell erfüllt zwar die Bedingung von 100% Fußgängeranteil für $x \rightarrow 0$ und ist bei kleinen Streckenentfernungen besser, aber bei größeren Entfernungen schlechter als die Modellvariante mit konstantem λ , Abb. 5.7.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Multinomial-Logit-Modell mit geeigneten Ansätzen für die Utilities und die Unschärfe bemerkenswerte Aussagen über das subjektive Empfinden von Wartezeiten und die wahrgenommenen (nicht notwendigerweise tatsächlichen!) mittleren Geschwindigkeiten sowie deren Streuungen gestattet. Ein systematischer Fehler ergibt sich im vorliegenden Fall allerdings durch die fehlende Berücksichtigung des Einflusses der PKW-Verfügbarkeit: Für Verkehrsteilnehmer ohne PKW-Verfügbarkeit müsste man eigentlich hohe "Strafkosten" bei der MIV-Utility annehmen (vgl. Abschnitt 5.2). Aufgrund des geringen Stichprobenumfangs ergeben sich dennoch bei beiden Modellvarianten keine signifikanten Abweichungen zu den Daten. Näheres dazu im zweiten Teil dieses Skriptes.

Verständnisfrage:

Wie könnte man aus der Reiseweitenverteilung der verschiedenen Modi, aufgetragen wie in Abb. 5.9 links, zum Modal Split kommen?

Aufgabe:

Skizzieren Sie die Vorgehensweise bei der Aufteilung mit dem Multinomial-Logit-Modell unter Berücksichtigung der Kfz-Verfügbarkeit. Welche Änderungen der kalibrierten MIV-Utility würden Sie für Verkehrsteilnehmer mit Kfz-Verfügbarkeit gegenüber dem Ergebnis bei Verwendung der Utility (5.29) erwarten?

Aufgabe:

Berechnen Sie die Aufteilung auf die vier Modi Fuß, Rad, ÖV und MIV unter Verwendung der komplexen Reisezeit $T = T_0 + x/v$ als Widerstandsfunktion mit den Parametern $T_0 = \{0, 5 \text{ min}, 10 \text{ min}, 5 \text{ min}\}$ und $v = \{5 \text{ km/h}, 15 \text{ km/h}, 30 \text{ km/h} \text{ und } 40 \text{ km/h}\}$ für die 4 Modi, jeweils in dieser Reihenfolge. Nehmen Sie dabei an, dass bei den entsprechenden Fahrten 50% der Verkehrsteilnehmer kein motorisiertes Gefährt und 20% kein Fahrrad zur Verfügung haben, aber jeder mindestens eines dieser Verkehrsmittel zur Verfügung hat. Berechnen Sie $A_k(x)$ mit dem MNL-Modell und setzen Sie für 2 km und 5 km Zahlenwerte ein. Wie sind die Anteile im hypothetischen Grenzfall $x \rightarrow \infty$?

5.6. Aufteilung mit der Kirchhoff'schen Regel

Bei der Verkehrsaufteilung nach der Kirchhoffschen Regel wird die Aufteilung so vorgenommen, als hätte man ein elektrisches Netzwerk mit parallel geschalteten Widerständen vor sich (vgl. Abb. 5.10). Es werden die folgenden Analogien angenommen:

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

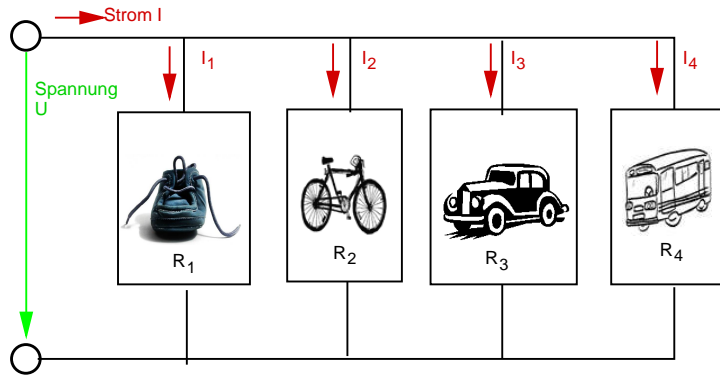


Figure 5.10.: Verkehrsaufteilung in Analogie zu elektrischen Netzwerken nach der Kirchhoff'schen Regel. Das "Verlangen", von A nach B zu kommen, stellt dabei das Analogon zur elektrischen Spannung U dar, während die einzelnen Ströme I_k , $k = 1, \dots, 4$ proportional zum Verkehrsfluss mit Verkehrsmittel k , also proportional zum Anteil A_k sind. Schließlich stellen die "Widerstandsfunktionen" (negative Utilities) das Analogon zu Ohm'schen elektrischen Widerständen dar.

- Die Widerstandsfunktionen $W_k = -\bar{u}_k = T_k$, also die negativen Utilities bzw. die positiven komplexen Reisezeiten, werden quasi wörtlich mit Ohm'schen elektrischen Widerständen identifiziert.
- Die Notwendigkeit, den Weg (mit irgendeinem Verkehrsmittel) zurückzulegen, wird gleich der elektrischen Spannung U_{el} gesetzt.
- Schließlich wird der Verkehrsteilnehmer als Elektron aufgefasst, welches von Minus nach Plus will.⁵ Daraus folgt, dass die durch die verschiedenen Widerstände fließenden elektrischen Ströme proportional zu den Verkehrsströmen, also letztendlich proportional zu den Anteilen A_k sind.

Da man als Verkehrsteilnehmer (bzw. als Elektron) die Wahl hat, welches Verkehrsmittel man benutzen will (durch welchen Widerstand man fließen will), sind die Widerstände als Parallelschaltung angeordnet (vgl. Abb. 5.10).

Aus der Kirchhoff'schen Maschenregel

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

welche nichts anderes als die Ladungserhaltung bzw. die Erhaltung der Zahl der Verkehrsteilnehmer darstellt, sowie dem Ohmschen Gesetz

$$I_k = \frac{U_{\text{el}}}{R_k}$$

⁵Für Elektrotechniker: Die Stromrichtung ("Von Plus nach Minus") ist entgegengesetzt zur Flussrichtung der Elektronen definiert.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

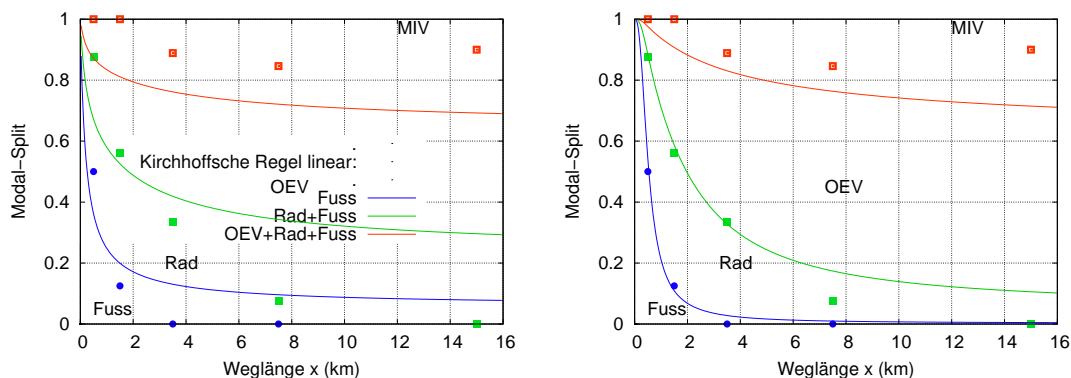


Figure 5.11.: Kumulierte Darstellung des aus Tabelle 5.1 gewonnenen “empirischen” Modal-Splits in Abhängigkeit der Entfernung (Symbole) mit der Kirchhoffschen Aufteilungsregel (Linien) unter Verwendung linearer “Widerstände” $R_k = -\bar{u}_k = T_k$ (links) und nichtlinearer “Widerstände” $R_k = -\bar{u}_k^3 = T_k^3$ (rechts). Die Parameter der komplexen Reisezeiten $T_k = T_{k0} + \frac{x}{v_k}$ für lineare Widerstände sind $T_{0,\text{Fuß}} = 0$, $v_{\text{Fuß}} = 2$ km/h, $T_{0,\text{Rad}} = 5$ min, $v_{\text{Rad}} = 5$ km/h, $T_{0,\text{ÖV}} = 10$ min, $v_{\text{ÖV}} = 50$ km/h, sowie $T_{0,\text{IV}} = 50$ min, $v_{\text{IV}} = 20$ km/h. Im nichtlinearen Fall ergibt die Kalibrierung leicht unterschiedliche Werte.

folgt für die Stromanteile I_k/I bzw. der Verkehrsmittelanteile A_k die Beziehung

$$A_k = \frac{I_k}{I} = \frac{\frac{U_{\text{el}}}{R_k}}{\sum_{j=1}^4 \frac{U_{\text{el}}}{R_j}}.$$

Nach Herauskürzen der Spannung U_{el} und Verallgemeinerung auf K verschiedene, zur Auswahl stehenden Verkehrsmittel sowie der Analogie-Gleichsetzung der elektrischen Widerstände R_k mit den Reisezeiten T_k ergibt sich

$$A_k = \frac{\frac{1}{T_k}}{\sum_{j=1}^K \frac{1}{T_j}} \quad \text{Kirchhoffsche Aufteilungsregel} \quad (5.32)$$

Abbildung 5.11 zeigt, dass die Aufteilung mit der Original-Kirchhoffschen Regel mit linearen Widerständen zu unbefriedigenden Ergebnissen führt. Erstens sind die Abweichungen inakzeptabel groß (und auch im vorliegendem Fall einer kleinen Stichprobe signifikant), zweitens sind die kalibrierten Parameter der komplexen Reisezeit unrealistisch, z.B. mit $v_{\text{Fuß}} = 2$ km/h, oder einer MIV-Wartezeit von 50 Minuten, vgl. Unterschrift zu dieser Abbildung. Ein Grund dafür ist, dass in der elektrischen Analogie auch durch große Widerstände ein nur relativ schwach mit $1/R$ abfallender Stromanteil fließen muss, da ja an jedem Widerstand die selbe Spannung anliegen muss.

5. Verkehrsmittelwahl bzw. Verkehrsaufteilung

Um das Ergebnis zu verbessern, wurde in Abb. 5.11 rechts die Kirchhoffsche Aufteilungsregel mit nichtlinearen Widerständen $R_k = -\bar{u}_k^3 = T_k^3$ durchgeführt. Dadurch sind sowohl die Abweichungen zu den empirischen Daten geringer als auch die kalibrierten komplexen Reisezeiten realistischer. Beides kommt jedoch nicht an die Qualität des Multinomial-Logit-Modells heran.

Es sei noch erwähnt, dass man mit dem nichtlinearen Widerstand $R_k = e^{-\lambda \bar{u}_k}$ das Kirchhoff-Modell formal zum MNL-Modell wird.

6. Simultane Verkehrsverteilung und -aufteilung

Führt man die Verkehrsverteilung und -aufteilung nacheinander durch, ergibt sich, wie bereits diskutiert, die Problematik, dass bei der Berechnung der Widerstands- bzw. Nutzenfunktionen nicht alle nötigen Informationen verfügbar sind und durch Ad-Hoc-Annahmen ersetzt werden müssen.

Beim Trip-Interchange-Ansatz, also Berechnung der Verteilung vor der Aufteilung (vgl. Abb. 4.3) muss man bei der Verteilung die eigentlich für jedes Verkehrsmittel unterschiedlichen Widerstände durch einen pauschalen Widerstand ersetzen, welcher mehr oder weniger gut dem zu diesem Zeitpunkt unbekanntem “gewichteten Mittelwert” der Widerstände entspricht.

Beim Trip-End-Ansatz (Aufteilung vor der Verteilung) sind hingegen die für die Berechnung der Aufteilung der Quell- und Zielsummen, z.B. mit den Aufteilungsmodellen von Kapitel 5, die dazu nötigen Verteilungen der Streckenlängen unbekannt.

Ein konsistenter Ansatz, welcher diese “Henne-Ei-Probleme” löst, ist die **simultane Verkehrsverteilung und -aufteilung**. Der Grundgedanke ist eine Verallgemeinerung der Grundaufgabe der Verkehrsverteilung:

Simultane Verkehrsverteilung und -aufteilung: Ermittlung der Elemente der dreidimensionalen verkehrsmittelaufgelösten Verkehrsstrommatrix V_{ijk} , also der mittleren täglichen Zahl der Fahrten von Bezirk i nach Bezirk j mit Verkehrsmittel k unter Berücksichtigung der Randsummenbedingungen (RSB)

$$\begin{aligned}\sum_j \sum_k V_{ijk} &= Q_i && \text{Quellsummenbedingung,} \\ \sum_i \sum_k V_{ijk} &= Z_j && \text{Zielsummenbedingung,} \\ \sum_i \sum_j V_{ijk} &= A_k && \text{Globaler Modal-Split.}\end{aligned}\tag{6.1}$$

Verständnisfrage:

Wieviele Randsummenbedingungen gibt es bei der grundlegenden Aufgabenstellung (6.1) der simultanen Ver- und Aufteilung?

6. Simultane Verkehrsverteilung und -aufteilung

6.1. Grundlösung des simultanen Ansatzes

Die Herleitung der Grundlösung mit bedingten Wahrscheinlichkeiten bzw. mit der Entropiemethode geht analog zu den Kapiteln 4.8 bzw. 4.9 des Abschnitts über Verkehrsverteilung. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger realisierter Weg (Ereignis R) von i nach j mit Verkehrsmittel k zurückgelegt wird, durch

$$v_{ijk} = \frac{V_{ijk}}{V} = P(A_i \cap E_j \cap M_k | R) \quad (6.2)$$

gegeben, er beginnt also in i (Ereignis A_i), endet in j (Ereignis E_j) und das Verkehrsmittel ist k (Ereignis M_k). Analog ist die Realisierungswahrscheinlichkeit eines Wegs, der von den RSB her bei i beginnen und bei j enden darf und für den das Verkehrsmittel k zur Verfügung steht, durch

$$B_{ijk} = B(W_{ijk}) = P(R | A_i \cap E_j \cap M_k) \quad (6.3)$$

gegeben. Unabhängig von der Art der Kopplung (harte oder weiche RSB) lässt sich die **Grundlösung der simultanen Verteilung und Aufteilung** darstellen durch

$$V_{ijk} = V B_{ijk} f_i g_j h_k, \quad B_{ijk} = B(W_{ijk}). \quad (6.4)$$

Verständnisfrage:

Wie würde man vorgehen, wenn nicht nur der globale Modal-Split, sondern auch der Modal-Split in jedem Bezirk, A_{ki} , z.B. durch Befragungen bekannt ist?

6.2. Spezielle Modelle

6.2.1. Verallgemeinertes Wilson- bzw. Logit-Modell

Das allgemeine Entropieprinzip (4.50), welches schon bei der Herleitung des Wilson Modells verwendet wurde (vgl. Kap. 4.6), ergibt die Lösung (6.4) mit der Bewertungsfunktion

$$B(W_{ijk}) = e^{\lambda W_{ijk}}, \quad (6.5)$$

welche man als **verallgemeinertes Wilsonmodell** oder auch als **verallgemeinertes Logitmodell** bezeichnet.

Das bei der Herleitung verwendete Entropieprinzip nimmt bemerkenswerterweise *keine* Bewertung der Attraktivität einer Verbindung $\{ijk\}$ an, sondern setzt (neben den drei Kategorien von RSB) nur voraus, dass der *mittlere Widerstand*

$$E(W) = \frac{1}{V} \sum_i \sum_j \sum_k V_{ijk} W_{ijk}$$

6. Simultane Verkehrsverteilung und -aufteilung

fest vorgegeben ist. Der Parameter λ dieses Modells hat etwa die Größenordnung $\lambda \approx 2/E(W)$ (vgl. die Aufgabe “Verkehrsleistung aus der Verkehrsstrommatrix” auf S. 85).

6.2.2. Trilineares EVA-Modell

Häufig wird auch das **simultane** oder **trilineare EVA-Modell** eingesetzt, bei der die Bewertungselemente

$$B_{ijk} = B_{\text{EVA}}^{(k)}(W_{ijk}) \quad (6.6)$$

durch die EVA-Funktion, Gln. (4.26) mit (4.27), angesetzt werden. Das Superskript (k) bei den EVA-Funktionen soll darauf hinweisen, dass die EVA-Parameter E , F und W_0 im Allgemeinen als vom Modus k abhängig angenommen werden.

Aufgabe: Zufallsmodell

Wie sieht die Lösung der simultanen Ver- und Aufteilung für das Zufallsmodell aus?

6.3. Lösung für die verschiedenen Kopplungen

Analog zu Kap. 4.5 hängt die Lösung des simultane Verteilungs- und Aufteilungsproblem, d.h. die Multiplikatoren f_i , g_j und h_k der allgemeinen Lösung, von der Art der Kopplungen ab. Jede der drei RSB von (6.1) kann entweder hart oder weich sein. Für die Quell- und Zielsummenbedingungen gelten dieselben Kriterien wie in Abschnitt 4.5. Für die Randsummenbedingung des globalen Modal Splits gilt:

- **Analyse-Stadium** der Verkehrsplanung bzw. wenn der globale Modal-Split A_k bekannt ist: Dann sind die Modal-Split-RSB hart und es gibt folgende Fälle:
 - Sind sowohl die Quell-RSB als auch die Ziel-RSB weich bzw. frei, lässt sich das simultane Problem explizit lösen mit dem Ergebnis

$$V_{ijk} = \frac{B_{ijk} \tilde{Q}_i \tilde{Z}_j A_k}{\sum_l \sum_m B_{lmk} \tilde{Q}_l \tilde{Z}_m}. \quad (6.7)$$

- Sind entweder die Quell- oder die Ziel-RSB hart, erhält man einen bilinearen Ansatz analog zu Abschnitt 4.5.
 - Sind alle RSB hart, muss man den trilinearen Ansatz rekursiv durch Einsetzen in die RSB lösen.
- **Prognose-Stadium** der Verkehrsplanung bzw. wenn der globale Modal-Split gänzlich unbekannt ist: Dann sind die RSB bezüglich des Modal-Splits weich und die Split-Anteile A_k werden – analog den Quell- und Zielpotenzialen der weichen Quell- und Zielsummenbedingungen – zu “Richtgrößen” \tilde{A}_k . Lediglich $\sum_k \tilde{A}_k = 1$

6. Simultane Verkehrsverteilung und -aufteilung

muss natürlich immer erfüllt sein. Bemerkenswerterweise lässt sich in diesem Fall das Problem der simultanen Verkehrsver- und -aufteilung auf das Problem der Verkehrsverteilung nach dem Trip-Interchange Ansatz zurückführen. Je nachdem, ob die Quell- und Ziel-RSB hart oder weich sind, kann man die vier in Abschnitt 4.5 beschriebenen Lösungsansätze der Verteilung verwenden, wobei die Elemente der “effektive Bewertungsmatrix” immer durch

$$B_{ij} = \sum_k B_{ijk} \tilde{A}_k \quad (6.8)$$

gegeben sind. Die Elemente der effektive Bewertungsmatrix sind also die mit den Modal-Split-Richtwerten \tilde{A}_k gewichteten Mittel der einzelnen Bewertungsgrößen B_{ijk} bezüglich der verschiedenen Verkehrsmodi. Die Verkehrsstrommatrix

$$V_{ijk} = V_{ij} A_{ijk} = V_{ij} \frac{B_{ijk} \tilde{A}_k}{B_{ij}} \quad (6.9)$$

ist dann das Ergebnis V_{ij} der Aufteilung mit der effektiven Bewertungsmatrix, multipliziert mit dem Anteil $A_{ijk} = B_{ijk} \tilde{A}_k / B_{ij}$ des Verkehrsmittels k an der effektiven Bewertungsmatrix.

Aufgabe:

Geben Sie die Lösung der simultanen Ver- und Aufteilung für “weiche” Modal-Split-RSB und folgende Quell- und Ziel-RSB an:

- (i) harte Quell-RSB und weiche Ziel-RSB,
- (ii) weiche Quell-RSB und harte Ziel-RSB,
- (iii) sowohl Quell-RSB als auch Ziel-RSB sind weich.

6.4. Globale Modal-Splits

Aus der Lösung des simultanen Modells ergeben sich unter anderem

- Die Modal-Splits der Quellsummen für Bezirk i ,

$$A_{ki}^{(q)} = \frac{\sum_j V_{ijk}}{Q_i} \quad (6.10)$$

- Die Modal-Splits der Zielsummen für Bezirk j ,

$$A_{kj}^{(z)} = \frac{\sum_i V_{ijk}}{Z_j} \quad (6.11)$$

6. Simultane Verkehrsverteilung und -aufteilung

- und im Falle der Prognose bzw. von weichen Modal-Split-RSB

$$A_k = \sum_{ij} v_{ijk} = \frac{\sum_{ij} V_{ijk}}{V} \quad (6.12)$$

Verständnisfrage:

Vergleicht man bei einer konkreten Aufgabenstellung die Lösung der simultanen Ver- und Aufteilung mit weichen und harten Modal-Split, so ergeben sich i.A. Abweichungen, z.B. ein zu geringer Rad- und ÖV-Anteil bei weichen RSB gegenüber den gemessenen bzw. befragten "harten" Anteilen. Wie könnte man das erklären?

6.5. Analyse, Kalibrierung und Prognose

Im Analysefall sollte der globale Modal-Split bekannt sein. Auswertung des Grundmodells mit den dann relevanten harten Modal-Split-RSB ergibt u.A. die Multiplikatoren h_k des allgemeinen trilinearen Ansatzes (6.4). Diese sagen aus, um welchen Faktor sich die tatsächlichen Verkehrsmittelanteile

$$A_{ijk} = \frac{V_{ijk}}{V_{ij}} \quad (6.13)$$

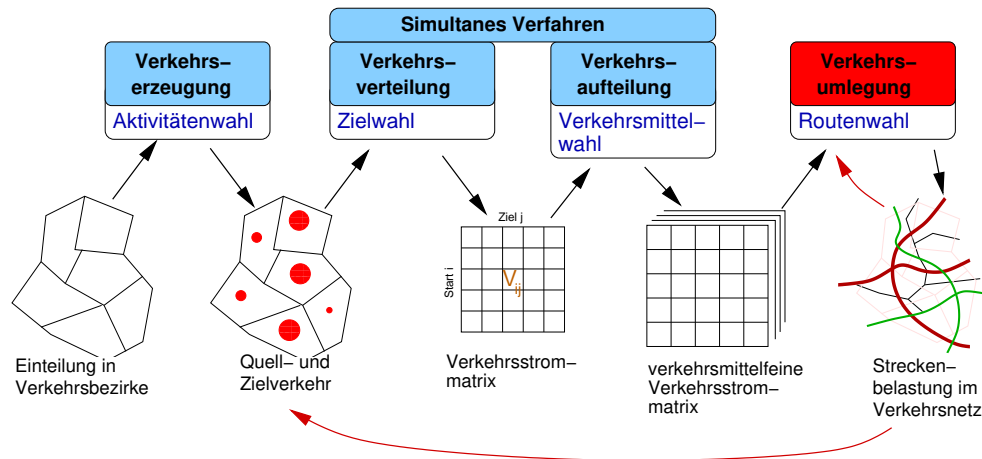
von den eigentlich zu erwartenden Anteilen $B_{ijk}A_k / \sum_l B_{ijl}A_l$ unterscheidet. Offensichtlich gibt es als Ergebnis der Kalibrierung also gewisse *Präferenzen* bezüglich verschiedener Verkehrsmittel, z.B. dem Kfz, welche nicht in den Widerständen oder Bewertungsfunktionen enthalten sind.¹ Da nicht anzunehmen ist, dass diese Präferenzen zum Prognosezeitpunkt verschwinden, behält man diese bei der Prognoserechnung als **Präferenzfaktoren** $h_k^{(\text{Analyse})}$ bei, verwendet also weiche Modal-Split-RSB, aber folgende modifizierte Elemente der Bewertungsmatrix:

$$B_{ijk}^{(\text{Prog})} = B^{(k)} \left(W_{ijk}^{(\text{Prog})} \right) h_k^{(\text{Analyse})}. \quad (6.14)$$

Führte man diese Prognose mit unveränderten Widerständen und unveränderten Quell- und Ziel-RSB durch, erhält man trotz Verwendung von weichen Modal-Split-RSB keine Veränderung, da ja der Unterschied "hart-weich" gerade durch die Präferenzfaktoren berücksichtigt wird. Eine nichttriviale Prognose, also ein vom Analysefall abweichender globaler Modal-Split, ergibt sich im Allgemeinen aber durch veränderter Widerstände $W_{ijk}^{(\text{Prog})} \neq W_{ijk}^{(\text{Analyse})}$ (z.B. aufgrund Verbesserung des ÖV- Angebots oder des IV-Streckennetzes) oder auch durch veränderte Quell- und Zielsummen (also gegenüber dem Analysefall veränderte Raumstrukturen).

¹Ob es tatsächlich diese Präferenzen gibt oder lediglich die Bewertungsfunktionen falsch angesetzt wurden, spielt dabei keine Rolle

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung



7.1. Allgemeines

Die Umlegung ist der letzte Schritt des klassischen Vier-Stufen-Verfahrens der Verkehrsplanung:

In der **Umlegung** werden die einzelnen Elemente der Verkehrsnachfrage auf die Routenalternativen des *konkreten Verkehrsnetzes* aufgeteilt (“umgelegt”).

- Die Umlegung beinhaltet die **Angebotsmodellierung**, während die drei vorhergehenden Schritte Verkehrserzeugung, -verteilung und -aufteilung die **Nachfragemodellierung** umfassen.
- Die Verkehrsinfrastruktur, also das aus Straßen und ÖV-Linien bestehende **Strecken-Netzwerk**, stellt das **Verkehrsangebot** dar (Abschnitt 7.3).
- Die Nachfrage wird in Form von **Fahrtenmatrizen** an den sogenannten **Anbindungsknoten** in das Verkehrsnetz eingekoppelt (Abschnitt 7.2).
- In der Umlegung wird das innere Gleichgewicht gesucht, um die Nachfrage mit dem Angebot abzugleichen. Wie sonst in der Wirtschaft steigt mit der Nachfrage der “Preis”, welcher hier im Wesentlichen der Reisezeit entspricht und durch sogenannte **Capacity-Restraint-Funktionen** modelliert wird (Abschnitt 7.4).

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

7.1.1. Methoden der Umlegung

Die Ansätze zur Umlegung unterscheiden sich, je nachdem, inwieweit die Verkehrsteilnehmer (“Marktteilnehmer”) informiert sind, inwieweit sie mit ihrer Einschätzung übereinstimmen und ob der Prozess quasi-statisch (“stationär”) oder dynamisch betrachtet wird:

- Eine statische, deterministische Umlegung nach dem **Gleichgewichtsverfahren** (Abschnitt 7.5) führt auf das sog. **Nutzergleichgewicht** bzw. **Wardrop-Gleichgewicht**, bei der alle benutzten Routen dieselbe Reisezeit aufweisen und alle nicht benutzten eine höhere. Dies entspricht dem Bild des “perfekten Marktes”, in welchem
 - alle Markt- bzw. Verkehrsteilnehmer verzögerungsfrei und vollständig, informiert sind,
 - jeder Teilnehmer dieselbe Vorstellung vom Nutzen hat,
 - und außerdem alle Teilnehmer “egoistisch” handeln.

Unter diesen Bedingungen bildet sich ein einheitlicher “Preis” für die “Ware” “Transport von A nach B”.

Bemerkenswerterweise entspricht dieser Zustand i.A. *nicht* dem **Systemoptimum** (vgl. Abschnitt 7.6) und kann sogar zu widersprüchlichen Ergebnissen wie dem **Braess-Paradoxon** (Abschnitt 7.7) führen, bei dem sich durch Erhöhen des Angebots (eine neue Strecke wird zur Verfügung gestellt) die Reisezeiten erhöhen.

- Ist die Information über den Verkehrszustand zwar vollständig, aber nicht sofort verfügbar, bewegen sich die Verkehrsteilnehmer allmählich auf das Nutzergleichgewicht hin, zumindest, wenn die Situation stationär ist. Die entsprechenden **Lernverfahren** kann man aber auch als rein numerische Verfahren zur beschleunigten Berechnung des Nutzergleichgewichts sehen (Abschnitt 7.8).
- Ist die Information über den Verkehrszustand unvollständig oder stimmen nicht alle Verkehrsteilnehmer in der Bewertung einer gegebenen Situation überein, so erhält man im Falle eines stationären Systems das **stochastische Nutzergleichgewicht** bzw. **stochastic user equilibrium (SUE)**. Dafür bieten sich die bereits in der Aufteilung angewandten Methoden der diskreten stochastischen Wahltheorie an (Abschnitt 7.9).
- Alle bisherigen Varianten nehmen bezüglich der **Verkehrsdynamik** entweder ein während der Umlegung *stationäres System* an oder beschreiben nur Mittelwerte. In Realität ändert sich aber sowohl die Verkehrsnachfrage als auch die Güte des Angebots (Änderung der Reisezeiten z.B. durch Ausbreitung von Staus oder kurzfristige Streckensperrungen) in kurzen Zeiträumen. Verfahren der **dynamischen Umlegung** berücksichtigen dies, sind aber meist erst im Forschungsstadium. Als Spezialfall der dynamischen Umlegung sind **agentenbasierte Mikromodelle** im Einsatz.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

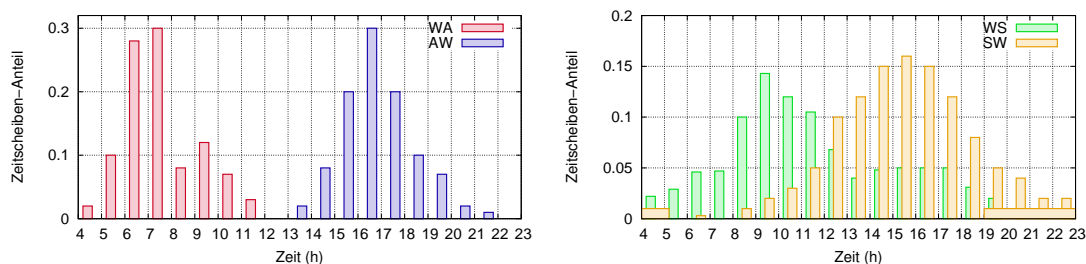


Figure 7.1.: Tagesganglinien in Form von Anteilen $f_{\text{TGL}}^g(t)$ für die Quelle-Ziel-Gruppen $g=\text{WA}, \text{WE}, \text{AW}$ und SW .

7.2. Anbindung der Verkehrsnachfrage an das Netz

Diesen Abschnitt könnte man auch betiteln: “Wie bekomme ich den Verkehr in das Netz”? Nach dem vorhergehenden Kapitel sind die *Orte* der Kopplung durch die Anbindungsknoten gegeben. Das Ergebnis der Nachfragemodellierung, die verkehrsmittelaufgelöste Verkehrsstrommatrix V_{ijk}^g kann man jedoch nicht direkt verwenden, da V_{ijk}^g die Zahl der *personenbezogenen* Wege (von Bezirk i nach Bezirk j mit Verkehrsmodus k) *pro Werktag* für eine Quelle-Ziel-Gruppe g beschreibt, die Umlegung jedoch i.A. *stundenbezogen* durchgeführt wird und als Nachfrage die *Fahrzeug-Fahrten in dieser Stunde* relevant sind. Daher sind drei vorbereitende Schritte zur korrekten Anbindung der Nachfrage notwendig:

1. **Umrechnung Personenfahrten in Fahrzeugfahrten:** Aus der Verkehrsstrommatrix wird durch Division mit dem Belegungsfaktor eine **Fahrtenmatrix** F_{ijk} ermittelt:

$$F_{ijk}^g = \frac{V_{ijk}^g}{b_k^g}. \quad (7.1)$$

Der Belegungsfaktor b_k^g hängt sowohl vom Verkehrsmittel als auch von der QZG g ab. Typische Werte sind z.B. $b_{\text{MIV}}^{\text{WA}} = 1.3$, $b_{\text{MIV}}^{\text{WF}} = 1.8$, $b_{\text{MIV}}^{\text{WK}} = 2.0$. Der ÖV wird grundsätzlich personenbezogen umgelegt, so dass b_{OV}^g immer =1 ist.¹

2. **Disaggregation in Zeitscheiben:** Wegen der stundengenauen Berechnung der Umlegung ist eine **Disaggregation** auf das entsprechende Zeitintervall t (z.B. “Zeitscheibe” $t = 17$ für den Zeitraum zwischen 16 h und 17 h) notwendig:

$$F_{ijk}^g(t) = f_{\text{TGL}}^g(t) F_{ijk}^g \quad (7.2)$$

Hierbei geben die Anteile $f_{\text{TGL}}^g(t)$ die täglichen Verkehrsnachfrage in QZG g an, welche innerhalb der Zeitscheibe t stattfinden. Diese sog. **Tagesganglinien** hängen stark von der QZG ab, z.B. hat $f_{\text{TGL}}^{\text{WA}}(t)$ einen “Peak” in den Morgenstunden und $f_{\text{TGL}}^{\text{AW}}(t)$ in den Nachmittags- und Abendstunden, vgl. Abbildung 7.1.

¹Häufig werden in der Umlegung aber nur die “Verkehrssysteme” IV und ÖV unterschieden.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

3. **Aggregation der Quelle-Ziel-Gruppen und Modi:** Schließlich ist es bei der Umlegung egal, welchen Zweck die jeweilige Fahrt dient (“im Stau sind alle gleich”), so dass als letzter Schritt über alle Quelle-Ziel-Gruppen **aggregiert**, d.h., summiert wird:

$$F_{ijk}(t) = \sum_g F_{ijk}^g(t). \quad (7.3)$$

Manchmal werden auch mehrere Verkehrsmittel k zu wenigen **Verkehrssystemen** zusammengefasst (z.B. nur IV und ÖV), was durch eine analoge Summation realisiert wird.

Die Fahrtenmatrix nach Gleichung (7.3) ist die geeignete Größe zur Einspeisung der Nachfrage in das Verkehrsnetz mittels der Anbindungsknoten.² Sie gibt die Nachfrage in Form von “Fahrten pro Stunde” von Bezirk i nach j mit Verkehrssystem k in Zeitscheibe t an. Die letzten beiden Indizes werden der Übersichtlichkeit halber in den folgenden Beispielen weggelassen und statt i und j häufig die Buchstaben A und B für die Quell- und Zielanbindung verwendet. Die Nachfrage ist dann durch Q_{AB} gegeben.

Verständnisfrage:

Welche Größenordnung hat b_{Rad}^g ?

Verständnisfrage:

Warum muss man zuerst disaggregieren und dann aggregieren?

Verständnisfrage:

Warum ist die Aggregation verschiedener IV-Modi wie Fuß, Rad und MIV zum System “IV” problematisch bzw. inkonsistent?

Verständnisfrage:

Die Systeme IV und ÖV werden üblicherweise getrennt umgelegt. Was ist daran problematisch?

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

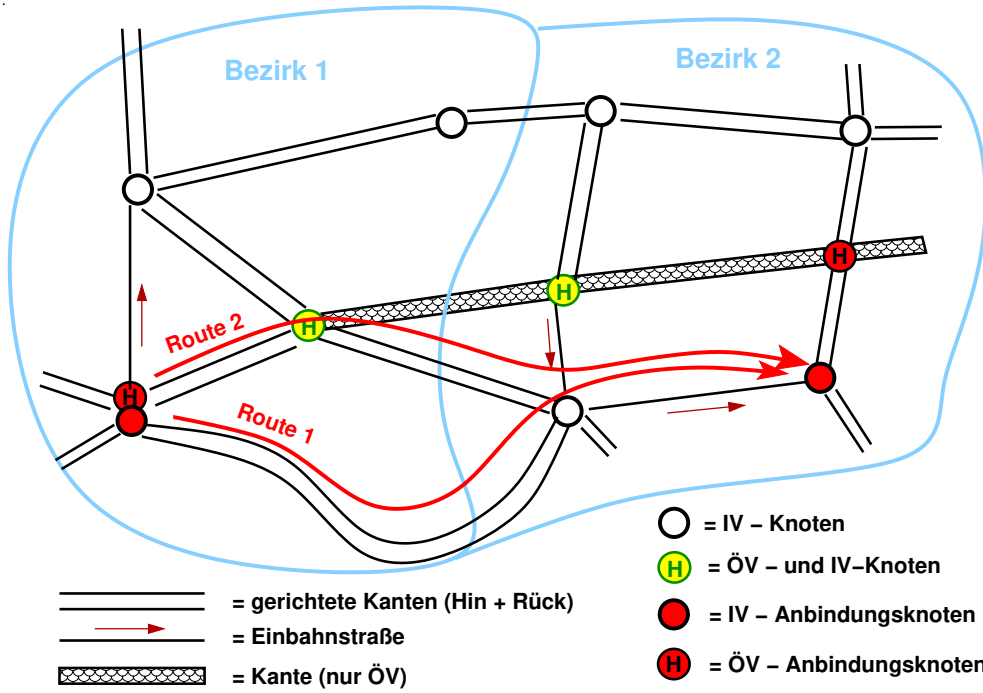


Figure 7.2.: Repräsentation eines Verkehrsnetzes mit Knoten, gerichteten Kanten und Anbindungen. Eingezeichnet sind beispielhaft zwei Routenalternativen für das Nachfrageelement F_{12k} von Bezirk 1 nach Bezirk 2 für den Modus $k = \text{MIV}$.

7.3. Netzmodellierung

Ein Verkehrsnetz wird zum Zwecke der Umlegung als **gerichteter Graph** modelliert und enthält folgende Elemente (siehe Abbildung 7.2):

Netzknoten repräsentieren Kreuzungen für die IV-Verkehrssysteme bzw. Haltestellen für den ÖV. Strecken, welche die Grenzen des Untersuchungsgebiets verlassen (z.B. Ausfallstraßen), werden ebenfalls durch einen Knoten abgeschlossen. Zum Knoten gehören ferner **Abbiegebeziehungen**, welche die Menge an erlaubten Zufahrts-Abfahrtskombinationen zu bzw. vom jeweiligen Knoten angeben, ggf. differenziert nach Verkehrsmodus. Damit kann man z.B. Wendeverbote, Linksabbiegeverbote etc. modellieren.

Streckenelemente bzw. **Kanten** repräsentieren die Verbindung zwischen zwei benachbarten Knoten, also je nach Verkehrsart Straßen, Gehwege, oder die ÖV-Infrastruktur zwischen zwei benachbarten Haltestellen. Um die Qualität der Strecken zu charakterisieren, dienen **Attribute** (Eigenschaften) der Kanten wie

- Kantenlänge L ,
- Mittlere Geschwindigkeit V_0 bzw. Zeit T_0 zum Durchfahren im leeren Netz,
- Kapazität K ,
- Zugelassene Verkehrsmodi, z.B. nur Fuß in Fußgängerzonen, nur MIV auf Autobahnen, nur ÖV auf Schienenstrecken oder alle (Fuß, Rad, MIV und ÖV) auf vielen Stadtstrecken.

Da die Hin- und die Rückrichtung im Allgemeinen unterschiedliche Attribute aufweisen können (Einbahnstraßen, unterschiedliche Kapazitäten etc.) werden die Strecken als **gerichtete Kanten** modelliert, d.h. jede Richtung wird durch eine eigene Kante repräsentiert. Hingegen werden mehrere Fahrstreifen einer Richtung nicht separat modelliert, sondern durch eine entsprechende Änderung der Streckenkapazität erfasst.

Anbindungen sind spezielle Knoten, in der die Verkehrsnachfrage ins Netz angebunden wird. In der Regel wird pro Bezirk und Verkehrssystem nur *eine* Anbindung vorgesehen und dafür ein möglichst zentraler Knoten gewählt. Die Knoten der über das Untersuchungsgebiet hinausgehenden Strecken dienen als Anbindungen des jeweiligen **Kordonbezirks** und modellieren die Anbindung an den externen Verkehr.

7.3.1. Kürzeste-Weg-Suche

Alle Umlegungsverfahren basieren auf einer Bewertung der verschiedenen Routenalternativen. Insbesondere ist man an der bezüglich einer Nutzenfunktion besten Alternative, dem sog. **“Bestweg”** (*shortest path*) interessiert, und zwar von jeder Anbindung i zu jeder Anbindung j . Zunächst werden alle Kanten in willkürlicher Reihenfolge (Index l) nummeriert³ und die Problemstellung wie folgt formuliert:

²Wählt man mehrere Anbindungen pro Verkehrssystem und Bezirk, muss man $F_{ijk}(t)$ noch auf die Anbindungen aufteilen und erhält die sog. “Füllknotenmatrix”. Bei nur je einer Anbindung (wie empfohlen) ist diese mit der Fahrtenmatrix identisch.

³Dies macht die in den Belegarbeiten verwendete Software PTV-Visum automatisch.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

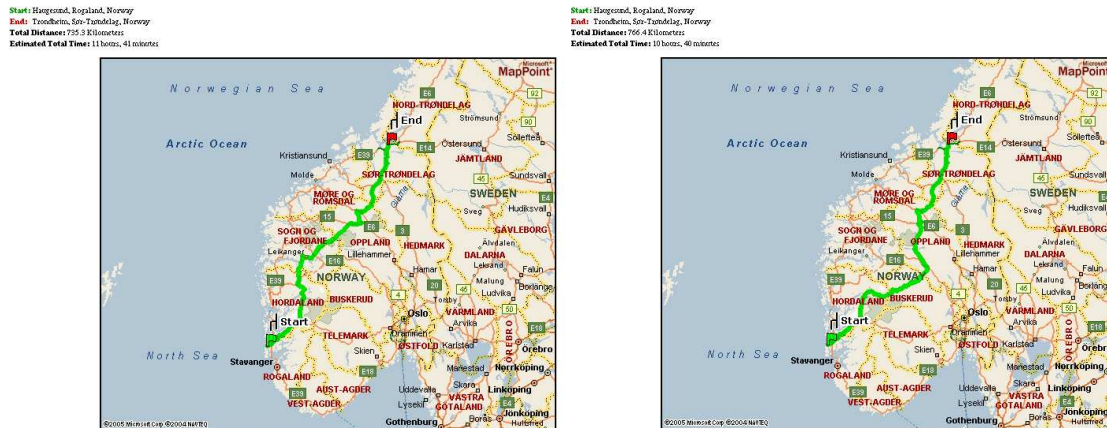


Figure 7.3.: Beispiel zum Finden des kürzesten Wegs bezüglich der Streckenlänge (links) bzw. Zeit (rechts). Screenshot aus <http://mappoint.msn.com/DirectionsFind.aspx>

Bestwegsuche: Finde eine Folge von Kanten $\{l_1, l_2, \dots, l_N\}$, wobei Kante l_1 vom Knoten i startet und Kante l_N an Knoten j endet, so dass die Nutzenfunktion $U_{ij} = \sum_{l=1}^N U(l_i)$ maximal ist.

Die Nutzenfunktion einer Kante wird dabei aus ihren Attributen sowie der aktuellen Verkehrsbelastung dieser Kante berechnet. Insbesondere kann man nach den *zeitoptimalen Weg* suchen ($U_{ij} = -T_{ij}$, vgl. Abschnitt 7.4) oder nach den *streckenmäßig kürzesten Weg* ($U_{ij} = -L_{ij}$). Solche Suchverfahren sind Basisbestandteil vieler *Route-Finder*, vgl. Abb. 7.3. Insbesondere sieht man in dieser Abbildung, dass die optimale Route vom gewählten Optimierungskriterium bzw. der Nutzenfunktion abhängt.

Während bei den *Route-Findern* meist der kürzeste Weg von nur einer oder weniger Start-Ziel-Kombination(en) berechnet werden muss, ist in der Umlegung ein ganzer Satz von kürzesten Wegen von jeder Anbindung i zu jeder Anbindung j nötig. Für den ersteren Fall ist der **Dijkstra-Algorithmus** am gebräuchlichsten, während zur simultanen Kürzester-Weg-Suche der **Floyd-Warshall-Algorithmus** am effizientesten ist. Erstaunlicherweise wächst der Rechenaufwand nur mit der dritten Potenz der Knotenanzahl an. Für Interessierte findet sich im Internet Näheres zum [Dijkstra-Algorithmus](#) und zum [Floyd-Warshall-Algorithmus](#).

7.4. Capacity-Restraint Funktionen

Im Folgenden gehen wir nicht auf die Details der Stautentstehung mit Mikro- oder Makro-modellen und auf die einhergehenden dynamischen Änderungen der Nutzenfunktionen der Streckenelemente (also im Wesentlichen die Zeit zum Durchfahren) während der Fahrt ein. Dies ist Inhalt der dynamischen Umlegung, welche einen aktuellen Forschungs-

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

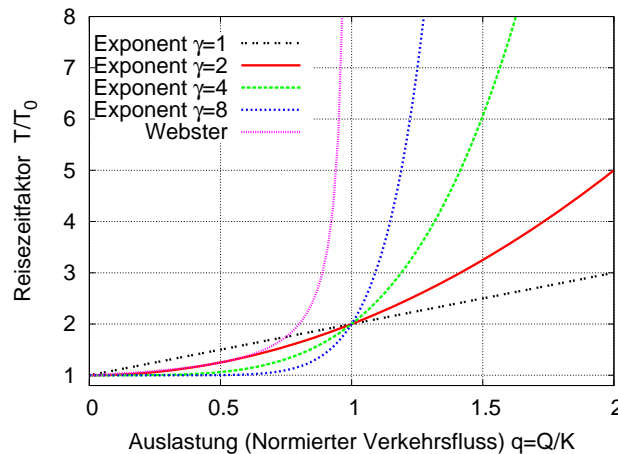


Figure 7.4.: Graphen der BPR-CR-Funktion Gl. (7.6) mit verschiedenen Exponenten γ . Das relative Verkehrsaufkommen $q = Q/K$ ist durch die auf die Kapazität K bezogene Verkehrsbelastung Q definiert, wobei K so definiert ist, dass das Aufkommen $q = 1$ zu einer Verdoppelung der Reisezeit gegenüber der Zeit T_0 im leeren Netz führt. Zum Vergleich ist auch die Webster-Formel (7.5) für $K = 4/T_0$ dargestellt.

gegenstand darstellt.

Vielmehr betrachten wir die *mittlere Reisezeitverlängerung* eines Streckenelements (Kante l , Kapazität K_l) infolge erhöhter Nachfrage Q_l auf dieser Strecke und bilden diese Nachfrageabhängigkeit durch eine **Kapazitätsbeschränkungsfunktion** bzw. **Capacity-Restraint-Funktion** (oft auch als **CR-Funktion** bezeichnet) folgender allgemeiner Form ab:

$$T_l = T_l(q_l), \quad q_l = Q_l/K_l. \quad (7.4)$$

Hierbei ist die auf die Kapazität der jeweiligen Kante bezogene Verkehrsbelastung. Für die CR-Funktion gibt es im Wesentlichen ein theoretisches Modell, welches auf die **Webster-Formel** führt, sowie einen durch sog. **BPR-Funktionen** dargestellten heuristischen Ansatz.

7.4.1. Webster-Formel

Hierbei wird, gemäß dem Prinzip “Die Kette ist nicht stärker als ihr schwächstes Glied”, die Kapazität als Durchlassfähigkeit der schwächste Stelle der jeweiligen Kante (z.B. Lichtsignalkreuzung, Engstelle) betrachtet und das System im Sinne der **Warteschlangentheorie** modelliert, mit der man z.B. auch Warteschlangen an Supermarkt-Kassen oder vor Grenzen oder Mautstationen gut modellieren kann:

- Neuankommende Fahrzeuge kommen zufällig gemäß einer **Poisson-Verteilung** mit der mittleren Ankunftsrate Q an die Engstelle.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

- Die Zahl der pro Zeiteinheit “abgefertigten” (durch die Engstelle fahrenden) Fahrzeuge ist ebenfalls poissonverteilt mit der “Abfertigungsrate” K .
- Kommen mehr Fahrzeuge an als abgefertigt werden, bildet sich eine “Warteschlange”.

Im Kapitel 7.10 für mathematisch Interessierte wird gezeigt, dass die mittlere Länge $E(m)$ der Warteschlange durch $E(m) = q/(1 - q)$ gegeben ist. Damit ist die mittlere Zeit zum Durchfahren der Kante l durch die Zeit T_{l0} ohne Warten, zuzüglich der mittleren Wartezeit $E(m)/K_l$, durch die **Webster-Formel** gegeben:

$$T_l^{\text{Webster}} = T_{l0} + \frac{q_l}{K_l(1 - q_l)}. \quad (7.5)$$

7.4.2. BPR-Funktionen

Dieser heuristische⁴ Ansatz wurde vom amerikanischen *Bureau of Public Roads* (BPR) vorgeschlagen und wird heute in den meisten Implementierungen von Verkehrsplanungs-Software standardmäßig eingesetzt:

$$T_l(Q) = T_{l0} \left[1 + \left(\frac{Q}{K_l} \right)^\gamma \right] = T_{l0}(1 + q^\gamma). \quad (7.6)$$

- Die Zeit T_{l0} zum Durchfahren der Kante l im leeren Netz kann z.B. aus den Kanten-Attributen Geschwindigkeit V_{l0} und Länge L_l mittels der bekannten Beziehung $T_{l0} = L_l/V_{l0}$ gewonnen werden.
- Der Exponent γ wird üblicherweise im Wertebereich zwischen $\gamma = 2$ und $\gamma = 5$ angenommen. Aufschlussreich ist aber auch die lineare CR-Funktion mit $\gamma = 1$ (vgl. Abb. 7.4), bei der sich qualitativ nichts ändert, welche aber eine analytische Berechnung der Umlegung ermöglicht wie in diesem Kapitel noch gezeigt wird.
- Häufig wird vor q_l^γ ein zusätzlicher Vorfaktor angenommen. Dieser kann aber durch Umdefinition der Kapazität immer $=1$ gesetzt werden.

Man kann die CR-Funktion (7.6) auch als Einbruch der mittleren Geschwindigkeit V_l aufgrund erhöhter Verkehrsnachfrage formulieren:

$$V_l(q) = \frac{V_{l0}}{1 + q^\gamma}. \quad (7.7)$$

Zu beachten ist, dass diese CR-Funktion auch für Netzbelastungen $Q > K_l$ definiert ist und endliche Werte liefert, obwohl dies nach der Warteschlangentheorie (Formel (7.5), siehe auch Abschnitt 7.10) im (stochastischen) Gleichgewicht nicht sein kann. Daran sieht man, dass diese Funktion keine stationären Verhältnisse beschreiben kann. Vielmehr bildet sie heuristisch die über alle dynamischen Situationen gemittelte Reisezeitverlängerung nach. Diese Eigenschaft erlaubt auch eine robuste numerische Implementierung der Umlegung in einer Verkehrsplanungs-Software.

⁴Heuristisch: Aus der Erfahrung gewonnen; nicht herleitbar.

7.5. Wardrop'sches Nutzergleichgewicht

Das Ziel der Umlegung ist die Zuordnung der Verkehrsströme auf gewisse Routen im Verkehrsnetz. *John G. Wardrop* hatte 1952 zur Beschreibung der Routenwahl ein einfaches (Verhaltens-)Prinzip postuliert. Das **Wardrop'sche Prinzip** beschreibt das **Nutzergleichgewicht** bei der Wahl der **Routenalternativen** r für jedes Element $F_{ijk}(t) \equiv F_m$ der Fahrtenmatrix (mit der Abkürzung $m = \{i, j, k, t\}$):

$$T_r^{(m)} = \begin{cases} T_{\min}^{(m)} & \text{falls } F_{m,r} = F_m w_r > 0, \\ > T_{\min}^{(m)} & \text{falls } F_{m,r} = w_r = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Hier bezeichnen

- T_r die Reisezeit (allgemein: die negative Utility) der Routenalternative r ,
- T_{\min} die Mindestreisezeit,
- w_r den Anteil des Fahrtenmatrixelements, welcher auf die Route r umgelegt wurde.

In Worten und mathematisch präzisiert lautet diese wichtige Aussage:

Erstes Wardrop'sches Prinzip: Unter schwachen Bedingungen (monoton steigende CR-Funktionen) gibt es ein eindeutiges und stabiles **Nutzergleichgewicht** (*user equilibrium*, UE), in welchem die Reisezeiten aller befahrenen Routen gleich und minimal sind.

Das Prinzip beruht auf der Annahme, dass jeder Verkehrsteilnehmer versucht, seine individuelle Reisezeit zu minimieren (oder allgemeiner, seinen Nutzen zu maximieren), also *egoistisch* agiert. Der sich ergebende Gleichgewichtszustand, in dem kein Verkehrsteilnehmer seinen Aufwand weiter verringern kann, wird als **Wardrop- bzw. Nutzergleichgewicht** (*user equilibrium*) bezeichnet.⁵

Die Frage ist, ob das Wardrop'sche Nutzergleichgewicht auch in der Praxis – zumindest in guter Näherung – erreicht wird. Die Annahme der individuellen Nutzenoptimierung ist sehr plausibel. Fragwürdig erscheint aber die Annahme einer vollständigen Information und einer objektiven Definition des Nutzens für alle Verkehrsteilnehmer (vgl. dazu den Abschnitt 7.9 über das stochastische Nutzergleichgewicht).

7.5.1. Beispiel zur Berechnung des Wardrop-Gleichgewichts

Die Berechnung kann nur in einfachsten Fällen (lineare oder höchstens quadratische CR-Funktionen, einfaches Streckennetz mit wenigen Routenalternativen sowie wenigen Elementen der Fahrtenmatrix) analytisch durchgeführt werden. Folgende Vorgehensweise bietet sich an:

⁵Das Wardrop-Gleichgewicht ist ein Spezialfall des in der Spieltheorie bekannten **Nash-Gleichgewichts** für den Fall, das es so viele Spiele-Teilnehmer (sprich: Verkehrsteilnehmer) gibt, dass ein Einzelner vernachlässigbaren Einfluss auf die anderen hat. Nur dann ist eine Beschreibung mit reellwertigen Nachfrageelementen $F_{m,r}$ möglich.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

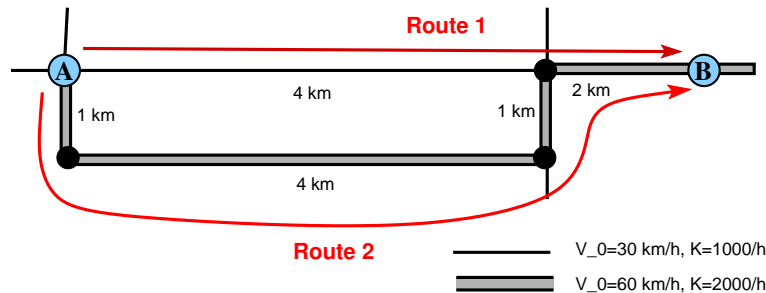


Figure 7.5.: Verkehrsnetz zum Beispiel der Berechnung des Wardrop-Gleichgewichts bei zwei Routenalternativen.

- Auswahl der bzw. Suche nach sinnvollen Routenalternativen.
- Zunächst wird Teil 1 der Wardrop-Bedingungen vorausgesetzt, also gleiche Reisezeiten auf allen Alternativen. Damit werden die Routenanteile w_r unter Berücksichtigung von $\sum_r w_r = 1$ berechnet.
- Kommen dabei negative Anteile $w_{r'}$ vor, gilt für die jeweiligen Routen r' die zweite (Ungleichungs-) Bedingung, also $T_{r'} > T_r$ und $w_{r'} = 0$.
- Die Rechnung wird nun ohne die Alternativen r' wiederholt, bis alle Routenanteile positiv (erste Bedingung) oder gleich Null (zweite Bedingung) sind.

Im folgenden konkreten Streckennetz für den IV werden zwei Routenalternativen für nur ein Nachfrageelement Q_{AB} von der Anbindung des Bezirks A nach der des Bezirks B betrachtet. Außerdem werden lineare CR-Funktionen der Art (7.6) mit $\gamma = 1$ angenommen (vgl. Skizze 7.5).

Reisezeiten der Alternativen:

Hierbei ist es wichtig, die Indices l der Kanten von denen für die Routen r zu unterscheiden. Insbesondere stellt im Allgemeinen ein und dieselbe Kante ein Streckensegment für mehreren Alternativen r dar (in der Abbildung 7.5 ist dies das letzte Teilstück).

Es seien nun K_1 und K_2 die Kapazitäten der "kleinen" und "großen" Streckenelemente in der Skizze und V_{01} bzw. V_{02} die entsprechenden Maximalgeschwindigkeiten. Die Reisezeit auf Route 1 ergibt sich dann in Abhängigkeit der Verkehrsbelastungen Q_1 und Q_2 auf *beiden* Routenalternativen zu

$$T_1 = \frac{4\text{km}}{V_{01}} \left(1 + \frac{Q_1}{K_1} \right) + \frac{2\text{km}}{V_{02}} \left(1 + \frac{Q_1 + Q_2}{K_2} \right)$$

Beziehen wir nun *alle* Streckenbelastungen auf die "kleinen" Kapazitäten $K_1 = 1000$ Fz/h, also $q_r = Q_r/K_1$, und geben alle Reisezeiten in Minuten an, ergibt dies mit

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

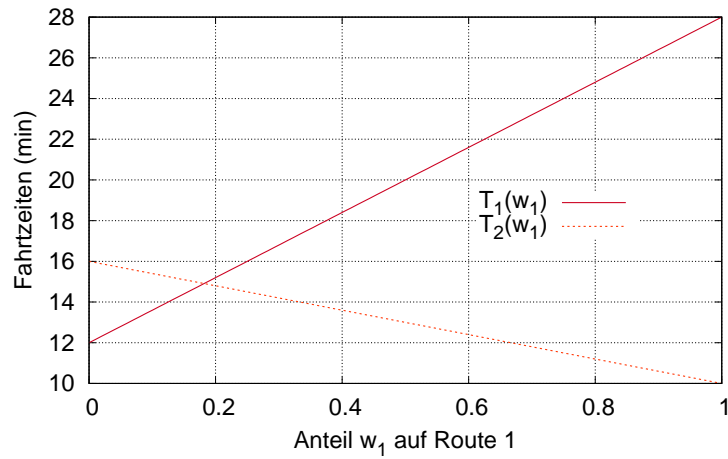


Figure 7.6.: Reisezeiten für die beiden Routenalternativen des Beispielsnetzes in Abb. 7.5 in Abhängigkeit des Anteils w_1 auf Route 1 für ein Fahrtenmatrizelement $Q_{AB} = 2\,000$ Fz/h bzw. $q = 2$.

$K_1 = \frac{1}{2}K_2$ die Reisezeit

$$T_1 = 8(1 + q_1) + 2 \left(1 + \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \right).$$

Als letzten Schritt werden die skalierten Nachfragen auf den Routen 1 und 2 durch das Nachfrageelement Q_{AB} und die Routenanteile w_1 und $w_2 = 1 - w_1$ ausgedrückt:

$$q_1 = \frac{Q_1}{K_1} = \frac{Q_{AB}}{K_1} w_1 = qw_1, \quad q_2 = q(1 - w_1) \quad \text{mit} \quad q = \frac{Q_{AB}}{K_1}. \quad (7.9)$$

Damit ergibt sich das Ergebnis

$$T_1(q, w_1) = 10 + 8qw_1 + q, \quad (7.10)$$

und analog

$$T_2(q, w_1) = 8 - 3qw_1 + 4q. \quad (7.11)$$

Routenanteile, falls Gleichheit der Reisezeiten zutrifft:

Setzt man

$$T_1(q, w_1) = T_2(q, w_1)$$

und löst für feste Nachfrage q nach w_1 auf, erhält man direkt

$$w_1(q) = \frac{3q - 2}{11q}.$$

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

Abbildung 7.6 zeigt die für $Q_{AB} = 2\,000$ Fz/h bzw. $q = 2$ gültige grafische Lösung $w_1(2) = \frac{2}{11}$ als Schnittpunkt der "Angebotskurven" von Route 1 (steigt mit w_1) und Route 2 (fällt mit w_1). Diese Abbildung zeigt anschaulich die direkte Äquivalenz des Wardrop-Gleichgewichts mit der klassischen, für den **Homo oeconomicus**⁶ gültigen Angebots-Nachfrage-Relation.

Test auf negative Routenanteile:

Für $q < 2/3$, also $Q_{AB} < 667$ Fz/h, wird $w_1(q)$ negativ. Da dies nicht sein kann, ist die Gleichheitsbedingung des Wardrop'schen Prinzips nicht mehr erfüllt und wird durch die Ungleichheitsbedingung ersetzt. Es gilt also für diesen Fall $w_1 = 0$ und $T_1 > T_2$. Zusammenfassend erhält man im Wardrop'schen Gleichgewicht (Superskript UE für *user equilibrium*) die Routenanteile (vgl. Abb. 7.7)

$$w_1^{\text{UE}}(q) = \begin{cases} \frac{3q-2}{11q} & \text{falls } q \geq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und} \quad w_2^{\text{UE}}(q) = 1 - w_1^{\text{UE}}(q),$$

sowie die Reisezeiten

$$T_1(q) = \begin{cases} \frac{94+35q}{11} & q \geq \frac{2}{3} \\ 10 + q & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$T_2(q) = \begin{cases} T_1(q) & q \geq \frac{2}{3} \\ 8 + 4q & \text{sonst.} \end{cases}$$

und damit im Nutzergleichgewicht

$$T^{\text{UE}}(q) = \begin{cases} \frac{94+35q}{11} & q \geq \frac{2}{3} \\ 8 + 4q & \text{sonst.} \end{cases}$$

7.6. Globales oder System-Optimum

Die Annahme des Wardrop-Gleichgewichts ist realistisch (da die egoistische Annahme "Jeder ist sich selbst der nächste" sehr plausibel ist), führt es in der Regel zu bezüglich des Gesamtsystems suboptimalen Ergebnissen. "Suboptimal" heißt dabei, dass eine i.A. vom Gleichgewicht *abweichende* Routenumlegung $\{w_r^{\text{sys}}\}$ existiert, bei der der **Gesamt-nutzen** aller Verkehrsteilnehmer maximal bzw., bei Modellierung der Nutzenfunktion durch die negative Reisezeit, die Gesamtreisezeit minimal ist. Dies wird durch das Zweite Wardrop'sche Prinzip beschrieben:

⁶Als *Homo oeconomicus* bezeichnet man Personen, welche rational gemäß identischen Nutzenfunktionen handeln, und denen die vollständige Information augenblicklich und ohne Fehlerquellen zur Verfügung steht.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

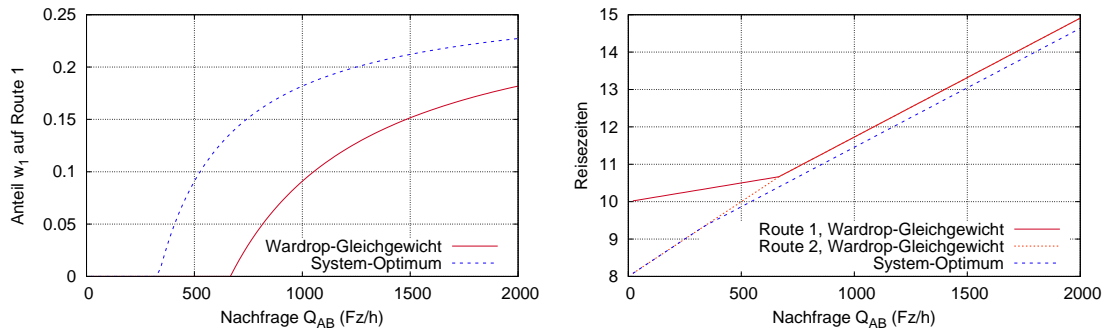


Figure 7.7.: Routenanteile (links) und Reisezeiten (rechts) für das Beispielsnetz aus Abb. 7.5 im Wardrop-Gleichgewicht und im Systemoptimum in Abhängigkeit der skalierten Nachfrage $q = \frac{Q_{AB}}{K_1}$ mit $K_1 = 1\,000$ Fz/h.

Zweites Wardrop'sches Prinzip: Unter schwachen Bedingungen (monoton steigende CR-Funktionen) gibt es einen eindeutigen systemoptimalen Zustand, welcher den Gesamtnutzen aller Verkehrsteilnehmer maximiert. Dieses **Systemoptimum** (*system optimum*, SO) entspricht i.A. nicht dem UE und ist dann insbesondere auch kein Gleichgewichtszustand.

Bei konstanter Nachfrage ist dann auch die mit der Routenbelegung w_r gewichtete mittlere Reisezeit $T_{\text{sys}} = \sum_r w_r T_r$ minimal. Im Folgenden wird das Systemoptimum für nur einem Nachfrageelement von Knoten A nach B (nur dieses Element der Fahrtenmatrix F_{ijk} ist ungleich Null) und R Routenalternativen definieren (eine allgemeinere Definition für die komplette Fahrtenmatrix folgt in Abschnitt 7.6.2):

Systemoptimum: Maximiere den Nutzen

$$U_{\text{sys}}(\mathbf{w}) = \max! \quad \text{bzw.} \quad T_{\text{sys}}(\mathbf{w}) = \sum_{r=1}^R w_r T_r(F_{AB}\mathbf{w}) = \min! \quad (7.12)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{r=1}^R w_r = 1, \quad \text{sowie} \quad 0 \leq w_r \leq 1 \quad \text{für alle } r. \quad (7.13)$$

Die Reisezeit $T_r(\mathbf{F}) = T_r(F_{AB}\mathbf{w})$ auf Route r hängt dabei sowohl von der Nachfrage F_{AB} ab als auch von der durch $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_R)$ charakterisierten Aufteilung der Nachfrage auf die Routen.

Das Dilemma am Systemoptimum ist, dass es nicht für alle *individuellen* Verkehrsteilnehmer vorteilhaft ist. Vielmehr zeigt die folgende Beispielsaufgabe, dass es einige geben

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

muss, welche sich “aufopfern” und weniger attraktive Routen wählen.⁷ Insbesondere kann in einer konkreten Verkehrs-Situation im Nutzergleichgewicht kein Verkehrsteilnehmer das System näher ans Optimum führen, ohne selbst unmittelbar Nachteile zu bekommen. Insofern ähnelt die Situation dem berühmten *Gefangenendilemma* der Spieltheorie, welches z.B. bei [Wikipedia](#) näher beschrieben wird.⁸ Dies wird in einer besonders drastischen Situation, der des **Braess’schen Paradoxons** (siehe Abschnitt 7.7) deutlich.

Bei entsprechender Absprache (z.B. der Art “heute wähle ich die ungünstigere Route, dafür morgen Du”) hätte das System-Optimum auch für jeden einzelnen *im Mittel* Vorteile, nur sind die in der jeweiligen Situation korrekten Absprache-Regeln für solch ein alternierendes Verhalten meist weder bekannt noch kommunizierbar. Durch externen politischen Einfluss (Maut, Treibstoffpreise, Steuern, Subventionen etc.) kann man jedoch die Nutzenfunktion verändern und so das Nutzergleichgewichts in Richtung des Systemoptimums verschieben. Die Kenntnis des Systemoptimums kann daher dennoch von praktischer Relevanz sein.

7.6.1. Beispiel zur Berechnung des System-Optimums

Wir betrachten wieder das Netz der Abb. 7.5. Mit den Reisezeiten (7.10) und (7.11) auf den beiden Routen ergibt sich die in den Routenanteilen quadratische Beziehung

$$\begin{aligned}\bar{T} &= w_1 T_1 + w_2 T_2 \\ &= w_1(10 + 8qw_1 + q) + (1 - w_1)(8 - 3qw_1 + 4q) \\ &= 11qw_1^2 + (2 - 6q)w_1 + 8 + 4q.\end{aligned}$$

Eine Minimierung bezüglich des Routenanteils w_1 ergibt

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial w_1} = 22qw_1 + 2 - 6q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad w_1(q) = \frac{3q - 1}{11q}.$$

Auch hier gilt natürlich wieder die Restriktion $0 \leq w_1 \leq 1$, so dass mit dieser Nebenbedingung die Lösung des Minimierungsproblems, also das Systemoptimum (Superskript SO für *system optimum*) gegeben ist durch (vgl. Abb. 7.7)

$$w_1^{\text{SO}} = \begin{cases} \frac{3q-1}{11q} & q \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.14)$$

Im Systemoptimum müssen für alle Verkehrsnachfragen $q > \frac{1}{3}$, also $Q_{AB} > 333$ Fz/h, mehr Verkehrsteilnehmer die Route 1, also die kleineren Straßen, wählen als es dem Gleichgewicht entspricht. Damit ist für $q > \frac{1}{3}$ insbesondere $T_1^{\text{SO}}(q) > T_2^{\text{SO}}(q)$, also die Routenaufteilung *nicht* im Gleichgewicht (weder im stabilen noch im instabilen).

⁷Deshalb ist das System-Optimum, entgegen anderslautenden Aussagen in manchen Quellen, auch *kein* Gleichgewicht, weder ein stabiles noch ein instabiles.

⁸Spieltheoretisch gehört die Routenwahlsituation dennoch zu einer anderen Grundklasse von Spielen, nämlich dem (iterierten) *Route-Choice Game*.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

Beispielsweise ergibt sich für 2 000 Fz/h ($q = 2$) die systemoptimale Umlegung $w_1^{\text{SO}} = \frac{5}{22}$, während $w_1^{\text{UE}} = \frac{4}{22}$ beträgt. Abbildung 7.6 zeigt, dass für diese Umlegung in der Tat die Routenalternative $r = 1$ die “schlechtere” ist, die Fahrer auf dieser Route also “selbstlos” zum Systemoptimum beitragen. Das Ergebnis dieser Aufgabe lässt sich verallgemeinern: In den meisten Netzen gilt, dass im Systemoptimum mehr Verkehrsteilnehmer Routenalternativen mit “kleinen” Straßen (Straßen geringer Kapazität) benutzen als im Wardrop-Gleichgewicht.

7.6.2. Allgemeine Formulierung des Nutzer- und Systemgleichgewichts



In diesem Unterabschnitt werden Nutzergleichgewicht und Systemoptimum für eine allgemeine, also nicht nur aus einem Quell- und Zielknoten bestehende Nachfragesituation formuliert. Beide Situationen kann man auf zweierlei Arten definieren, wie *Beckmann et. al.* für das Nutzergleichgewicht erstmals gezeigt hat:

- Lokal nach der Art des Wardrop’schen Prinzips, also durch paarweisen Vergleich von Routenalternativen,
- oder global als **Extremalprinzip**, wie bisher beim Systemoptimum geschehen.

Die Formulierung als Extremalwertproblem hat den Vorteil, dass man Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unter ziemlich allgemeinen Bedingungen beweisen kann (**Kuhn-Tucker-Theorem**). Außerdem beruht das gängigste numerische Lösungsverfahren, der **Frank-Wolfe-Algorithmus**, auf dieser Formulierung.

Die Äquivalenz einer lokalen und globalen Formulierung nach Beckmann kann man umgekehrt dazu nutzen, die ursprünglich global formulierten Bedingungen für das *Systemoptimum* lokal zu formulieren. Dies ermöglicht im Prinzip, durch lokal berechenbare und wirkende Lenkungsmaßnahmen (verkehrsabhängige Steuern) die Nutzenfunktionen auf jeder Kante so zu verändern, dass das Systemoptimum (bezüglich der eigentlichen Nutzenfunktionen) für den Fahrer identisch wird zum Nutzergleichgewicht bezüglich der veränderten Nutzenfunktionen!

Schließlich erlauben die vollkommen symmetrischen Bedingungen für Nutzer- und Systemgleichgewicht die numerische Lösung des Systemoptimums, wann immer man das Nutzergleichgewicht berechnen kann und umgekehrt.

Bezeichnungen

Da die Verkehrssysteme i.A. separat umgelegt werden und die statischen Umlegungen für verschiedene Zeitscheiben t unabhängig sind, werden im Folgenden bei der die Nachfrage charakterisierenden Fahrtenmatrix F_{ijkt} die Indices k und t weggelassen. Ziel der Umlegung ist die Aufteilung der Fahrtenmatrixelemente auf verschiedene Routen r , also

$$F_{ij} \xrightarrow{\text{Umlegung}} F_{ijr} = F_{ij} w_r$$

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

und damit die Verkehrsbelastungen Q_l aller Kanten l des Netzes:

$$Q_l = \sum_{ij} \sum_{r=1}^{n_{ij}} \delta_{l,ijr} F_{ijr} \quad (7.15)$$

wobei

$$\delta_{l,ijr} = \begin{cases} 1 & \text{Link } l \text{ in } (r, i, j) \\ 0 & \text{Link } l \text{ nicht in } (r, i, j). \end{cases} \quad (7.16)$$

Hierin bezeichnet (r, i, j) die r -te Route von i nach j und n_{ij} ist die Zahl der sinnvollen Routen von i nach j . Außerdem erhält man für jede Route von i nach j die Reisezeit:

$$T_{ijr} = \sum_{l \in (r, i, j)} T_l(Q_l), \quad (7.17)$$

wobei die Zeiten $T_l(Q)$ zum Passieren eines Links gemäß einer CR-Funktion, z.B. der BPR CR-Funktion (7.6) mit der Verkehrsbelastung Q dieses Links steigen. Schließlich werden, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die Reisezeiten den negativen Nutzenfunktionen des Routenwahlkalüls gleichgesetzt.

Nutzergleichgewicht lokal

Das erste Wardrop'sche Prinzip kann man in folgender kompakter mathematischer Form schreiben:

$$(T_{ijr} - T_{ij}^{\text{UE}}) F_{ijr} = 0 \quad (7.18)$$

(T_{ij}^{UE} ist die Zeit auf der schnellsten Route) unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{r=1}^{n_{ij}} F_{ijr} = F_{ij} \quad (7.19)$$

und den Beziehungen (7.17) und (7.15), welche die Zeit T_{ijr} für die Route (r, i, j) mit allen Verkehrsnachfragen $\{F_{ijr}\}$ des Netzes verknüpfen. Die Kopplung kommt dadurch zustande, dass ein und dieselbe Kante l des Netzwerks nach (7.16) i.A. von mehreren Routen benutzt wird.

Gleichung (7.18) fasst die beiden Bedingungen (7.8) zu einer Gleichung zusammen: Entweder sind die Reisezeiten gleich, $T_{ijr} = T_{ij}^{\text{UE}}$ oder die Route (r, i, j) ist nicht befahren, $F_{ijr} = 0$.⁹

Nutzergleichgewicht als Extremalprinzip

Man kann das erste Wardrop'sche Prinzip aber auch global als Minimierung einer einzigen, das ganze System beschreibenden Funktion U^* formulieren:

$$U^*(\mathbf{Q}) = - \sum_{l \in \text{Netz}} Q_l T_l^*(Q_l) = \max! \quad (7.20)$$

⁹Dass die gleichen Reisezeiten den *minimalen* entsprechen, folgt aus allgemeinen Konvexitätseigenschaften, die hier nicht näher betrachtet werden.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

unter den Nebenbedingungen (7.19), wobei die Streckenbelastungen Q_l und die Routenachfragen F_{ijr} wieder durch (7.15) verknüpft sind. Die modifizierte Reisezeit auf einer Kante l (modifizierte CR-Funktion) ist dabei gegeben durch

$$T_l^*(Q) = \frac{1}{Q} \int_0^Q dQ' T_l(Q'). \quad (7.21)$$

Systemoptimum als Extremalprinzip

Beim Systemoptimum folgt das Extremalprinzip unmittelbar aus der Definition, es werden daher die ursprünglichen CR-Funktionen verwendet:

$$U(\mathbf{Q}) = - \sum_{l \in \text{Netz}} Q_l T_l(Q_l) = \max! \quad (7.22)$$

mit denselben Verknüpfungen und Nebenbedingungen wie bei (7.20).

Systemoptimum lokal

Durch Modifikation der CR-Funktionen kann man nicht nur das Nutzergleichgewicht als Extremalprinzip, sondern auch das Systemoptimum lokal durch paarweisen Vergleich, also in Analogie zur ursprünglichen Formulierung des Nutzergleichgewichts, formulieren. Die modifizierten Wardrop-Bedingungen lauten

$$\left(\tilde{T}_{ijr} - \tilde{T}_{ij}^{\text{UE}} \right) F_{ijr} = 0 \quad (7.23)$$

mit den selben Nebenbedingungen und Verknüpfungen wie bei (7.18). Die Routen-Reisezeiten T_{ijr} werden aber mit modifizierte Kanten-Reisezeiten \tilde{T}_l (modifizierte CR-Funktion) berechnet:

$$\tilde{T}_{ijr} = \sum_{l \in (r,i,j)} \tilde{T}_l(Q_l), \quad \tilde{T}_l(Q) = \frac{d}{dQ} (QT_l(Q)) = \left(1 + Q \frac{d}{dQ} \right) T_l(Q). \quad (7.24)$$

Bemerkungen

- Der Operator¹⁰ $\left(1 + Q \frac{d}{dQ} \right)$, welcher die CR-Funktion $T(Q)$ in die modifizierte Funktion $\tilde{T}(Q)$ überführt, ist das Inverse des Operators $\frac{1}{Q} \int_0^Q dQ'$, welcher $T(Q)$ auf $T^*(Q)$ abbildet:

$$\left(1 + Q \frac{d}{dQ} \right) \frac{1}{Q} \int_0^Q dQ' T(Q') = T(Q).$$

¹⁰Ein Operator bildet eine Funktion auf eine andere ab. Beispielsweise ist die Differenziation oder die Integralfunktionsbildung ein Operator, welcher eine Funktion auf ihre Ableitung bzw. Integralfunktion abbildet.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

Table 7.1.: Übersicht der Bedingungen für Nutzergleichgewicht (UE) und Systemoptimum (SO) in lokaler und Globaler Darstellung. Der Operator $1 + Q \frac{d}{dQ}$, angewandt auf die CR-Funktionen $T_l(Q)$ der Links, führt von der linken zur rechten Spalte bzw. von der unteren zur oberen Zeile. Der Inverse Operator $\frac{1}{Q} \int_0^Q dQ'$ führt von rechts nach links bzw. von oben nach unten.

Lokale Formulierung	$(T_{ijr} - T_{ij}^{\text{UE}}) F_{ijr} = 0$	$(\tilde{T}_{ijr} - \tilde{T}_{ij}^{\text{UE}}) F_{ijr} = 0$
Globale Formulierung	$\sum_{l \in \text{Netz}} Q_l T_l^*(Q_l) = \min!$	$\sum_{l \in \text{Netz}} Q_l T_l(Q_l) = \min!$

- Sowohl beim Nutzergleichgewicht wie auch beim Systemoptimum kommt man von der Extremalwert-Formulierung zur lokalen Formulierung, wenn man die jeweils gültigen CR-Funktionen mit dem Operator $(1 + Q \frac{d}{dQ})$ behandelt (Tabelle 7.1). Mit dem inversen Operator $\frac{1}{Q} \int_0^Q dQ'$ kommt man von der lokalen Formulierung zur Extremalwert-Formulierung.
- Sowohl bei der lokalen wie auch bei der Extremalwert-Formulierung kommt man mit dem Operator $(1 + Q \frac{d}{dQ})$ vom Nutzergleichgewicht zum Systemoptimum und mit dem inversen Operator vom Systemoptimum zum Nutzergleichgewicht. Bezeichnet man mit dem Superkript SO^* das Systemoptimum bezüglich der transformierten CR-Funktionen $T_l^*(Q)$ und mit \widetilde{UE} das Nutzergleichgewicht bezüglich der transformierten CR-Funktionen $\tilde{T}_l(Q)$, so gilt für die Routenaufteilung $\{w_r\}$ beliebiger Nachfragematrizen

$$w_r^{\text{UE}} = w_r^{\text{SO}^*}, \quad w_r^{\text{SO}} = w_r^{\widetilde{UE}} \quad (7.25)$$

- Besonders interessant ist die lokale Formulierung des Systemoptimums: Sie besagt, dass eine verkehrs- und routenabhängige Maut, welche das Geldäquivalent der Zeitdifferenz $\tilde{T}_{ijr} - T_{ijr}$ beträgt, das Nutzergleichgewicht zum Systemoptimum bringt. Wird die Maut anschließend wieder an die Verkehrsteilnehmer ausbezahlt, ist das Systemoptimum effektiv identisch zum Nutzergleichgewicht, vgl. Abschnitt 7.6.3.
- Modelliert man die CR-Funktion gemäß (7.6), so gilt

$$\frac{T_l(Q)}{T_{l0}} = 1 + \left(\frac{Q}{K_l}\right)^\gamma, \quad \frac{\tilde{T}_l(Q)}{T_{l0}} = 1 + (1 + \gamma) \left(\frac{Q}{K_l}\right)^\gamma. \quad (7.26)$$

Die Zeitdifferenz $\tilde{T}_{ijr} - T_{ijr}$ ist also genau das γ -fache der Zeitdifferenz zwischen belasteten und leeren Strecken!

7.6.3. Verkehrsabhängige Maut zur Realisierung beliebiger Optima

Man kann zeigen, dass die Zeitdifferenz $\tilde{T}_{ijr} - T_{ijr}$ den zusätzlichen Zeitkosten entspricht, die man (insgesamt) den anderen Verkehrsteilnehmern auferlegt, wenn man selbst die

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

Route (i, j, r) fährt (siehe Übungsaufgaben). Aus Sicht des Entscheidungskalküls bei der Routenwahl sind dies externe Kosten. Internalisiert man die Kosten durch die oben definierte Maut auf der Ebene der Verkehrsteilnehmer, zieht also von der Maut die sich im SO ergebende *mittlere* Maut ab,¹¹ ergibt sich jedoch insgesamt sogar ein Nutzen, also *de facto* negative externe Kosten.

Dieses Prinzip kann man verallgemeinern, um beliebige Systemoptima (SO) (z.B. eine Routenaufteilung, die die globalen Emissionen minimiert) zu “dezentralisieren”, also auf ein Nutzergleichgewicht (UE) abzubilden. Dazu ist es nötig, dass die neue Zielfunktion $Z(\mathbf{Q})$ ebenso wie die bisherige globale Reisezeit $T(\mathbf{Q})$

- link-additiv ist, also $Z(\mathbf{Q}) = \sum_{l \in \text{Netz}} Q_l Z_l(Q_l)$,
- die individuellen Link-Anteile $Z_l(Q)$ streng monoton steigend sind, $Z'_l(Q) > 0$,
- und sie auch konvex sind, $Z''_l(Q) > 0$.

Nimmt man nun Geldäquivalente β_T (Euro pro Minute) und β_Z (Euro pro Erhöhung von Z) an und führt für jede mögliche Route r jeder beliebigen OD-Relation ij die verkehrsabhängige Maut

$$M_{ij,r}(\mathbf{Q}) = \sum_{l \in (r,i,j)} M_l(Q_l), \quad M_l(Q) = \beta_Z \left(1 + Q \frac{d}{dQ} \right) Z_l(Q) - \beta_T T_l(Q) \quad (7.27)$$

ein, wird das *Systemoptimum* bezüglich Z in ein *Nutzergleichgewicht* bezüglich der effektiven Link-Reisezeiten

$$T_l^{\text{eff}}(Q) = T_l(Q) + \frac{M_l(Q)}{\beta_T}$$

abgebildet (“dezentralisiert”). Die dadurch entstehende Aufteilung der Flüsse \mathbf{Q}^{SO} und die Bedingung der Kostenneutralität in der Summe (Superskript 0) definieren die konkrete routenabhängige Maut aller Relationen $i \rightarrow j$ bei gegebener Nachfrage-Fahrtenmatrix $\mathbf{F} = \{F_{ij}\}$:

$$M_{ij,r}^0(\mathbf{F}) = M_{ij,r}(\mathbf{Q}^{\text{SO}}) - \sum_{r'} w_{r'}^{\text{SO}} M_{ij,r'}(\mathbf{Q}^{\text{SO}}) \quad (7.28)$$

Hierbei ist “SO” das Systemoptimum bezüglich der Größe Z bei gegebener Nachfragematrix \mathbf{F} und $w_{r'}^{\text{SO}} = Q_{r'}^{\text{SO}} / F_{ij}$ der Anteil der Nachfrage F_{ij} auf Route r' in diesem SO.

Bemerkungen:

- Für $Z(\mathbf{Q}) = T(\mathbf{Q})$ liefert (7.28) gerade die monetarisierten Grenz-Zeitkosten $\beta_T(\tilde{T}_{ij,r} - T_{ij,r})$ im SO

¹¹z.B. durch Verrechnung mit der Fahrzeugsteuer

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

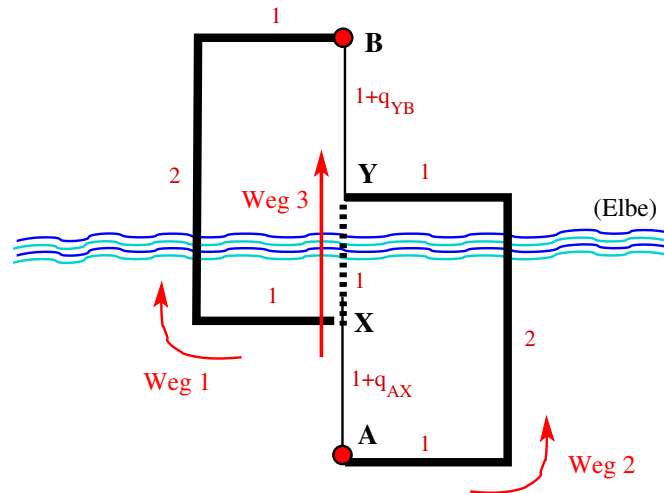


Figure 7.8.: Verkehrsnetzwerk zur Demonstration des Braess'schen Paradoxons. Die kleinen rote Zahlen neben jeder Kante geben jeweils die Reisezeit in Minuten in Abhängigkeit der auf die Kapazität K der "kleinen" Straßen bezogenen Flüsse $q = Q_{AB}/K$ auf der jeweiligen Straße an. Die dick gezeichneten Strecken und die geplante Brücke (gestrichelt) haben eine so hohe Kapazität, dass die Fahrtzeit nicht von der Nachfrage abhängt.

- Für $Z(Q)$ gleich den CO_2 -Emissionen entspricht die Maut (7.28) einem impliziten "Handel" mit "Emissionszertifikaten" auf Individualbasis. Allerdings fällt die unübersichtliche Anfangsallokation der klassischen CO_2 -Zertifikate weg und die "Gewichtung der Umwelt" erfolgt kontrollierbar und transparent mit β_Z ("Euro pro kg CO_2 ").

7.7. Das Braess'sche Paradoxon

Student: "Herr Professor, mein ganzes Wissen habe ich Ihnen zu verdanken". Professor: "Oh, bitte, erwähnen Sie doch solche Kleinigkeiten nicht"

Anonymus

Besonders drastisch wird der Unterschied zwischen Nutzergleichgewicht und Systemoptimum bei Netzen, bei denen zusätzliche Straßen *ceteris paribus*¹² zu einer geringeren effektiven Streckenkapazität führen können. Dieses unerwartete Ergebnis: "*Mehr ist manchmal weniger*" ist unter dem Namen **Braess'sches Paradoxon** nach seinem Autor, dem deutschen Professor Dietrich Braess, bekannt.¹³ Es tritt vor allem auf, wenn

¹²Lat. für "alles übrige bleibt gleich", also hier unveränderte Verkehrsnachfrage und unveränderte Attribute der übrigen Kanten.

¹³Dietrich Braess: "Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung" in: Unternehmensforschung 12, 258–268 (1968). Siehe auch den [entsprechenden Wikipedia-Beitrag](#).

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

die neue Strecke eine große Kapazität, die Anbindungen an die neue Strecke hingegen eine relativ geringe Kapazität aufweisen.

Zur Demonstration dient das in Abb. 7.8 abgebildete Netzwerk. Bisher gab es in diesem Netzwerk zwei Möglichkeiten, um von A nach B zu kommen: Route 1 über X und Route 2 über Y. Einige Stadtplaner schlagen vor, die Staus durch das hohe Verkehrsaufkommen F_{AB} (Element der Fahrtenmatrix mit den Anbindungspunkten A und B) durch den Bau einer neuen Brücke von X nach Y (gestrichelt gezeichnet) zu reduzieren.

Die breit gezeichneten Straßen (einschließlich der geplanten neuen Brücke) sind gut ausgebaut und es bilden sich unabhängig vom Verkehrsaufkommen keine Staus, die Fahrzeiten auf diesen Straßen sind also konstant. Auf den schmal gezeichneten Straßen hingegen bilden sich bei hoher Verkehrsbelastung Staus, was durch eine lineare CR-Funktion gemäß (7.6) modelliert wird. Die Fahrzeit T_l auf der jeweiligen Kante l ist also in Abhängigkeit ihrer Verkehrsbelastung Q_l gegeben durch

$$T_l(Q_l) = T_{l0} \left(1 + \frac{Q_l}{K_l} \right) = T_{l0}(1 + q_l), \quad (7.29)$$

wobei die skalierte Streckenbelastung $q_l = Q_l/K$ auf die Kapazitäten K der "kleinen" Straßen bezogen ist.

Der Übersichtlichkeit halber gibt es in dieser Aufgabe keine weiteren Elemente der Fahrtenmatrix und außerdem keine weiteren Routenalternativen: Insbesondere sei die Alternative A-Y-X-B durch entsprechende Abbiegeverbote oder Einbahnstraßenregelungen nicht zulässig.

7.7.1. Reisezeiten im Braess-Netzwerk

Die Reisezeiten $T_r(q, w_1, w_2, w_3)$ für die drei Routenalternativen in Abhängigkeit der skalierten Nachfrage $q = Q_{AB}/K$ werden analog zur Aufgabe für zwei Routenalternativen (Abschnitt 7.5.1) berechnet: Gibt man T_r in Minuten an, erhält man

$$\begin{aligned} T_1 &= 5 + (w_1 + w_3)q, \\ T_2 &= 5 + (w_2 + w_3)q, \\ T_3 &= 3 + (w_1 + w_3 + w_2 + w_3)q = 3 + (1 + w_3)q. \end{aligned}$$

Stellt man diese Reisezeiten unter Berücksichtigung der Summenbedingungen $\sum_r w_r = 1$ grafisch dar, erhält man *vor* Brückenöffnung ($w_3 = 0$, Abb. 7.9 links) die schon bekannte "Angebots-Nachfrage-Beziehung", d.h. die Zeiten T_1 bzw. T_2 steigen bzw. fallen mit der Erhöhung des Anteils w_1 . Der Schnittpunkt der beiden Kurven charakterisiert die Wardrop-Bedingung $w_1 = w_2 = 0.5$.

Stellt man nun *nach* der Brückenöffnung die Reisezeiten $T_1 = T_2$ auf den alten Strecken sowie die Reisezeit T_3 auf der neuen Route in Abhängigkeit von w_3 und dem lokalen Gleichgewicht $w_1 = w_2$ bezüglich der konkurrierenden alten Routen dar (Abb. 7.9 rechts), erlebt man eine Überraschung: Mit steigendem Anteil w_3 steigt nicht nur, wie erwartet, T_3 an, sondern *ebenfalls* T_1 und T_2 ! Damit erkennt man direkt den "Teufelskreis" des Braess-Paradoxons:

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

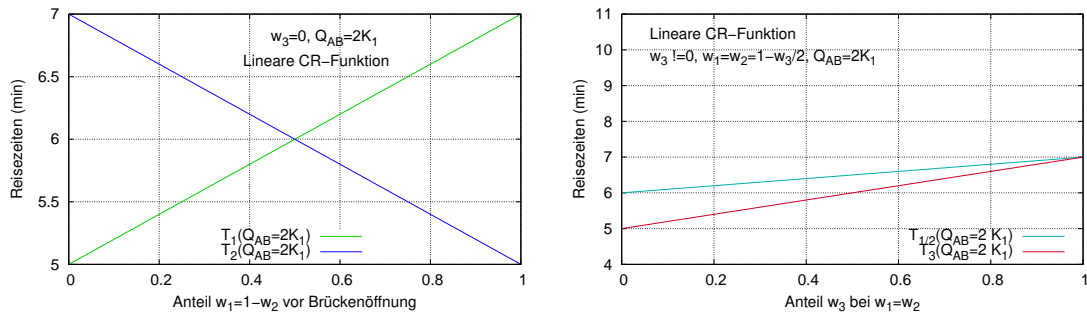


Figure 7.9.: Links: Reisezeiten auf den Routen 1 und 2 in Abhängigkeit des Routenanteils w_1 vor Brückenöffnung ($w_3 = 0$). Rechts: Reisezeiten auf den beiden Routen 1 und 2 im lokalen Gleichgewicht ($w_1 = w_2$, $T_1 = T_2$) sowie auf Route 3 nach Brückenöffnung in Abhängigkeit des Anteils w_3 auf der neuen Route. Die gesamte skalierte Nachfrage beträgt jeweils $q = Q_{AB}/K = 2$.

- Ist, für eine gegebene Nachfrage q (in der Abbildung 7.9 z.B. $q = 2$), der Routenanteil w_3 kleiner als im durch den Schnittpunkt gegebenen Wardrop-Gleichgewicht (in der Abbildung bei $w_3 = 1$), ist die Reisezeit auf *allen* (!) Routen kleiner als die Gleichgewichts-Zeit.
- Auf Route 3 ist die Zeit aber *noch* kürzer als auf den Routen 1 oder 2, so dass es Vorteile bringt, Route 3 zu benutzen. Beispielsweise gilt direkt nach der Öffnung (w_3 ist noch gleich Null) $T_3 = 5$ min, während man auf den “alten” Strecken $T_1 = T_2 = 6$ min benötigt.
- Steigt demzufolge der Anteil w_3 , verschlechtert sich die Situation auf *allen* Routen, also auch auf den alten Routen, welche im Normalfall von der Verschiebung profitieren würden. Da die Wechsler selbst jedoch einen momentanen Vorteil haben, werden immer mehr Verkehrsteilnehmer auf die neue Route wechseln, bis das Wardrop-Gleichgewicht erreicht ist und die Situation für alle schlechter ist (in der Abb. 7.9 beträgt sie 7 min statt 6 min).

7.7.2. Wardrop-Gleichgewicht im Braess-Netzwerk

In den Übungsaufgaben zum Braess-Paradoxon wird folgendes Wardrop-Gleichgewicht als Funktion der skalierten Nachfrage $q = Q_{AB}/K$ hergeleitet (Abb. 7.10): Die Routenanteile

$$w_3^{\text{UE}}(q) = \begin{cases} 1 & q < 2, \\ \frac{4}{q} - 1 & 2 \leq q \leq 4, \\ 0 & q > 4, \end{cases} \quad w_1^{\text{UE}}(q) = w_2^{\text{UE}}(q) = \frac{1 - w_3^{\text{UE}}(q)}{2}, \quad (7.30)$$

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

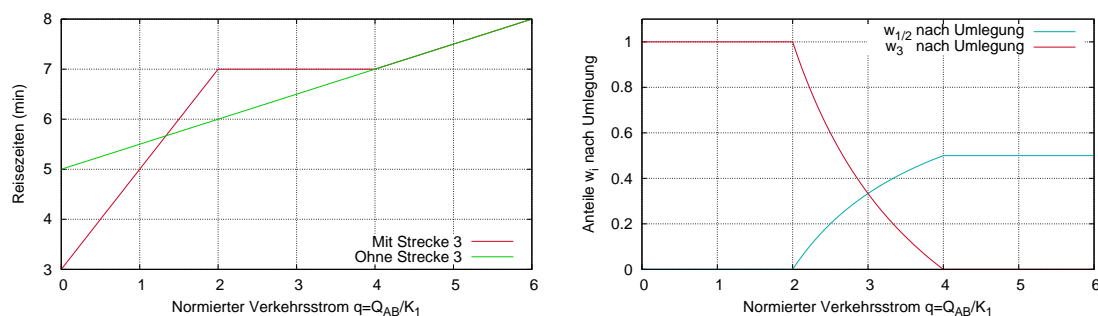


Figure 7.10.: Reisezeiten (links) und Routenanteile (rechts) des Braess-Verkehrsnetzes der Abb. 7.8 im Wardrop'schen Nutzergleichgewicht. Gezeichnet ist auch der Fall vor Eröffnung der das Braess'sche Paradoxon hervorrufenden Route 3.

und die dazugehörigen Reisezeiten auf allen befahrenen Strecken,

$$T^{\text{UE}}(q) = \begin{cases} 3 + 2q & q < 2, \\ 7 & 2 \leq q \leq 4, \\ 5 + \frac{q}{2} & q > 4. \end{cases} \quad (7.31)$$

Diskussion:

- Nur für den Flussbereich $2 \leq q \leq 4$ ist die Wardrop-Bedingung als Gleichung erfüllt, d.h. die Reisezeiten $T_r(q) = T(q)$ auf allen Routen r sind dieselben und alle Anteile w_r sind i.A. ungleich Null.
- Für $q < 2$ wird nur die neue Strecke benutzt und es gilt $T_3(q) = T(q)$ sowie $T_1(q) = T_2(q) > T(q)$, während für sehr große Nachfragen, $q > 4$, die neue Strecke auch im Gleichgewicht überhaupt nicht angenommen wird, da sie dann eine längere Reisezeit aufweist, $T_3(q) > T(q)$.
- Für $q < \frac{4}{3}$ bringt die neue Brücke Vorteile, da dann die Reisezeit $T_3(q) = 3 + 2q$ kürzer ist als die Zeit $T_{\text{davor}}(q) = 5 + \frac{q}{2}$ im Nutzergleichgewicht ohne Strecke 3 (grüne Kurve in Abb. 7.10 links).
- Für mittlere Verkehrsnachfragen, $\frac{4}{3} < q < 4$, tritt das Braess-Paradox auf: Die grüne Kurve in Abb. 7.11 liegt dann unterhalb der das Nutzergleichgewicht charakterisierenden roten Kurve.
- Für Nachfragen $q > 4$ wird die neue Route nicht benutzt, es bleibt also alles beim Alten.

Hier würde sich der Brückenbau also nur für geringe Nachfragen lohnen; für mittlere Nachfragen tritt das Braess-Paradoxon auf und für hohe Nachfragen bleibt alles beim

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

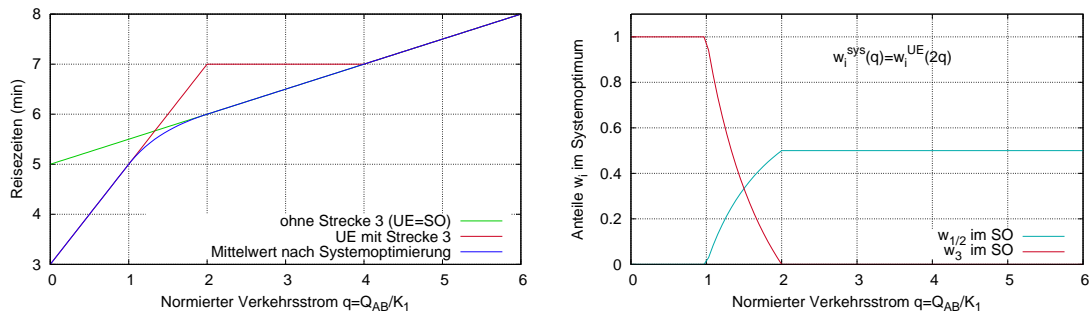


Figure 7.11.: Mittlere Reisezeiten (links, gestrichelt) und Routenanteile (rechts) des Braess-Verkehrsnetzes der Abb. 7.8 im Wardrop'schen Systemoptimum. Gezeichnet ist links auch der Fall vor Eröffnung der das Braess'sche Paradoxon hervorrufenden Route 3 (grün) sowie zum Vergleich die Reisezeit im Nutzergleichgewicht (rot). Im Bereich der Krümmung der mittleren Reisezeit im SO ($\frac{4}{3} < q < 2$) bietet die Brücke im Systemoptimum Vorteile, während im Nutzergleichgewicht das Braess'sche Paradoxon auftritt.

Alten, da die Brücke nicht genutzt wird.¹⁴

7.7.3. Systemoptimum im Braess-Netzwerk

Das Systemoptimum wird wie in Abschnitt 7.6.1 durch Minimierung der mit den Anteilen gewichteten mittleren Reisezeit (7.12) unter den Nebenbedingungen $\sum_r w_r = 1$ und $0 \leq w_r \leq 1$ gefunden. Das Ergebnis (vgl. Übungsaufgaben) ist in Abb. 7.11 dargestellt und lautet

$$T_{\text{SO}}(q) = \begin{cases} 3 + 2q & q < 1, & \text{alle über Route 3} \\ 7 - \frac{2}{q} & 1 \leq q \leq 2, & \text{Benutzung der Routen 1, 2 und 3} \\ 5 + \frac{q}{2} & q > 2, & \text{alle über Routen 1 bzw. 2.} \end{cases} \quad (7.32)$$

Diskussion:

- Im Systemoptimum bringt die neue Strecke für Nachfragen $q < 2$ Vorteile und weist entsprechend Anteile $w_3 > 0$ auf. Sie bringt also insbesondere auch in einem Bereich $\frac{4}{3} < q < 2$ Vorteile, in welchem im Nutzergleichgewicht das Braess-Paradoxon wirksam ist.
- Für $q \geq 2$ wird Route 3 im Systemoptimum nicht befahren und es gelten dieselben Verhältnisse wie im Nutzergleichgewicht vor der Brücke (nur in symmetrischen

¹⁴Man muss aber immer im Hinterkopf behalten, dass in dieser Aufgabe nur *ein einziges* Fahrtenmatrixelement F_{ijk} umgelegt wurde. Für andere Nachfrageelemente dieser Matrix kann sich durchaus eine Nutzung der Brücke ergeben. Außerdem beeinflussen diese natürlich auch das Umlegungsergebnis für das betrachtete Matrixelement.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

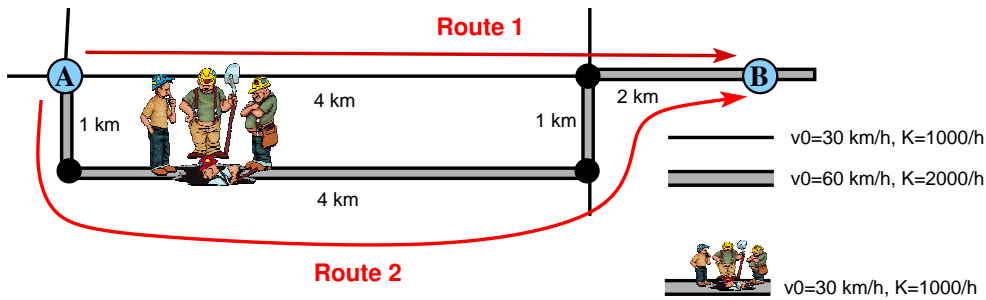


Figure 7.12.: Verkehrsnetz von Abbildung 7.5, aber mit neuer Baustelle auf Route 2.

Ausnahmefällen wie diesem Netzwerk ohne Route 3 ist das Nutzergleichgewicht gleich dem Systemoptimum). Natürlich kann das Braess-Paradoxon im System-Optimum nicht stattfinden.

Abschließend sei bemerkt, dass es Hinweise auf das Auftreten des Braess-Paradoxons in realen Straßennetzwerken gibt, z.B. in Stuttgart und New York.¹⁵ Schließlich wurden empirische Routenwahlexperimente durchgeführt, in denen das Braess-Paradox auftrat¹⁶

7.8. Ein Lernverfahren zur Ermittlung des Wardrop'schen Gleichgewichts



Das Nutzergleichgewicht kann auch mit Hilfe eines Lernverfahrens gefunden werden, bei der sich die Routenbelegungen allmählich an das Wardrop'sche Gleichgewicht anpassen. Dieser Ansatz kann zweierlei Zielen dienen:

1. Modellierung der allmählichen Anpassung der Verkehrsteilnehmer an die neue Situation, also der *Dynamik* der Routenwahl, welche i.A. über einige Tage oder Wochen abläuft.
2. Realisierung einer numerischen Methode zur Ermittlung des Nutzergleichgewichts, welche auch für größere Netze und/oder komplizierterer CR-Funktionen anwendbar ist, bei denen die direkte analytische Lösung nicht möglich ist.

Beim Modellieren des Lernprozesses machen wir folgende Annahmen:

¹⁵W. Blum, "[Ewig lockt die Schnellstraße](#)", Süddeutsche Zeitung, 23.01.2006.

¹⁶Rapoport et. al., "Braess Paradox in the Laboratory ...", online unter <http://ssrn.com/abstract=783424>.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

- Ausgangspunkt ist ein Netzwerk mit R sinnvollen Routenalternativen in einer Nichtgleichgewichtssituation, d.h. es gibt Paare von Routen r und s , welche einerseits benutzt werden ($w_r(t) > 0$ und $w_s(t) > 0$), welche aber unterschiedliche Nutzenfunktionen bzw. Reisezeiten aufweisen, $T_r \neq T_s$.

- Der Verkehrsanteil verschiebt sich allmählich auf die Routen mit aktuell geringerer Reisezeit:

$$\frac{dw_r}{dt} > \frac{dw_s}{dt} \quad \text{falls} \quad T_r < T_s. \quad (7.33)$$

- Der Lernprozess ist “linear”, d.h., die “Zuwanderungsrate” $\frac{dw_r}{dt}$ auf Route r steigt linear mit fallender Fahrtzeit,

$$\frac{dw_r}{dt} = C - \frac{T_r}{T_0\tau}. \quad (7.34)$$

Hier ist τ die mittlere “Lernzeit”, d.h. die Zeit, nach der sich die Ungleichheit der Reisezeiten zweier Routenalternativen im Mittel “herumgesprochen” hat (typischerweise wenige Tage) und T_0 ist eine typische Reisezeit in den selben Einheiten wie T_r (z.B. die schnellste Zeit im leeren Netz; diese Zeit ist notwendig, damit τ die Bedeutung einer “Lernzeit” hat.)

- Erreicht ein Routenanteil r' den Wert $w_{r'} = 0$, fällt diese Route aus der weiteren Betrachtung heraus und ergibt letztendlich eine der Routen, für die die Wardrop-Bedingungen als Ungleichung gelten: $w_{r'} = 0$ und $T_{r'} > T_{UE}$.

Die Konstante C in (7.34) wird durch die Bedingung $\sum_r w_r = 1$ bzw. $\sum_r \frac{dw_r}{dt} = 0$ ermittelt. Das Ergebnis lautet

$$\frac{dw_r}{dt} = \frac{\bar{T} - T_r}{T_0\tau} \quad \text{mit} \quad \bar{T} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R T_r. \quad (7.35)$$

Man beachte, dass \bar{T} – im Gegensatz zur Zeit T_{SO} des Systemoptimums – als *ungewichtetes* arithmetische Mittel der T_r zu verstehen ist.

Die Abbildungen 7.12 und 7.13 zeigen eine Anwendung dieses Verfahrens auf das Rechenbeispiel mit zwei Routenalternativen (vgl. die Übungsaufgaben): Die allmähliche Anpassung der Routenumlegung wird durch eine neue Baustelle hervorgerufen. Gezeigt ist die Änderung der Routenanteile gemäß Gl. (7.35) und die Änderung der Verkehrsnetzqualität für die skalierte Nachfrage $q = Q_{AB}/K_1 = 2$, der Relaxationszeit $\tau = 5$ Tage, der typischen Reisezeitskala $T_0 = 10$ Minuten sowie als Anfangsbedingung das Wardrop-Gleichgewicht *vor* Einrichtung der Baustelle.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

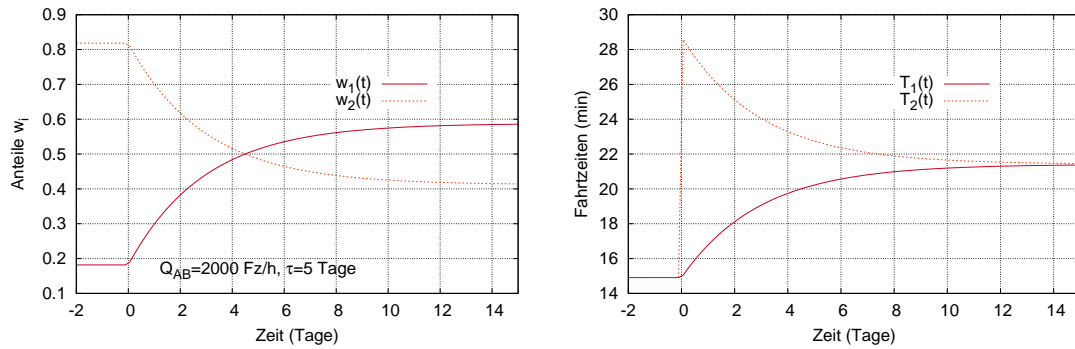


Figure 7.13.: Routenanteile (links) und Reisezeiten (rechts) bei der allmählichen Anpassung an das Wardrop-Gleichgewicht.

7.9. Stochastisches Nutzergleichgewicht



Das **stochastische Nutzergleichgewicht**, abgekürzt **SUE (stochastic user equilibrium)** beruht auf folgenden Annahmen:¹⁷

1. Die Verkehrsteilnehmer kennen den aktuellen Verkehrszustand nicht genau oder haben unterschiedliche Präferenzen bei der Auswahl bzw. Bewertung der R Routenalternativen $r = 1, 2, \dots, R$ von A nach B.
2. Jeder Verkehrsteilnehmer wählt die Route r , für die der **subjektive individuelle Nutzen** U_r maximal ist. Dieser setzt sich aus den über alle Verkehrsteilnehmer **gemittelten Nutzen** \bar{u}_r und einer unabhängigen Zufallsgrößen Z_r mit verschwindendem Erwartungswert, $E(Z_r) = 0$, zusammen:
3. Der gemittelte subjektive Nutzen \bar{u}_r für Route r hängt i.A. von allen Routenanteilen $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_R)$ ab.

Aus den obigen Annahmen ergibt sich die folgende kompakte Formulierung des SUE:

Stochastisches Nutzergleichgewicht: Wähle diejenige Routenalternative, für welche

$$U_r(\mathbf{w}) = \bar{u}_r(\mathbf{w}) + Z_r = \max! \quad (7.36)$$

Die Annahmen des SUE sind vergleichbar mit den Voraussetzungen der für die Aufteilung verwendeten **diskreten stochastischen Wahltheorie**, vgl. Gl.(5.9) auf Seite 100.

¹⁷für detailliertere Informationen siehe z.B. Juan de Dios Ortuzar, Luis G. Willumsen, *Modelling Transport* (3rd Edition, 2001).

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

Der wesentliche Unterschied zur Aufteilung ist die Tatsache, dass aufgrund der CR-Funktionen die Ergebnisse \mathbf{w} der Routenwahl-Entscheidungen einen Einfluss auf die Nutzenfunktionen (Reisezeiten) $U_r(\mathbf{w})$ der Routen haben, also die Grundlage der Wahlentscheidung selbst verändern!¹⁸ Dies führt zu i.A. nur numerisch lösbaren nichtlinearen Bedingungen für das stochastische Nutzergleichgewicht.

7.9.1. Zwei Alternativen

Wir betrachten als Beispiel zwei mögliche Alternativrouten. Wie bisher bilden wir die Nutzenfunktion durch die negative Reisezeit ab ($U_r = -T_r$) und modellieren die mittlere Reisezeit $-\bar{u}_r$ durch CR-Funktionen als Funktionen von w_1 und $w_2 = -w_1$:

$$T_r = -U_r = \bar{T}_r(w_1) - Z_r. \quad (7.37)$$

Für die zwei Alternativen $r = 1$ und 2 erhalten wir aus der Definition (7.36) die Bedingung: "Falls $T_2 - T_1 > 0$, wähle Route 1, ansonsten Route 2". Da es i.A. viele Verkehrsteilnehmer gibt, kann man nach dem Gesetz der Großen Zahl¹⁹ den *Routenanteil* w_1 gleichsetzen mit der Wahrscheinlichkeit, Route 1 zu wählen:

$$\begin{aligned} w_1 &= P(T_1 < T_2) \\ &= P(\bar{T}_1 - Z_1 < \bar{T}_2 - Z_2) \\ &= P(Z_2 - Z_1 < \bar{T}_2 - \bar{T}_1) \end{aligned}$$

Mit der Zufallsgröße Z als Differenz zweier Zufallsgrößen und der entsprechenden Verteilungsfunktion,

$$Z = Z_2 - Z_1, \quad F(z) = P(Z < z) \quad (7.38)$$

sowie der Differenz der mittleren Reisezeiten,

$$\Delta T(w_1) = \bar{T}_2(w_1) - \bar{T}_1(w_1), \quad (7.39)$$

erhält man das allgemeine Ergebnis für das SUE bei zwei Alternativen:

$$w_1 = F(\Delta T(w_1)) \quad \text{SUE für zwei Alternativen.} \quad (7.40)$$

Da die Zufallsanteile Z_r der Reisezeiten nach Voraussetzung unabhängig sind, kann man die Verteilungsfunktion $F(z)$ der Differenz $Z = Z_2 - Z_1$ mit Hilfe des Faltungssatzes (5.16) aus den Verteilungsfunktionen von Z_1 und Z_2 berechnen. Sind insbesondere beide Zufallsanteile gaußverteilt mit Erwartungswerten $E(Z_r) = 0$ und Varianzen σ_r^2 , erhält man für Z eine Gaußverteilung mit $E(Z) = 0$ und Varianz $\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Damit wird Gleichung (7.40) zu

$$w_1 = \Phi \left(\frac{\Delta T(w_1)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (7.41)$$

¹⁸In konkreten Anwendungen werden die Schritte Verteilung, Aufteilung und Umlegung mehrfach durchgeführt, so dass letztendlich auch in der Aufteilung eine Rückkopplung stattfindet.

¹⁹Gesetz der Großen Zahl: Für eine große Zahl unabhängiger Zufallsereignisse nähern sich die relativen Häufigkeiten der möglichen Alternativen den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

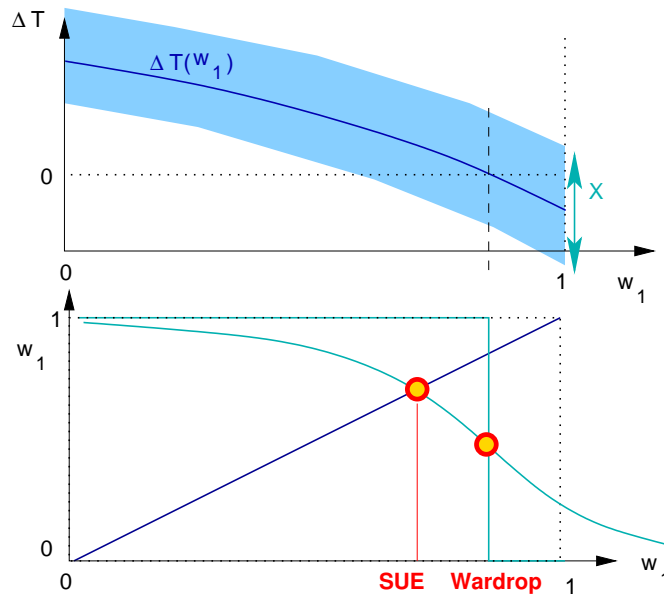


Figure 7.14.: Veranschaulichung der Formel (7.40) für das stochastisches Nutzergleichgewicht bei zwei Alternativen. Näheres siehe Haupttext.

mit der tabellierten Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der *Standardnormalverteilung* (Normalverteilung mit Erwartungswert=0, Varianz=1).

Die Gleichungen (7.40) und (7.41) stellen i.A. transzendente (d.h. nicht analytisch lösbare) Gleichungen dar, da die gesuchte Größe w_1 sowohl auf den linken Seiten, als auch, als Argument einer nichtlinearen Funktion, auf den rechten Seiten dieser Gleichungen vorkommt. Man kann diese Bedingungen aber anschaulich grafisch lösen, wie Abbildung 7.14 zeigt.

Die dunkelblaue Linie von Abb. 7.14 oben zeigt schematisch eine Reisezeit-Nachfrage-Kurve analog zu Abb. 7.6, aber für die Differenz ΔT anstelle der Einzelzeiten. Das Wardrop-Gleichgewicht w_1^{UE} ist wie bisher durch $T_1 = T_2$ bzw. $\Delta T(w_1^{\text{UE}}) = 0$ gegeben. Mit Zufallsanteilen Z wird jedoch aus der dunkelblauen Kurve das hellblaue Band, dessen Verteilungsfunktion $F(z)$ in Abhängigkeit vom Argument $z = \Delta T(w_1)$ durch die hellblaue Kurve in der unteren Grafik dargestellt ist. Insbesondere gilt bei symmetrischen Zufallsgrößen wie Gaußverteilungen an der Stelle des deterministischen Wardrop-Gleichgewichts $F(\Delta T(w_1^{\text{UE}})) = F(0) = \frac{1}{2}$. Da dies nur für $w_1^{\text{UE}} = \frac{1}{2}$ mit der SUE-Formel $F(\Delta T(w_1^{\text{SUE}})) = w_1^{\text{SUE}}$ übereinstimmt, ist der Routenanteil w_1^{SUE} im Allgemeinen vom deterministischen Wardrop-Gleichgewicht verschieden. Im Grenzfall einer Verteilung mit verschwindender Varianz (hellblaue Stufenfunktion in Abb. 7.14 unten) geht das SUE in das deterministische Nutzergleichgewicht über.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

Diskussion

Zu bemerken ist, dass man auch beim stochastischen Nutzergleichgewicht ein *deterministisches* (!) Ergebnis für die Umlegung bekommt: Hintergrund ist die große Zahl der Verkehrsteilnehmer, durch die die einzelnen Schwankungen weggemittelt werden und damit die Wahrscheinlichkeit gleich den relativen Häufigkeiten gesetzt werden kann.

Des Weiteren ist bemerkenswert, dass Zufallsgrößen mit verschwindendem Erwartungswert zu einer deterministischen Verschiebung des Umlegungsergebnisses führen und sogar Routen, welche im deterministischen Fall nicht benutzt werden, im SUE einen endlichen Verkehrsanteil aufweisen können.

Im Falle zweier Alternativen und symmetrischer Zufallsvariablen (dies wird häufig angenommen), kann man dies noch präzisieren: Der Anteil w_1^{SUE} im stochastischen Nutzergleichgewicht ist gegenüber dem deterministischen Gleichgewicht w_1^{UE} in Richtung $\frac{1}{2}$ verschoben:

$$\left| w_1^{\text{SUE}} - \frac{1}{2} \right| \leq \left| w_1^{\text{UE}} - \frac{1}{2} \right|.$$

Dies wird aufgrund der für symmetrische Z gültigen Beziehung $F(\Delta T(w_1^{\text{UE}})) = \frac{1}{2}$ und der SUE-Bedingung $F(\Delta T(w_1^{\text{SUE}})) = w_1^{\text{SUE}}$ anhand Abb. 7.14 unmittelbar klar.

7.9.2. Mehrere Alternativen

Im Multinomial-Logit-Ansatz sind die Bedingungen für den Routenanteil w_r nach der diskreten Wahltheorie gegeben durch die verallgemeinerte Bedingung

$$w_r = \frac{e^{\beta \bar{u}_r(\mathbf{w})}}{\sum_{s=0}^R e^{\beta \bar{u}_s(\mathbf{w})}} = \frac{e^{-\beta T_r(\mathbf{w})}}{\sum_{s=0}^R e^{-\beta T_s(\mathbf{w})}}. \quad (7.42)$$

Bei i.A. sehr vielen Routen r stellt dies ein kompliziertes, nichtlineares Gleichungssystem für den Vektor \mathbf{w} der Routenanteile dar. Es ist jedoch problemlos möglich, die das SUE definierende Bedingung (7.36) direkt mit sog. **Monte-Carlo-Methoden** zu lösen, wie folgender Unterabschnitt zeigt.

7.9.3. Numerisches Mehrweg-Verfahren

In Monte-Carlo-Methoden werden Instanzen von stochastischen Größen wie die in Gl. (7.36) mit Hilfe von generierten (Pseudo-)Zufallszahlen direkt berechnet und die Berechnung so lange wiederholt, bis man mit Hilfe des Gesetzes der großen Zahlen hinreichend genaue Aussagen über die interessierenden Erwartungswerte machen kann. Hier kann man folgendermaßen vorgehen:

1. Ermittlung aller sinnvollen Routenalternativen, entweder intuitiv oder mit Verallgemeinerungen von Bestweg- Verfahren. Jeder Routenalternative r wird anfangs ein im Rahmen der Restriktionen $\sum_r w_r = 1$ und $0 \leq w_r \leq 1$ beliebiger Nachfrageanteil w_r zugeordnet.

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

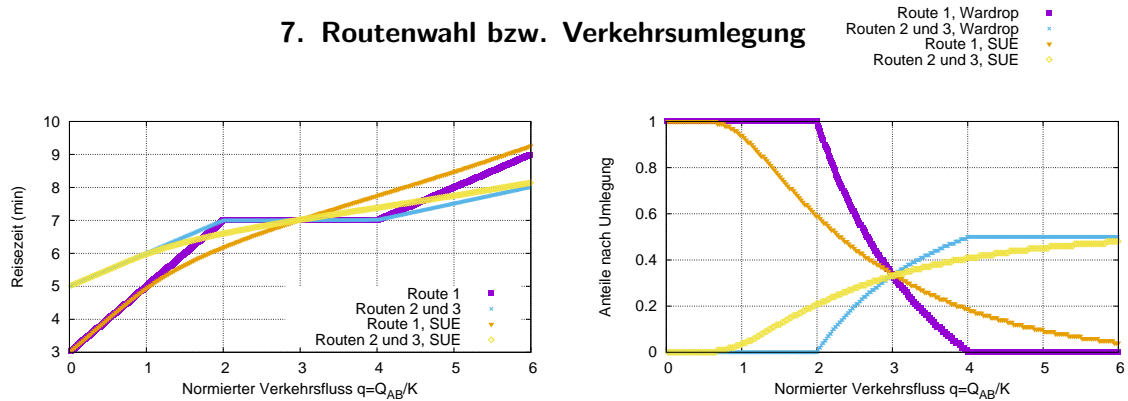


Figure 7.15.: Vergleich des Wardrop'schen Nutzergleichgewichts mit dem stochastischen Nutzergleichgewicht (SUE) für das Beispiel des Braess'schen Paradoxons von Abschnitt 7.7. Für die Routenwahl im SUE wurden für die stochastischen Anteile Z_r Gauß-Verteilungen mit Standardabweichung $\sigma_{z_r} = 0.15T_r$ eingesetzt.

2. "Auswürfeln" eine Routenentscheidung gemäß (7.36): Man berechnet unter Verwendung von Pseudo-Zufallszahlen alle stochastischen Nutzenfunktionen $U_r(\mathbf{w})$ mit $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_R)$ und wählt die Route mit dem jeweiligen Maximum aus.
3. Die neuen Routenanteile \mathbf{w} werden gleich den relativen Häufigkeiten der bisherigen Routen-Favoriten gewählt oder, in einer anderen Variante des Verfahrens, mit einem geeigneten exponentiellen gleitenden Mittel der vergangenen Favoriten berechnet.
4. Die Schritte 2 und 3 werden so lange iteriert, bis sich die Routenanteile \mathbf{w} nicht mehr wesentlich ändern und damit das SUE darstellen.

Die Abbildung 7.15 zeigt die numerischen Ergebnisse für das im Abschnitt 7.7 diskutierte Braess'sche Paradoxon. Die Abbildung zeigt, dass

- im SUE teilweise Strecken gewählt werden, welche im Wardrop-Gleichgewicht ungenutzt bleiben,
- das Braess'sche Paradoxon auch im SUE vorhanden ist, wenn auch in abgeschwächter Form.

7.10. Herleitung der Webster-Formel



In der **Warteschlangentheorie** nimmt man zufällige Ankunftsdaten neuer Fahrzeuge sowie zufällige "Abfertigungszeiten" (Durchfahrtszeiten wartender Fahrzeuge durch die Engstelle) an: In jedem kleinen Zeitintervall Δt ist

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

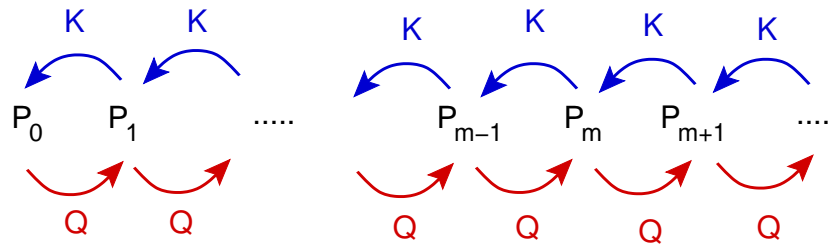


Figure 7.16.: Zur Herleitung der Webster-Formel. Die Ankunftsrate Q gibt die Übergangswahrscheinlichkeit von der Schlängellänge m zur Länge $m + 1$ an, während die Abfertigungsrate (Kapazität) K den Übergang $m \rightarrow m - 1$ bewirkt.

- die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrzeug ankommt, durch $Q\Delta t$ gegeben,
- die Wahrscheinlichkeit, dass ein wartendes Fahrzeug “abgefertigt” wird, also die Engstelle passiert, durch $K\Delta t$ gegeben.

Diese Zufälligkeit repräsentiert die Tatsache, dass Fahrer größere oder kleinere Abstände halten bzw. schneller oder langsamer anfahren. Die dahinterliegende Verteilung (Poissonverteilung für die Zahl der Fahrzeuge bzw. Exponentialverteilung für die Zeitabstände) ist aber gerade bei dichtem Verkehr nicht sehr gut erfüllt.

Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ kann man gemäß Abb. 7.16 die Wahrscheinlichkeiten P_m dafür, dass die Warteschlange genau m Fahrzeuge lang ist, durch eine Differenzialgleichung (“Master-Gleichung”) beschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{dP_m}{dt} &= QP_{m-1} + KP_{m+1} - (Q + K)P_m, \quad \text{falls } m > 0, \\ \frac{dP_0}{dt} &= KP_1 - QP_0. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Im stationären Fall (die Umlegung beschreibt ja im Allgemeinen stationäre Verhältnisse, d.h. z.B die mittleren Verkehrsflüsse, Reisezeiten etc. bleiben gleich!) ändern sich die Wahrscheinlichkeiten nicht, $\frac{dP_m}{dt} = 0$. Damit erhält man aus der Mastergleichung (7.43) unter Verwendung der relativen Nachfrage $q = Q/K$ die Bedingungen

$$P_1 = \frac{Q}{K}P_0 = qP_0, \quad P_2 = (1 + q)P_1 - qP_0 = q^2P_0, \quad \dots \quad P_m = q^m P_0.$$

Aus der Summenbedingung für Wahrscheinlichkeiten, $\sum_m P_m = 1$, erhält man unter Anwendung der geometrischen Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1/(1 - q)$ für die Wahrscheinlichkeit der Schlängellänge 0 (d.h. kein Fahrzeug wartet) den Wert $P_0 = 1 - q$ und damit allgemein

$$P_m = (1 - q)q^m. \tag{7.44}$$

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

Die *mittlere* Schlängellänge (in der Verkehrsplanung dreht sich alles um gemittelte Größen!) ist daher

$$\begin{aligned} E(m) &= \sum_{m=0}^{\infty} mP_m \\ &= (1-q) \sum_{m=0}^{\infty} mq^m \\ &= (1-q)q \frac{d}{dq} \sum_{m=0}^{\infty} q^m \\ &= (1-q)q \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{q}{1-q}}}. \end{aligned}$$

Damit ist die mittlere *Wartezeit* $E(T)_{\text{wait}} = E(m)/K$ und die mittlere Gesamtzeit $T = T_0 + E(T)_{\text{wait}}$ gegeben durch

$$T = T_0 + \frac{q}{K(1-q)}, \quad (7.45)$$

also durch die im Skript angegebene Formel (7.5).

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

7.11. Verwendete Symbole

i, j	Indices für Quellenbindungen (Quellbezirke), bzw. Zielanbindungen (Zielbezirke).
k, t	Indices für Verkehrsmodi bzw. Zeitscheiben (Stundenintervalle).
l	Index für Streckenelemente bzw. Kanten ("Links") des Netzwerks.
r, R	Index für relevante Routenalternativen und deren Gesamtzahl.
L_l, K_l	Streckenlänge und Kapazität (Fahrzeuge/h) der Kante l
V_{0l}, V_l	Geschwindigkeit auf Kante l im leeren Netz bzw. allgemein
T_{0l}, T_l	Durchfahrzeit auf Kante l im leeren Netz bzw. allgemein
U_{ij}, U_l, U_r	Nutzenfunktion (Utility) der Verbindung von Knoten i nach Knoten j bzw. auf Kante l bzw. auf Route r
$T_r = -U_r$	Reisezeit als Hauptkomponente der Utility
$F_{ijk}(t)$	Fahrtenmatrixelement: Mittlere Zahl der Fahrten von i nach j mit Modus k in Zeitscheibe t (Unterschied zur Verkehrsstrommatrix: Letztere gibt Personenwege, nicht Fahrten an.)
F_{AB}	MIV-Nachfrage von A nach B (Fahrtenmatrixelement mit $i = A$, $j = B$, wobei $k = MIV$ und der Zeitscheibenindex weggelassen wurde)
Q_l	Verkehrsbelastung auf der Kante l (z.B. Fahrzeuge/h).
b_k^g	Besetzungsgrad für Verkehrsmittel k in Quelle-Ziel-Gruppe g
$f_{TGL}^g(t)$	Tagesganglinienelement: Anteil der täglichen Verkehrsnachfrage in Quelle-Ziel-Gruppe g an, welche innerhalb der Zeitscheibe t stattfinden.
$q = Q/K$	Auf eine Referenzkapazität bezogene Streckenbelastung.
w_r	Anteil des Fahrtenmatrixelements, welches über Route r umgelegt wird.
$w_r^{UE}, w_r^{SUE}, w_r^{SO}$	Routenanteile im Wardrop'schen bzw. stochastischen Gleichgewicht bzw. im Systemoptimum.
$F(z)$	Verteilungsfunktion der Zufallsgröße Z
$\Phi(z)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.
σ_z^2	Varianz der Zufallsgröße Z .

7. Routenwahl bzw. Verkehrsumlegung

Likert-Skala 1-5 mit Bild einfüegen!

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

Die Erhebung der Daten zum jeweiligen Sachverhalt ist ein wesentlicher Bestandteil der Vorgehensweise in der Ökonometrie. Insbesondere muss die Art der Erhebung und die erhobenen Daten zum vorgesehenen ökonometrischen Modell passen. In diesem Kapitel werden neben der Erhebungsmethodik (Abschnitt 8.2) die für die Verkehrsökonomie wichtigen Datenkategorien kurz vorgestellt: Verkehrsflussdaten (Abschnitt 8.3), Daten zum Mobilitätsverhalten (Abschnitt 8.4) und die direkte Nutzermessung (Abschnitt 8.5). Im nächsten Kapitel 9 werden dann die statistischen Eigenschaften der meist als Stichprobe vorliegenden Daten untersucht. Das Flussdiagramm 8.1 zeigt als Übersicht die Einbindung der Datenerhebung in den allgemeinen Ablauf einer ökonometrischen Untersuchung.

8.1. Ablauf einer Erhebung

Eine Datenerhebung (vgl. Abb. 8.2) beginnt mit der Definition der statistischen Einheiten (Merkmalsträger), der räumlich, zeitlich und sachlich abzugrenzenden Grundgesamtheit und der nicht notwendigerweise identischen Ziehungsgrundlage (Abschnitt 8.2).

Die zu erhebenden Merkmale sind durch die ausgewählten Modelle vorgegeben und müssen sowohl die exogenen als auch die endogenen Variablen dieser Modelle enthalten.

Anschließend wird die Erhebung selbst spezifiziert: Meist wird man als Ziehungsmodalität eine Stichprobe wählen, deren Umfang man in Abhängigkeit der angestrebten Genauigkeit festlegt (Kapitel 9). Die Modalität der Stichprobe (Zufallsstichprobe, geschichtete Stichprobe, Klumpenstichprobe) richtet sich einerseits nach den zur Verfügung stehenden Mitteln (Klumpenstichproben sind bei gleichem Umfang weniger aufwändig zu erheben) und nach der Priorität, welcher auf Repräsentativität und die Vermeidung systematischer Verzerrungen gelegt wird (dann ist die Zufallsstichprobe mit Entzerrung optimal).

Je nach Umfang und Komplexität der Erhebung, der angestrebten Rücklaufquote und der verfügbaren Mittel wählt man die Erhebungsform aus (vgl. Abb. 8.2). Eine Erhebung in Form eines persönlichen Interviews ergibt die höchste Rücklaufquote und die höchste Datenqualität, da Missverständnisse sofort geklärt werden können.

Nach Festlegung aller Erhebungsdetails wird zunächst an wenigen Probanden in einem **Pre-Test** geprüft, ob die Erhebung so funktioniert wie vorgesehen, insbesondere, ob es Schwierigkeiten bei der Fragenbeantwortung gibt und sich die Verweigererquote in den anvisierten Grenzen hält. Nach Optimierung des Erhebungsprotokolls wird dann die eigentliche Erhebung durchgeführt.

Die Auswertung der Erhebung beinhaltet schließlich das Aufstellen der Systemgleichungen anhand des vorgesehenen ökonometrischen Modells. Diese Systemgleichungen

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

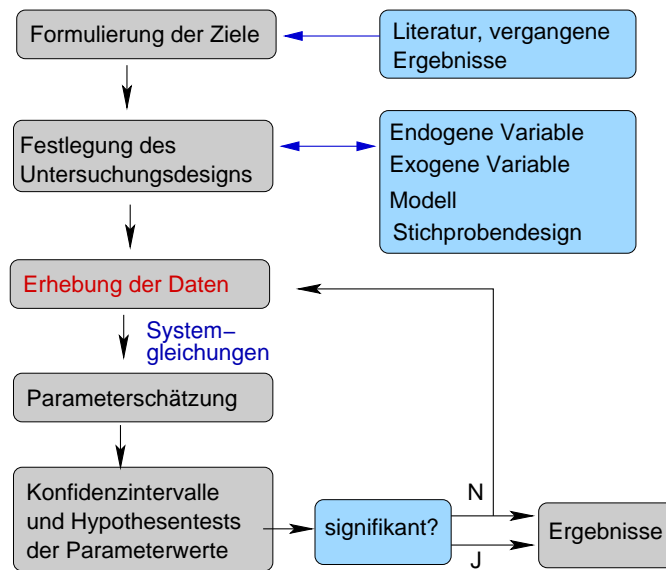


Figure 8.1.: Eingliederung der Datenerhebung in den allgemeinen Ablauf einer ökonomischen Untersuchung.

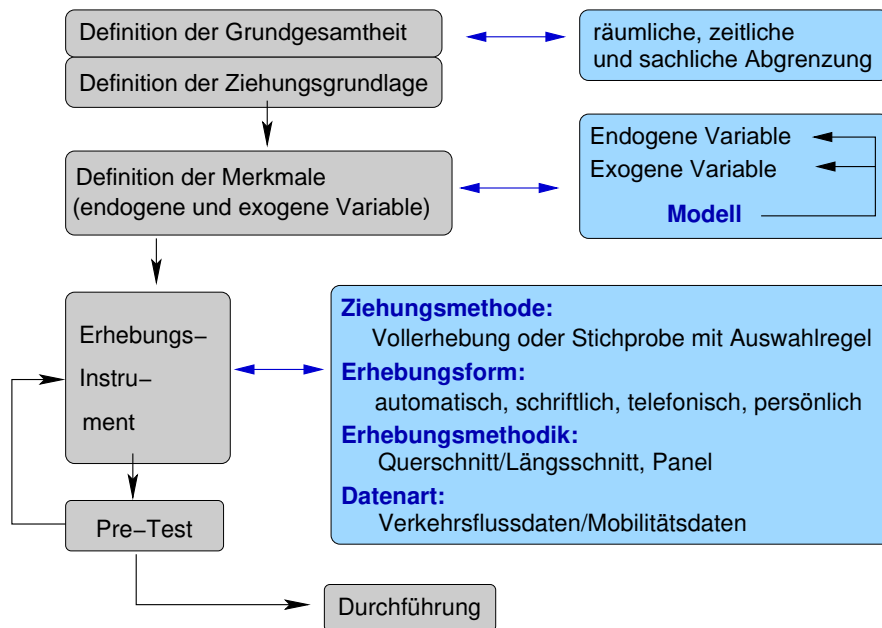


Figure 8.2.: Ablaufdiagramm einer verkehrsökonomischen Datenerhebung.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

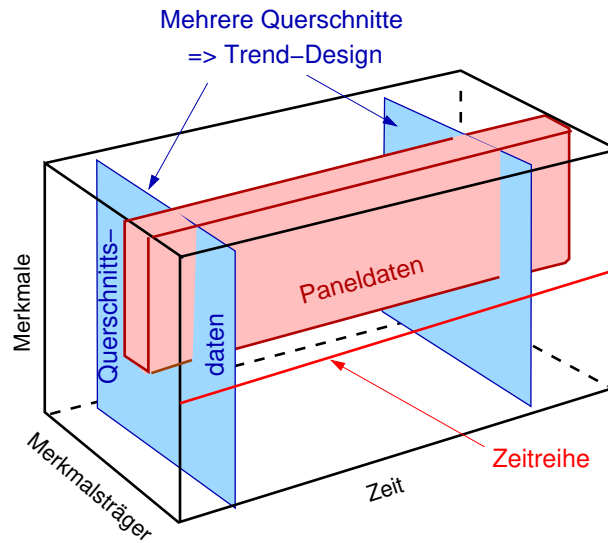


Figure 8.3.: Verschiedene Datenarten bzw. Erhebungsdesigns, aufgegliedert bezüglich der Dimensionen Zeit, Stichprobenumfang (Achse “Merkmalsträger”) und Zahl der Merkmale bzw. typischer Umfang des Fragebogens (Achse “Merkmale”).

gen dienen dann als Ausgangspunkt für die Parameterschätzung und den Test der gewonnenen Aussagen.

8.2. Erhebungsdesign

Je nach Art der erhofften Aussagen bzw. der zu prüfenden Hypothesen wird die Erhebungsmethodik bezüglich folgender Kategorien festgelegt:

8.2.1. Aggregierungsebene

Diese reicht von einer globalen Untersuchung der Merkmale einer statistischen Gesamtheit über eine mehr oder weniger feine **Disaggregation** nach z.B. Alter, Geschlecht, Berufstätigkeit, Kfz-besitz, Haushaltsgröße, Wegezweck etc) bis zur Untersuchung auf individueller Ebene. Den Spezialfall einer Disaggregation nach Altersgruppen bezeichnet man auch als **Kohortendesign**.

8.2.2. Zeit- und Merkmalsträgerdimension

Die Unterscheidungen werden in Abb. 8.3 veranschaulicht:

- **Querschnittsdaten** werden zu einem festen Zeitpunkt oder Zeitintervall erhoben und stellen quasi einen “Schnappschuss” der Situation dar.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

- Bei **Längsschnittdaten** hingegen wird auch die Veränderung in der Zeit berücksichtigt. Dies kann in Form mehrerer Querschnitterhebungen (**Trend-Design**) erfolgen, welche in Zeitabständen von i.d.R. mehreren Jahren mit jeweils neuen Stichproben wiederholt werden. Diese Methodik wird z.B. bei den großen Mobilitätserhebungen SrV (System relevanter Verkehrserhebungen) und MiD (Mobilität in Deutschland) angewandt. Untersucht man hingegen ein und dieselbe Stichprobe bzw. Personen-Gruppe fortlaufend über mehrere Jahre, spricht man von **Paneldaten**.¹ Um einen übermäßigen Ausfall der im Panel enthaltenen Personen im Laufe der Zeit bzw. Fluktuationen zu vermeiden, muss man bei solchen Befragungen jedoch die Zahl der erhobenen Merkmale beschränken, was in Abb. 8.3 durch eine gegenüber der Querschnittserhebung reduzierten “Höhe” symbolisiert ist. Ferner ist bei einem Panel-Design der Umfang der Stichprobe (in Abb. 8.3 symbolisiert durch die “Tiefe” des entsprechenden Quaders) in der Regel geringer als bei Querschnitts-Befragungen.
- Zeichnet man hingegen nur einzelne Merkmale kontinuierlich über die Zeit auf, spricht man von einer **Zeitreihe**.

8.2.3. Ausmaß der Kontrolle über den Untersuchungsgegenstand

- **Objektive Messung.** Die Daten werden hier ohne jede Beeinflussung der zu untersuchenden Subjekte und Objekte erhoben.² Dies führt zu maximaler Objektivität, da durch Überprüfung der Messgeräte der Wahrheitsgehalt der Messung im Prinzip immer getestet werden kann. Andererseits man kann naturgemäß die zu untersuchenden exogenen und endogenen Variablen nicht korrigieren und hat auch keinerlei Kontrolle über die Störeinflüsse. Beispiele hierfür sind Verkehrszählungen (Verkehrsflusserhebungen) sowie Messung anderer objektiver Verkehrseigenschaften wie Geschwindigkeit, Verkehrsdichte etc. (Abschnitt 8.3).
- **Revealed Choice:** Erhebung tatsächlicher Ereignisse durch Befragung. Hier werden tatsächlich realisierte Wahlentscheidungen wie Wegekettwahl, Verkehrsmittelwahl und Routenwahl und die relevanten erklärenden Variablen wie Alter, Geschlecht, Zeit- und Geldaufwände für die verschiedenen Verkehrsmittel durch Befragung, in der Regel außerhalb des Verkehrsraums, erhoben (Abschnitt 8.4).

Man erhält eine Vielzahl von Informationen, welche man durch Verkehrsflusserhebungen nie gewinnen könnte: Man sieht einem vorbeifahrenden Kfz oder einem Buspassagier ja nicht an, wo der Ausgangspunkt und das Ziel des Weges ist und welchem Zweck er dient. Andererseits ist der Wahrheitsgehalt viel schwerer zu überprüfen. Fehler ergeben sich nicht nur durch absichtliche Falschaussagen, sondern auch dadurch, dass sich die befragten Personen an viele Details nicht oder nur unvollständig erinnern.

¹Die daran beteiligten Personen bezeichnet man auch als Panel.

²Für Physiker: Abgesehen vom quantenmechanischen Messproblem.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

- **Stated Choice** bzw. **Experimentelles Design** durch eine direkte Nutzermessung. Hier wird nicht nach realisierten Entscheidungen gefragt, sondern Gedankenexperimente durchgeführt nach dem Motto “Wie würden Sie sich entscheiden, wenn Sie ein Kfz zur Verfügung hätten und einen Weg zurücklegen müssten, der zu Fuß 30 min, mit dem Rad 10 min, mit ÖPNV 20 min und mit dem Kfz 8 min beträgt?” Ein Spezialfall des Stated Choice Designs ist die **Conjoint-Analyse** (Abschnitt 8.5.2). Im Gegensatz zur Erhebung realisierter Entscheidungen hat hier der Experimentator viele der exogenen Variablen unter Kontrolle und kann sie genau in den interessanten Bereich bringen bzw. bildlich den Befragten “genauer auf den Zahn fühlen”. Hingegen sinkt naturgemäß die Objektivität. Verzerrungen und systematische Fehler lassen sich kaum kontrollieren. Näheres in Abschnitt 8.5)

8.2.4. Ziehungsmethode

Bei jeder ökonomischen Untersuchung muss man zunächst die Merkmalsträger und deren **statistische Gesamtheit** bzw. **Grundgesamtheit** definieren. Dies geschieht (vgl. Statistik-Grundvorlesung) durch

- **räumliche Eingrenzung** (z.B. Untersuchungsgebiet Deutschland oder Dresden),
- **zeitliche Eingrenzung** (Zeitpunkt oder Zeitraum, z.B. Sommer 2008)
- **sachliche Eingrenzung** (z.B. nur erwachsene Personen, einschließlich Ausländer, die in Deutschland leben aber ausschließlich Deutsche, die im Ausland leben).

Die Ziehungsmethode wird dann charakterisiert durch

- Die **Ziehungsgrundlage**. Diese ist bei objektiven Messungen eine Teilmenge der räumlichen und zeitlichen Abgrenzung (z.B. die mit Detektoren ausgestattete Streckenabschnitte) und bei Befragungen meist ein Register, z.B. das Einwohnermelderegister oder das Kfz-Zulassungsregister. Bei einer Erhebung im Verkehrsraum können es aber auch die an der erhebenden Person/den erhebenden Personen *potenziell* vorbeilaufenden Passanten sein. Die Ziehungsgrundlage muss nicht identisch zur Grundgesamtheit sein. Vielmehr kann es sich um eine Obermenge handeln (z.B. Einwohnerregister bei einer aus Motorradfahrern bestehenden Grundgesamtheit), um einer Untermenge (viele Gewohnheiten deutscher Einwohner werden anhand einer repräsentativen Durchschnittsstadt erhoben), oder um eine abgeleitete Menge (z.B. Einwohnerregister bei einer aus Haushalten bestehenden Grundgesamtheit). Dieser Sachverhalt wird im Kapitel 9 ausführlich behandelt.
- **Vollerhebung** oder **Stichprobe**. Vollerhebungen sind extrem aufwändig und kommen (abgesehen von der Volkszählung) nur für kleine statistische Gesamtheiten in Frage. Bei der Stichprobe wiederum unterscheidet man im Wesentlichen die **Zufallsauswahl**, die **Proportionalauswahl** (geschichtete Stichprobe) und die **Klumpenauswahl** (vgl. Kap. 9).

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

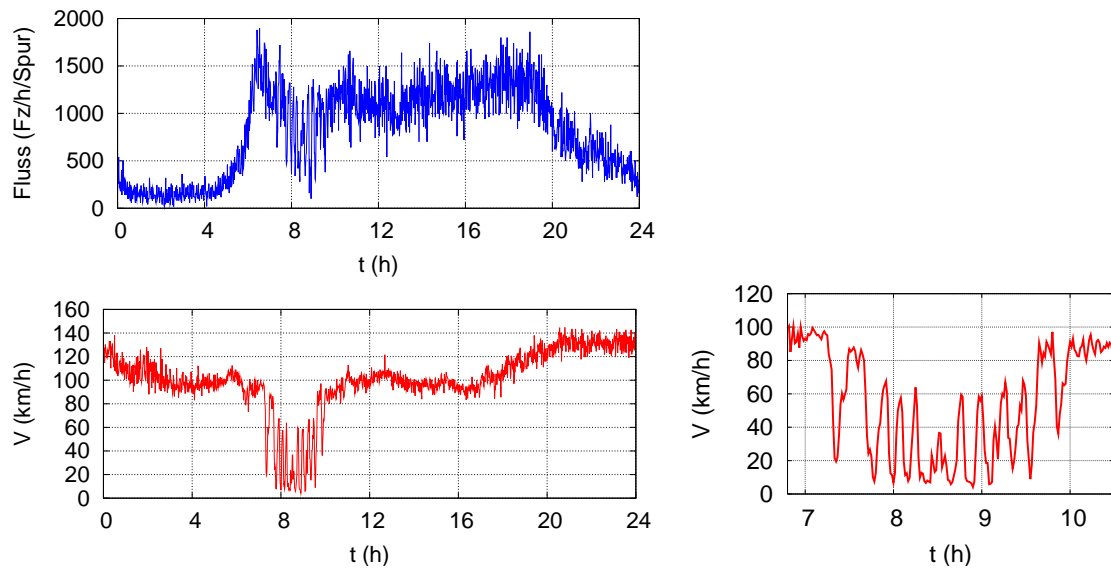


Figure 8.4.: Verkehrsbelastungs- und Geschwindigkeitsganglinien auf der A9-Süd bei München. Der Ausschnitt zeigt, dass in der morgendlichen Rush-Hour Stop-and-Go-Verkehr herrscht.

8.2.5. Modalität der Erhebung

Bei Messungen objektiver Merkmale wird die Erhebung in der Regel automatisch durchgeführt, sie kann aber auch händisch z.B. durch Zählgeräte, Notebookeingabe oder Strichlisten erfolgen. Wichtige Erhebungsmodi bei der Befragung sind

- Persönliche Befragung durch eine Betreuungsperson,
- schriftlich,
- telefonisch,
- und per Internet.

Kombinationen (z.B. telefonisches Nachfragen bei Ausbleiben einer schriftlichen Antwort und Hotlines) sind ebenfalls üblich.

8.3. Verkehrsflussdaten

Verkehrsflussdaten werden direkt im Verkehrsgeschehen an festen Orten erhoben. In der Regel sind sich die Verkehrsteilnehmer (Fußgänger, Radfahrer, Autofahrer) der Erhebung nicht bewusst. Die Erfassung erfolgt in der Regel auf einer der folgenden Arten:

- Personen mit Zählgeräten oder Strichlisten (Stadtverkehr, Untersuchungen für spezielle Zwecke),

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

- Videoaufzeichnung mit anschließender manueller Auswertung,
- automatisch Messung an **Messquerschnitten**³ Die Messung kann dabei erfolgen durch
 - **pneumatische Zähler**: Vor allem Stadtverkehr als temporäre Anwendung,
 - **Induktionsschleifen** oder Infrarot-Messung: In der Regel permanente Anwendung, im Stadtverkehr z.B. als Sensor für verkehrsabhängig gesteuerte Lichtsignalanlagen, auf der Autobahn zur Verkehrslageschätzung und als Sensor für Verkehrsbeeinflussungsanlagen
 - Videocamera mit automatischer Auswertung (Tracking). Damit können neben Kfz-Ströme auch z.B. Fußgängerströme erfasst werden.

Typische erhobenen Merkmale sind die Folgenden:

- Verkehrsfluss im engeren Sinne, d.h. Zahl der Fußgänger oder Kfz, welche einen bestimmten Querschnitt pro Zeitintervall überqueren,
- Geschwindigkeit, entweder über Zeitintervalle aggregiert oder als Einzelmerkmal (nur bei Doppelinduktionsschleifen oder aus Videodaten),
- evtl. Art der Fahrzeuge oder zumindest die Fahrzeuglänge
- evtl. Trajektorien in der Nähe des Querschnitts.

Abbildung 8.4 zeigt als Beispiel den Verkehrsfluss und die in Minutenintervallen aggregierte Geschwindigkeit von Messquerschnitten auf der Autobahn A9-Süd nördlich von München. Man sieht insbesondere, dass es in der morgendlichen Rush-Hour (Maximum im Fluss) zu einem Stau (Zusammenbruch der Geschwindigkeit) kommt. In der Detailansicht der Geschwindigkeits-Zeitreihe (rechts) sieht man, dass es sich um die Stauart “Stop-and-Go-Verkehr” handelt.

8.3.1. Beispiel: Tagesganglinien und Bemessungsverkehrstärke

Die über einen Tag aufgenommene Zeitreihe des Flusses bezeichnet man auch als **Tagesganglinie**. Natürlich hängt die Tagesganglinie auch vom Wochentag und (in geringerem Umfang) von der Saison (Sommer, Winter etc) sowie von Sondersituationen (z.B. Ferienanfang, Fußballspiel) ab. Man definiert deshalb verschiedene Fälle, z.B. “Normalwerktag”=Dienstag bis Donnerstag, Freitag, Samstag usw., jeweils in “normalen” Wochen und Wochen mit Sondersituationen.

³Manchmal werden auf diese Weise erhobene Verkehrsflussdaten als “Querschnittsdaten” bezeichnet. In Abschnitt 8.2 wurde dieser Begriff jedoch definiert als Daten, welche zu einem Zeitpunkt bzw. einem Zeitraum erhoben wurden. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird im Folgenden der Begriff “Querschnittsdaten” nur in der in Abschnitt 8.2 eingeführten Bedeutung als “Schnappschuss zu einem Zeitpunkt bzw. Zeitraum” verwendet.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

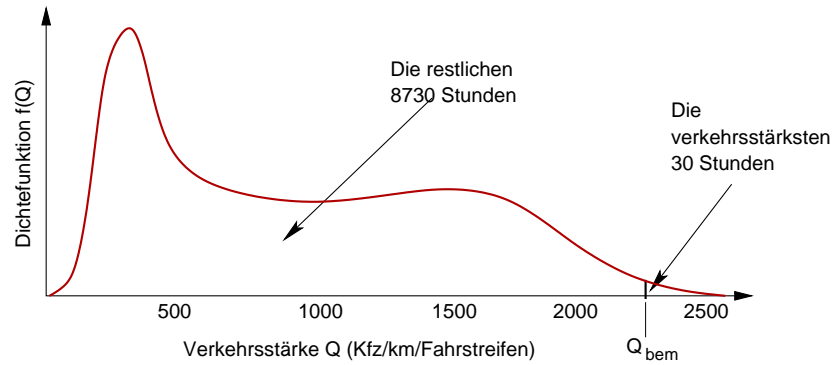


Figure 8.5.: Zur Definition der Bemessungsverkehrsstärke Q_{bem}

In ihrer Gesamtheit geben die Tagesganglinien Aufschluss über die Stärke und zeitliche Verteilung der Verkehrsbelastung. Insbesondere lässt sich damit die sogenannte **Bemessungsverkehrsstärke** als Quantil der Verkehrsnachfrageverteilung definieren (vgl. Abb. 8.5):

Die **Bemessungsverstärke** einer Richtungsfahrbahn ist die Verkehrsnachfrage (in Kfz/h oder Kfz/h/Fahstreifen), welcher im statistischen Mittel nur an 30 Stunden im Jahr überschritten wird.

Hintergrund ist, dass man aus ökonomischen Gründen die Kapazität der Straßen nicht nach der maximal zu erwarteten Nachfrage dimensioniert, sondern man vielmehr einen gewissen Zeitanteil mit Streckenüberlastung und daraus resultierenden Staus “in Kauf” nimmt.

Verständnisfrage:

Welchem Quantil der Flussverteilung entspricht obige Definition der Bemessungsverkehrsstärke?

8.3.2. Vor- und Nachteile gegenüber Mobilitätsdaten

- ⊕ Geringer Erhebungsaufwand; eine automatische Erhebung ist möglich
- ⊕ Da die zu messenden Subjekte sich der Messung nicht bewusst sind, erhält man größtmögliche Objektivität
- ⊖ Nur wenige Merkmale sind auf diese Weise erhebbar; insbesondere fehlen Informationen zum Zweck der Ortsveränderung, der Länge des Weges sowie alle soziodemografischen und -ökonomischen Merkmale.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

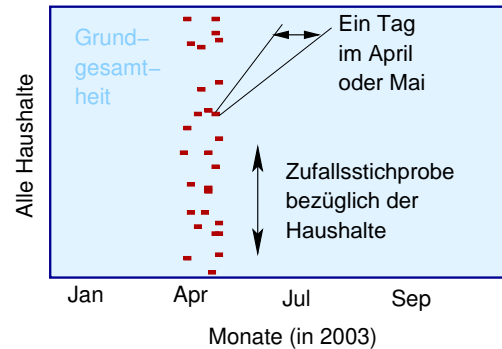


Figure 8.6.: Visualisierung der Grundgesamtheit (hellblau) und der Stichprobe (dunkelrot) bei der Mobilitätserhebung SrV. Grundgesamtheit und Stichprobe sind dabei als zweidimensionale Mengen in den Dimensionen “statistischen Einheiten” (Haushalte 1 bis N mit N der Zahl der Haushalte in der Grundgesamtheit) und der Zeit aufgetragen.

8.4. Daten zum Mobilitätsverhalten

Mobilitätsdaten beinhalten alle exogenen und endogenen Variablen des jeweils verwendeten ökonomischen Modells, also im Gegensatz zu den Verkehrsflussdaten nicht nur das Ergebnis in Form von Verkehrsbewegungen, sondern auch das Wozu, das Woher-Wohin, sowie die das Subjekt (den Verkehrsteilnehmer) und seinen/ihren Hintergrund näher beschreibenden sozioökonomischen Variablen. Damit ist klar, dass eine Erhebung nicht automatisch, sondern nur durch *Befragung* durchgeführt werden kann.

8.4.1. Beispiel: System relevanter Verkehrsbefragungen

Die Erhebung von Mobilitätsdaten soll am Beispiel der in Zusammenarbeit mit der TU Dresden (Prof. Ahrens) durchgeführten Erhebung **System relevanter Verkehrsbefragungen** (SrV) verdeutlicht werden.

Die **statistische Gesamtheit** wird charakterisiert durch

- Statistische Einheit: (i) Haushalte (Abb. 8.7), (ii) Personen (Abb. 8.8)
- Räumliche Abgrenzung: 34 Ausgewählte Städte und Gemeinden in Deutschland, u.a. Dresden (vgl. den Titel “Mobilität in Städten - SrV 2003”)
- Zeitliche Abgrenzung: Alle “mittleren Werktage” (Dienstag-Donnerstag) im Jahr 2003 (vgl. den Titel)
- Sachliche Abgrenzung: Alle in den jeweiligen Städten wohnende Personen, also einschließlich Kinder und Ausländer.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

Wichtige Hinweise zum Ausfüllen der Fragebögen

- Ihre Teilnahme an der Befragung ist freiwillig. Der Erfolg der Untersuchung hängt jedoch entscheidend von Ihrer Mitarbeit ab.
- Alle Ihre Angaben werden **vertraulich** behandelt und ohne Bezug auf Ihren Namen ausgewertet.
- Bitte füllen Sie den Fragebogen für den Stichtag aus, der auf dem Begleitschreiben genannt ist.
- Für jede Person in Ihrem Haushalt gibt es einen Wegefragebogen. Die Person unter laufender Nummer, z.B. 1, im Personenfragebogen muß mit der Person unter laufender Nummer im Wegefragebogen übereinstimmen.
- Jede Person sollte die Fragen möglichst selbst beantworten.
- Ein Weg ist immer mit einem bestimmten Zweck (z.B. Einkauf, Freizeitweg) verbunden.
- Auf einem Weg können mehrere Verkehrsmittel genutzt werden.
- Bitte tragen Sie alle Wege des ganzen Tages ein und vergessen Sie keinen Weg. Auch Heimwege und kurze Wege z.B. zum Postkasten sind für die Befragung wichtig!
- Bitte füllen Sie die Fragebögen auch dann aus, wenn Sie am Stichtag nicht unterwegs gewesen sind!
- Wenn in Ihrem Haushalt mehr als 5 Personen leben, dann notieren Sie bitte die Personenangaben ab der 6. Person formlos auf einem gesonderten Blatt.
- Wenn eine Person mehr als 7 Wege am Stichtag unternommen hat, dann ist ein zweiter Wegefragebogen auszufüllen und die laufende Nummer der Person zu übernehmen
- Vielen Dank dafür, dass Sie mit der Beantwortung zum Gelingen der Untersuchung beitragen!

Sollten Sie Fragen haben, wenden Sie sich bitte an:

kostenloses Infotelefon
0800 / 60 60 604
 omniphon GmbH

VERKEHRSBEFragung

'Mobilität in Städten - SrV 2003'

durchgeführt von der
 Technischen Universität Dresden
 Lehrstuhl Verkehrs- und Infrastrukturplanung



Bevor Sie die Fragebögen ausfüllen: Lesen Sie bitte die Hinweise im oberen Teil dieser Seite!

Wir empfehlen Ihnen, die Fragebögen in dieser Reihenfolge auszufüllen:

1. Haushaltsfragebogen
2. Personenfragebogen auf der Rückseite dieses Blattes.
3. Wegefragebögen

HAUSHALTSFRAGEBOGEN

Zum Haushalt gehören alle Personen (Sie selbst eingeschlossen), die ständig mit Ihnen zusammenleben. Ein Haushalt kann auch aus einer Person bestehen (Einpersonenhaushalt).

Über welche Telefonnummer(n) ist Ihr Haushalt am besten zu erreichen (z.B. für eventuelle Nachfragen)?

1.) /
 Vorwahl Anschluss

2.) /
 Vorwahl Anschluss

1	2	3	4	5	6
Wieviele Personen leben ständig in Ihrem Haushalt, Sie selbst mit eingeschlossen? Anzahl der Personen insgesamt: <input type="text"/>	Welche Fahrzeuge befinden sich im Besitz Ihres Haushaltes? Bitte geben Sie jeweils die Anzahl an! Privat - Pkw <input type="checkbox"/> Dienst - Pkw <input type="checkbox"/> Moped/Motorrad/Motoroller <input type="checkbox"/> Fahrrad <input type="checkbox"/> sonstige Fahrzeuge <input type="checkbox"/>	Welchen Pkw-Stellplatz nutzen sie überwiegend? eigener Stellplatz/ Garage/ Carport <input type="checkbox"/> im öffentlichen Raum <input type="checkbox"/>	In welcher Zeit ist die von Ihrer Wohnung aus meistbenutzte Haltestelle für Bus und Bahn zu Fuß erreichbar? Fußwegezeit Straßenbahn <input type="checkbox"/> min Fußwegezeit Bus <input type="checkbox"/> min Fußwegezeit S-/bzW.U-Bahn bzw. Nahverkehrszug <input type="checkbox"/> min	Wird in Ihrem Haushalt eine übertragbare Fahrkarte für Bus oder Bahn (z.B. übertragbare Monatskarte) genutzt? Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Über welche technische Ausstattung verfügt Ihr Haushalt? Bitte geben Sie jeweils die Anzahl der Nutzer an! Festnetztelefon <input type="checkbox"/> Mobiltelefon <input type="checkbox"/> Computer <input type="checkbox"/> Internet <input type="checkbox"/> <small>(Diese Frage dient der Analyse der verkehrlichen Wirkung neuer Medien.)</small>

Bitte beantworten Sie jetzt für alle Haushaltsmitglieder die Fragen auf der Innenseite dieses Fragebogens!

Figure 8.7.: Haushaltsfragebogen der Mobilitätserhebung SrV 2003.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

PERSONENFRAGEBOGEN																																																																																									
Bitte beantworten Sie jetzt die nachfolgenden Fragen für alle Haushaltsmitglieder!																																																																																									
Personen im Haushalt	Älteste Person	Zweitälteste Person	Drittälteste Person	Viertälteste Person	Fünftälteste Person																																																																																				
Laufende Nummer der Person	1	2	3	4	5																																																																																				
Geburtsjahr	□ □ □ □	□ □ □ □	□ □ □ □	□ □ □ □	□ □ □ □																																																																																				
Geschlecht	m <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/>	m <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/>	m <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/>	m <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/>	m <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/>																																																																																				
BERUFSTÄTIGKEIT	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">nicht berufstätig</td> <td style="padding: 2px;">Vorschulkind</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">Hausfrau / -mann</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">Rentner / Vorruhestand</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px dashed black;"></td> <td style="padding: 2px;">In Ausbildung</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">Schüler</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">Student</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">Auszubildender/ Umschüler</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px dashed black;"></td> <td style="padding: 2px;">Berufstätig</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">Vollzeit</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">Teilzeit</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">ruhendes Beschäftigungsverhältnis (z.B.: Wehrdienst, Kur, Mutterschaftsurlaub)</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;">z.Zt. arbeitslos</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </table>					nicht berufstätig	Vorschulkind	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Hausfrau / -mann	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Rentner / Vorruhestand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		In Ausbildung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Schüler	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Student	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Auszubildender/ Umschüler	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Berufstätig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Vollzeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		Teilzeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		ruhendes Beschäftigungsverhältnis (z.B.: Wehrdienst, Kur, Mutterschaftsurlaub)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		z.Zt. arbeitslos	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
nicht berufstätig	Vorschulkind	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	Hausfrau / -mann	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	Rentner / Vorruhestand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	In Ausbildung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	Schüler	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	Student	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	Auszubildender/ Umschüler	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	Berufstätig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	Vollzeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	Teilzeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	ruhendes Beschäftigungsverhältnis (z.B.: Wehrdienst, Kur, Mutterschaftsurlaub)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
	z.Zt. arbeitslos	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																			
STELLUNG IM BERUF	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">Arbeiter</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Angestellter</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Beamter</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Mithelfender Familienangehöriger</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Selbständiger</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </table>					Arbeiter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Angestellter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Beamter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Mithelfender Familienangehöriger	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Selbständiger	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																						
Arbeiter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Angestellter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Beamter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Mithelfender Familienangehöriger	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Selbständiger	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
SCHULABSCHLUSS	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">ohne</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">mit (ohne Abitur)</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Abitur</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </table>					ohne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	mit (ohne Abitur)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Abitur	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																		
ohne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
mit (ohne Abitur)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Abitur	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
BERUFSAUSBILDUNG	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">ohne</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Facharbeiter</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Meister</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Hoch- oder Fachschule</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </table>					ohne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Facharbeiter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Meister	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Hoch- oder Fachschule	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																												
ohne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Facharbeiter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Meister	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Hoch- oder Fachschule	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
FÜHRERSCHEIN-BESITZ	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">PKW</td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Moped/Motorrad</td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;">Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/></td> </tr> </table>					PKW	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Moped/Motorrad	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>																																																																								
PKW	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>																																																																																				
Moped/Motorrad	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>	Ja <input type="checkbox"/> Nein <input type="checkbox"/>																																																																																				
KFZ-VERFÜGBARKEIT	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">ständig</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">teilweise</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">gar nicht</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </table>					ständig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	teilweise	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	gar nicht	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																		
ständig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
teilweise	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
gar nicht	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
FAHRKARTENART	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">Einzelfahrschein, Tageskarte</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Mehrfachkarte, Streifenkarte</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Wochenkarte, Monatskarte</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Jobticket, Semesterticket, etc.</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </table>					Einzelfahrschein, Tageskarte	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Mehrfachkarte, Streifenkarte	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Wochenkarte, Monatskarte	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Jobticket, Semesterticket, etc.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																												
Einzelfahrschein, Tageskarte	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Mehrfachkarte, Streifenkarte	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Wochenkarte, Monatskarte	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Jobticket, Semesterticket, etc.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
NUTZUNG NEUER MEDIEN	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">Telearbeit</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Internetshopping</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Internetbanking</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">e-mail</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">andere</td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> <td style="padding: 2px;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </table>					Telearbeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Internetshopping	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Internetbanking	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	e-mail	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	andere	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																						
Telearbeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Internetshopping	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
Internetbanking	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
e-mail	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				
andere	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																																																				

Figure 8.8.: Personenfragebogen der Mobilitätserhebung SrV 2003.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

WEGE-FRAGEBOGEN <small>Laufende Nummer der Person</small>	Wochentag (Stichtag)	Ausgangspunkt des ersten Weges: Wohnung <input type="checkbox"/>	
	An diesem Tag nicht weggegangen, weil: _____ <small>(Bitte Grund angeben!)</small>	Anderer und zwar: _____ <small>(Straße, Nummer)</small> _____ <small>(PLZ) (Ort)</small>	
Um wieviel Uhr haben Sie diesen Weg begonnen?	ERSTER WEG BEGINN (Uhrzeit)	ZWEITER WEG BEGINN (Uhrzeit)	DRITTER WEG BEGINN (Uhrzeit)
Zu welchem ZWECK haben Sie diesen Weg unternommen?	ZWECK zur Arbeit <input type="checkbox"/> Kindereinrichtung <input type="checkbox"/> Schule/Ausbildung <input type="checkbox"/> dienstlich/geschäftl. <input type="checkbox"/> Einkauf <input type="checkbox"/> private Erledigung (Bank, Arzt, Dienstleistungen ...) <input type="checkbox"/> Freizeitaktivität <input type="checkbox"/> Holen/Bringen v. Personen nach Hause <input type="checkbox"/> sonstiges, und zwar: _____	ZWECK zur Arbeit <input type="checkbox"/> Kindereinrichtung <input type="checkbox"/> Schule/Ausbildung <input type="checkbox"/> dienstlich/geschäftl. <input type="checkbox"/> Einkauf <input type="checkbox"/> private Erledigung (Bank, Arzt, Dienstleistungen ...) <input type="checkbox"/> Freizeitaktivität <input type="checkbox"/> Holen/Bringen v. Personen nach Hause <input type="checkbox"/> sonstiges, und zwar: _____	ZWECK zur Arbeit <input type="checkbox"/> Kindereinrichtung <input type="checkbox"/> Schule/Ausbildung <input type="checkbox"/> dienstlich/geschäftl. <input type="checkbox"/> Einkauf <input type="checkbox"/> private Erledigung (Bank, Arzt, Dienstleistungen ...) <input type="checkbox"/> Freizeitaktivität <input type="checkbox"/> Holen/Bringen v. Personen nach Hause <input type="checkbox"/> sonstiges, und zwar: _____
Welche VERKEHRSMITTEL haben Sie	VERKEHRSMITTEL	VERKEHRSMITTEL	VERKEHRSMITTEL

auf der Rückseite eintragen!

Figure 8.9.: Wegefragebogen der Mobilitätserhebung SrV 2003.

Die **Stichprobe** wird aus den *Einwohnermelderegistern* durch Auswahl von *Haushalten* per *Zufallsauswahl* gezogen. Aus den gewählten Haushalten werden *alle Personen* einbezogen. Der *Stichprobenumfang* beträgt etwa 6000 Personen (etwa 3000) Haushalte im Großraum Dresden und etwa ein Sechstel davon in den meisten übrigen Städten/Gemeinden.

Die Stichprobe ist aber nicht nur in der Dimension der statistischen Einheiten ein Teil der Grundgesamtheit, sondern auch in der zeitlichen Dimension: Erhebungen wurden nur im April und Mai 2003 durchgeführt und es wurden pro Haushalt bzw. Person nur die Mobilitätsdaten für einen einzigen *Bezugstag* erhoben (vgl. Abb. 8.6)

Das **Erhebungsdesign** sieht eine Erhebung *tatsächlicher Ereignisse* auf *individueller* Ebene im *Trend-Design* vor, d.h. eine Querschnittserhebung in gewissen (mehrjährigen) Zeitabständen (ab 1972; die letzten beiden Erhebungen in den Jahren 2003 und 2008). Die **Modalität der Erhebung** ist entweder ein *Telefoninterview* oder eine *schriftliche Befragung per Fragebogen*.

Die erhobenen **Merkmale** der Personen können nach mehreren Kategorien unterschieden werden:

- **Allgemeine soziodemografische und sozioökonomische Merkmale:** Wohnort und -Lage, Zugehörigkeit zu Haushalt mit n Personen, Alter, Geschlecht, Beruf, Ausbildungsniveau usw. Diese Merkmale werden im Haushalts- und Personenfragebogen erhoben (Abb. 8.7 bzw. 8.8).
- **Mobilitätsbezogene sozioökonomische Merkmale:** Führerscheinbesitz, Kfz- und Fahrradverfügbarkeit, Besitz von ÖPNV-Dauerkarten, Entfernung zur nächsten

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

ÖPNV-Haltestelle. Diese Merkmale werden ebenfalls im Haushalts- und Personenerhebungsbogen erhoben.

- **Aktivitätenbezogene Merkmale:** Zahl der Wege (definiert als zielgerichtete Ortsveränderung im öffentlichen Verkehrsraum) sowie der Wegezweck (die Zielaktivität). Merkmale dieser und der folgende Datenkategorie werden in den Wegefragebögen (Abb. 8.9) erhoben.
- **Wege- bzw. alternativenbezogene Merkmale:** Start und Zielpunkt eines Weges; Gewähltes Verkehrsmittel sowie Reisezeit, Reiseweite und die Kosten des gewählten Verkehrsmittels für diesen Weg. Aus diesen und den sozioökonomischen Merkmalen sowie den Merkmalen der Infrastruktur lassen sich auch Schätzungen für Reisezeit, Reiseweite und die Kosten der verfügbaren Verkehrsmittelalternativen ableiten.

Je nach Modell handelt es sich dabei um exogene oder endogene Variable. Für ein Verkehrsmittelwahlmodell ist beispielsweise nur das gewählte Verkehrsmittel eine endogene Variable, während alle anderen Merkmale die Rolle von exogenen Variablen spielen. Bei Modellen der Verkehrserzeugung sind die beiden ersten Kategorien exogen, die aktivitätenbezogenen Merkmale endogen und die Wege- bzw. alternativenbezogene Merkmale nicht relevant.

Für die Modellierung ist es relevant, dass die Merkmale verschiedene Skalierungen aufweisen, z.B. dichotom (zweiwertig, binär) wie das Geschlecht, allgemein nominalskaliert (z.B. Beruf, gewähltes Verkehrsmittel), ordinalskaliert (z.B. Ausbildungsgrad, Kfz-Verfügbarkeit) oder kardinalskaliert (z.B. Alter, Reisezeiten und -weiten). Ferner ist für die Modellierung wesentlich, dass einige Variable personengebunden sind und sich von Tag zu Tag nicht ändern⁴ (sozioökonomische Merkmale), andere sind personengebunden und ändern sich täglich (aktivitätenbezogene Merkmale). Schließlich hängen die wege- und alternativenbezogenen Merkmale nicht nur von der Person und dem Tag, sondern auch vom Weg und dem Verkehrsmittel ab.

8.5. Direkte Nutzermessung

In den im vorherigen Abschnitt besprochenen Mobilitätserhebungen werden tatsächlich realisierte Entscheidungen abgefragt und daraus dann mit Hilfe von Modellen der diskreten Wahltheorie Schlussfolgerungen über die Bewertungen der verschiedenen Alternativen gezogen. Deshalb nennt man diese Erhebungen auch **revealed preference**, also “aufgedeckte Präferenzen” (bei der Bewertung des Nutzens). Man kann aber die Präferenzen, also die Gewichtung der Anteile der Nutzenfunktion, direkt messen. Dazu gibt es drei Methoden:

- (a) **Stated preference.** Verschiedene Alternativen oder auch Aspekte bzw. Merkmale eines Angebots werden mit einer Rangskala bewertet. Beispiel: *Bewerten Sie*

⁴Zumindest innerhalb des persönlichen Planungszeithorizonts für die alltäglichen Ziel- und Verkehrsmittelentscheidungen. Auf längeren Zeitskalen finden natürlich durch Umzüge, Anschaffungen, berufliche Veränderungen oder auch schlicht durch das Älterwerden Veränderungen statt.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

allgemein die Attraktivität des ÖV-Angebots in Ihrer Stadt mit Schulnoten von 1 bis 6. Welche Bewertung würden Sie dem ÖV auf Ihrem Arbeitsweg geben? Wie wichtig sind Ihnen Taktfolge, Pünktlichkeit, Sauberkeit, Bequemlichkeit, Sicherheit und der Fahrpreis? Vergeben Sie auch hier jeweils Schulnoten.

- (b) **Stated ranking.** Hier werden Alternativen nach der Rangfolge ihrer Attraktivität (beste Alternative, zweitbeste, etc) geordnet: *wir als öffentliche Nahverkehrsgesellschaft nehmen unsere Kunden wichtig und befragen Sie deshalb zu Ihrer Einschätzung zu Fahrpreis, Fahrzeit, Zuverlässigkeit und Sicherheit. Was ist Ihnen wichtig bzw. weniger wichtig? Ordnen Sie die Kriterien nach der Bedeutung, die sie für Sie haben.*
- (c) **Stated choice.** Hier wird nur nach der besten aus zwei oder mehr Alternativen gefragt. Für zwei Alternativen ist dies äquivalent zum stated ranking. Beispiel: *Angenommen, Sie wollen in einem 3 km entfernten Supermarkt für den Tagesbedarf einkaufen und Ihnen stehen ein Kfz, ein Fahrrad, eine Buslinie (Kosten 2 €, Wartezeit je 10 min, Reisezeit je 10 min) zur Verfügung. Sie können auch zu Fuß gehen. Welches Verkehrsmittel wählen Sie?*

8.5.1. Eigenschaften der direkten Nutzermessung

Bei dieser Erhebungsmethode werden keine realisierten Entscheidungen, sondern subjektive Gewichtungen abgefragt. Dies kann durchaus in Form eines Gedankenexperiments wie im letzten Beispiel geschehen. Die *Vorteile* dieser Erhebungsmethode sind

- Einzelne Einflussfaktoren (Zeit, Geld, Flexibilität) sind leichter separierbar und ihre relative Gewichtung (z.B. Zeit/Geld Faktor) direkt ermittelbar,
- Für manche “weiche” nicht objektiv messbare Faktoren wie die Sauberkeit oder die Bequemlichkeit ist dies die einzige Erhebungsmöglichkeit

Es gibt aber auch *Nachteile*:

- Subjektive Bewertung einer oft hypothetischen Situation. Die Probanden entscheiden sich bisweilen anders, als sie es bei einer “echten” Entscheidung tun würden,
- Leichter manipulierbar.

8.5.2. Konkretes Anwendungsbeispiel: Wahlbasierte Conjoint-Analyse

Die *stated choice* Befragung liefert die empirische Grundlage der wahlbasierten Conjoint-Analyse. Allgemein bezeichnet die **Conjoint-Analyse** (Akronym aus dem Englischen: *considered jointly*), ganzheitlich betrachtet) ein in der Psychologie entwickeltes und nun hauptsächlich im Produktmarketing angewandtes multivariates Verfahren zur gemeinsamen Bewertung der Stärke verschiedener Einflussfaktoren auf den Gesamtnutzen eines bestimmten realen oder fiktiven Produkts.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

Für die Verkehrsökonomie, insbesondere zur Analyse der Einflussfaktoren verkehrsbezogener Wahlentscheidungen, ist eine Weiterentwicklung der traditionellen Conjoint-Analyse, die **wahlbasierte Conjoint-Analyse**, relevant. Dabei werden den befragten Personen mehrere Alternativenmengen vorgelegt, woraus im *stated-choice* Verfahren jeweils die (hypothetisch) gewählte Alternative abgefragt wird. In jeder Alternativenmenge (engl. *choice set*) werden alle oder einige Alternativen mit jeweils genau definierten und von *choice set* zu *choice set* im allgemeinen unterschiedlichen Attributwerten zur (hypothetischen) Wahl gestellt:

- Bei der Wahlentscheidung zum Autokauf können die Attribute (Merkmale, Einflussfaktoren, exogene Variable) beispielsweise den Kaufpreis, die Marke, den Typ (Fließheck, Kombi, SUV, Van, Zweisitzer ...), den Verbrauch, die Motorleistung, den Wiederverkaufswert nach 5 Jahren, die Zuladungskapazität und vieles mehr enthalten.
- Bei der Verkehrsmittelwahl sind wichtige Einflussfaktoren sicherlich der Modus als solches, die (Grenz-)kosten, die Reisezeit und die Zuverlässigkeit.

Dieser Fragebogen wird dann mit den Mitteln der in Kapitel 5.3 vorgestellten **diskreten Wahltheorie** analysiert.

Als einfaches Beispiel zur wahlbasierten Conjoint-Analyse kann als Input eine *stated choice* Befragung zur Verkehrsmittelwahl unter 75 Studierende einer vergangenen Vorlesung dienen. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 8.1 wiedergegeben. Dabei wird ein bestimmter Wegezweck angenommen, welcher von den Probanden gut vorstellbar ist (hier: der Weg von zu Hause zur Uni). Das Stated-Choice Experiment besteht nun darin, unter den sieben in der Tabelle dargestellten hypothetischen *choice sets* jeweils eine Stated-Choice-Entscheidung zu treffen zwischen folgenden Alternativen:

- Alternative 1: zu Fuß oder mit dem Rad, je nach persönlicher Vorliebe,
- Alternative 2: Mit dem ÖPNV.

In den verschiedenen Situationen sind die Alternativen unterschiedlich gut ausgestattet, also mehr oder weniger attraktiv: Als exogene (beeinflussende) Variablen wurden hier lediglich die generischen Variablen

- Komplexe (Haustür-zu-Haustür) Reisezeit in Minuten
- Grenzkosten eines Weges/einer Fahrt in €

angenommen. Durch Angabe der komplexen Reisezeiten ist implizit eine mehr oder weniger gute ÖV-Anbindung vorausgesetzt. Mit Grenzkosten sind die *zusätzlichen* Kosten gemeint, welche nur für diese konkrete Wahlentscheidung anfallen. Im Falle vorhandener Dauerkarten können dies nur Zusatzkosten für Platzkarten, schnellere Verbindungen etc. sein. Die Probanden müssen sich dies als hypothetische Situation vorstellen, auch wenn in der Realität beispielsweise das Semesterticket alles deckt. Sozioökonomischen Variablen wurden hier nicht erhoben, aber einige sozioökonomische Merkmale sind aufgrund

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

Hypoth. Situation	Altern. 1: Fuß/Rad	Altern. 2: ÖPNV	Wahl h_1	Wahl h_2	Logit: $(h_1)_{\text{pred}}$	Logit: $(h_2)_{\text{pred}}$
1	30 min	30 min + 0€	5	70	4.2	70.8
2	30 min	40 min + 0€	21	54	26.5	48.5
3	30 min	50 min + 0€	63	12	62.6	12.4
4	30 min	60 min + 0€	75	0	73.4	1.6
5	30 min	30 min + 1€	26	49	20.5	54.5
6	30 min	30 min + 2€	50	25	52.8	22.2
7	30 min	30 min + 3€	70	5	70.2	4.8
8	20 min	30 min + 0€	35	40	39.0	36.0
9	15 min	30 min + 0€	64	11	61.5	13.5

Table 8.1.: Ergebnisse des Stated-Choice-Experiments in der Ökonometrie-Vorlesung im SS 2009

der Zusammensetzung der befragten Personen ohnehin bekannt, z.B. “ist Student” oder “nicht zu alt”.

Wie in den meisten Fällen werden hier die deterministische Nutzenfunktionen \tilde{V}_k der Alternativen k (die Bedeutung der Tilden wird später ersichtlich) bzw. der Widerstand $W_k = -\tilde{V}_k$ linear modelliert:

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 = -W_1 &= \tilde{\beta}_{10} + \tilde{\beta}_{11}T_1 + \tilde{\beta}_{12}K_1, \\ \bar{V}_2 = -W_2 &= \tilde{\beta}_{20} + \tilde{\beta}_{21}T_2 + \tilde{\beta}_{22}K_2.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Hierbei bedeuten:

- T_k die komplexe Reisezeit (Minuten) und K_k die Kosten (€) bei Nutzung der Alternative k . Diese generischen Variablen wurden alternativenspezifisch modelliert, da sowohl Zeiten als auch Kosten bei verschiedenen Alternativen in der Regel unterschiedlich bewertet werden.
- $\tilde{\beta}_{10}$ und $\tilde{\beta}_{20}$ die alternativenspezifischen Konstanten, welche hier die globale Präferenzen für bestimmte Verkehrsmittel angeben.

Zusammen mit dem Unschärfeparameter λ des Logit-Modells ($1/\lambda$ gibt die Unschärfe des Zufallsnutzens an) hätte man somit sieben Modellparameter, nämlich λ und die sechs Vorfaktoren $\tilde{\beta}_{kj}$. Diese Zahl kann man aber reduzieren und dies ist auch notwendig, da sonst die mathematische Beschreibung überbestimmt ist:

- Für Wahlmodelle wir das Logit-Modell sind nur Nutzendifferenzen, nicht aber absolute Werte des Nutzens relevant. Schließlich vergleicht man ja Alternativen und zum Vergleich gehört immer ein Bezugspunkt! Also kann man, wie bereits im Kapitel 5.5 erläutert, eine der alternativenspezifischen Konstanten gleich null

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

setzen. Wir setzen $\tilde{\beta}_{20} = 0$, so dass $\tilde{\beta}_{10}$ nummehr den Alternative 1 gegenüber Alternative 2 gewährten “Bonus” darstellt, wenn alle anderen Einflüsse, also die Summe aller anderen Nutzenanteile, bei beiden Alternativen gleich sind.

- Da die eigentliche Wahlentscheidung auf Basis einer Ordinalskalierung erfolgt (“besser oder schlechter”), kann man alle Nutzenanteile bzw. die zugehörigen Parameter mit einem gemeinsamen Skalierungsfaktor multiplizieren. Wichtig ist aber, dass auch für den Zufallsnutzen zu tun (vgl. Abschnitt 5.3). Hier definieren wir den Nutzen in Einheiten der Schwankungsbreite $1/\lambda$ des Zufallsnutzens, indem wir alle Parameter mit $1/\lambda$ multiplizieren. Es gilt also nun $\lambda = 1$ und $\beta_{kl} = \tilde{\beta}_{kl}/\lambda$.
- Schließlich fallen zu Fuß oder mit dem Rad keine monetären Kosten an, also $\beta_{12} = 0$.

Damit ergibt sich schließlich das modifizierte Modell

$$\begin{aligned} V_1 &= \beta_0 + \beta_1 T_1, \\ V_2 &= \beta_2 T_2 + \beta_3 K_2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Die verbleibenden vier Parameter dieses Modells haben folgende Bedeutung:

- β_0 : Globale Bevorzugung der Alternative Fuß/Rad gegenüber dem ÖV in Nutzeinheiten. Eine Nutzeinheit (NE) ist dabei eine Schwankungsbreite $1/\lambda$ des Zufallsnutzens. Werte $|\beta_0| > 1$ bedeuten also, dass sich der eine Alternative gewährte “Vorschssbonus” deutlich von den Schwankungen der Zufallsnutzen abhebt.
- β_1 : Zeitsensitivität in NE pro Minute Fuß- oder Radweg,
- β_2 : Zeitsensitivität in NE pro ÖV-Minute
- β_3 : monetäre Sensitivität in NE pro für den ÖV aufgebrauchten Euro.

Aus dem binären Logitmodell ergibt sich aus der IIA-Eigenschaft eine einfache Beziehung zwischen den Auswahlwahrscheinlichkeiten $P(k)$ für die Alternative k und der Ausstattung der Alternativen:

$$\ln \left(\frac{P(1)}{P(2)} \right) = V_1 - V_2 = \beta_0 + \beta_1 T_1 - \beta_2 T_2 - \beta_3 K_2. \quad (8.3)$$

Die (erst im Vertiefungskurs im Masterstudium besprochene) Kalibrierung mit der Maximum-Likelihood-Methode ergibt folgendes Ergebnis (Parameterschätzer \pm Standardabweichung des Schätzers):

$$\hat{\beta}_0 = -0.84 \pm 0.41, \quad \hat{\beta}_1 = -0.296 \pm 0.019, \quad \hat{\beta}_2 = -0.227 \pm 0.014, \quad \hat{\beta}_3 = -1.88 \pm 0.12.$$

Abbildung 8.10 zeigt die Güte des Modells, indem die tatsächlichen Umfrageergebnisse (Tabelle 8.1) mit dem Modell (8.3) verglichen werden. Die gefundenen Werte der kalibrierten Modellparameter erlauben auch interessante Aussagen über die hinter den Entscheidungen stehenden Gewichtungen der verschiedenen Kriterien:

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

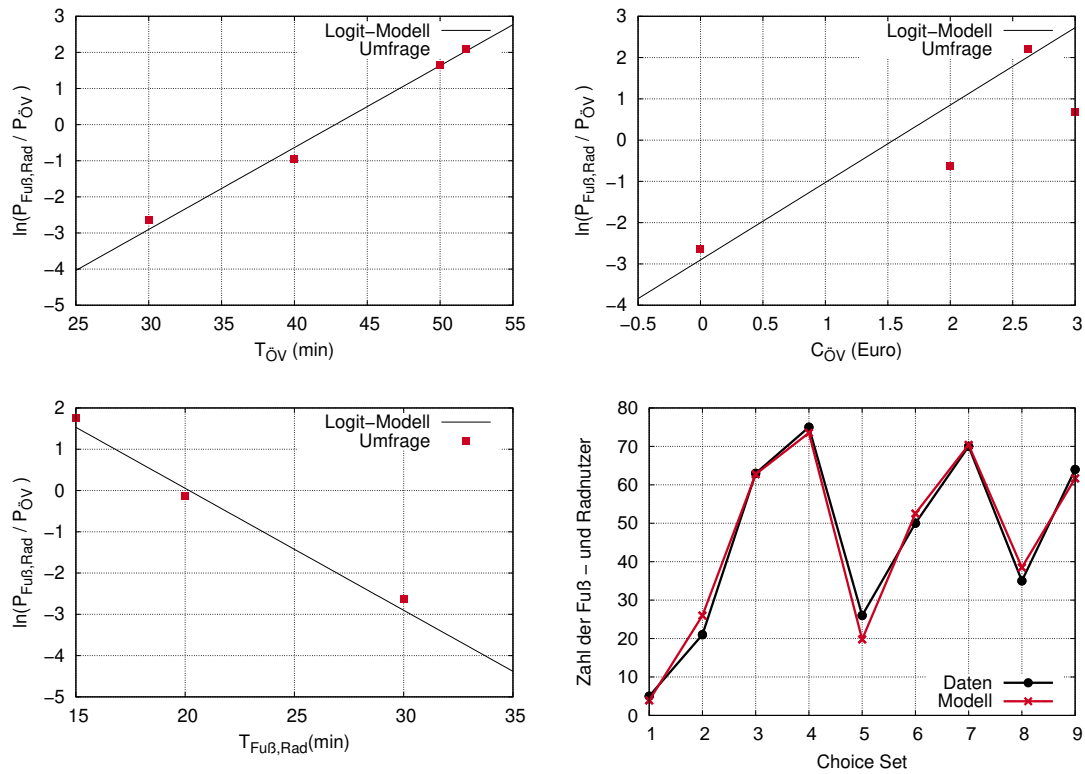


Figure 8.10.: Ergebnisse der Modellierung des Stated-Choice-Experiments der Tabelle auf S. 170 mit dem (binärem) Logit-Modell. Gezeigt ist die Sensitivität bezüglich der komplexen Reisezeit $T_{\text{ÖV}}$ des ÖPNV (links) und der ÖPNV-Zusatzkosten pro Fahrt (rechts), sowie der Fuß- und Radwegzeit (links unten). Die jeweils nicht veränderten Referenzparameter sind $T_{\text{Fuß}} = T_{\text{ÖV}} = 30$ min und $K_{\text{ÖV}} = 0$ €. Rechts unten sind die tatsächlichen und modellierten absoluten Häufigkeiten der Entscheidung zugunsten Alternative 1 für die neun *choice sets* dargestellt.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

- Unschärfe des Zufallsnutzens in Fuß/Rad-Minuten:

$$-\frac{1}{\hat{\beta}_1} = 3.4$$

- Unschärfe des Zufallsnutzens in ÖPNV-Minuten:

$$-\frac{1}{\hat{\beta}_2} = 4.4$$

- Unschärfe des Zufallsnutzens in €:

$$-\frac{1}{\hat{\beta}_2} = 0.53$$

- Globaler Bonus Fuß/Rad in ÖV-Minuten:

$$-\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_2} = -3.7$$

- Geldbewertung der ÖV-Kosten in €/ÖV-Stunden:

$$\frac{60 \hat{\beta}_2}{\hat{\beta}_2} = 7.3$$

Die Ergebnisse direkter Nutzenmessungen bzw. die dazugehörigen Modellaussagen kann man auch als Kontourplots darstellen: Über einen Unterraum der exogenen Variablen (z.B. Reisezeiten, Kosten) werden Isolinien konstanter Auswahlwahrscheinlichkeiten dargestellt, vgl. Abb. 8.11. Hierbei sieht man die Grenzen des auf konstanter Schwankungsbreite des Zufallsnutzens beruhendem Logit-Modell. In Realität nimmt wohl die Unschärfe des Zufallsnutzens mit den Absolutwerten der Zeiten zu, wodurch die Isolinien qualitativ so wie in Abb. 8.11 rechts aussehen, also insbesondere nicht wie beim Logitmodell parallel zueinander sind (Abb. 8.11 links). Dies ist konsistent mit den Überlegungen bei der Modellierung der Verkehrsaufteilung in Abschnitt 5.5, siehe insbesondere Abb. 5.8.

Schließlich zeigt Abb. 8.12 die Verteilung der Schätzfehler der Parameterschätzer in Form einer auf den Maximalwert von 1 skalierten Likelihoodfunktion. Wie man eine solche Likelihoodfunktion herleitet und welche Bedingungen dabei zutreffen müssen (insbesondere Gumbel-verteilte und unabhängige Zufallsnutzen, wobei die Bedingung der Gumbelverteilung im Vergleich zur Unabhängigkeitsforderung unwesentlich ist), wird in der Master-Vorlesung *Methoden Verkehrsökonomie* dargestellt. Hier soll aber bereits folgendes bemerkt werden:

- Die Likelihoodfunktion ist proportional zur bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Werte der jeweils nicht an den Achsen dargestellten Parameter werden auf die Maximum-Likelihood-Schätzwerte gesetzt.

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

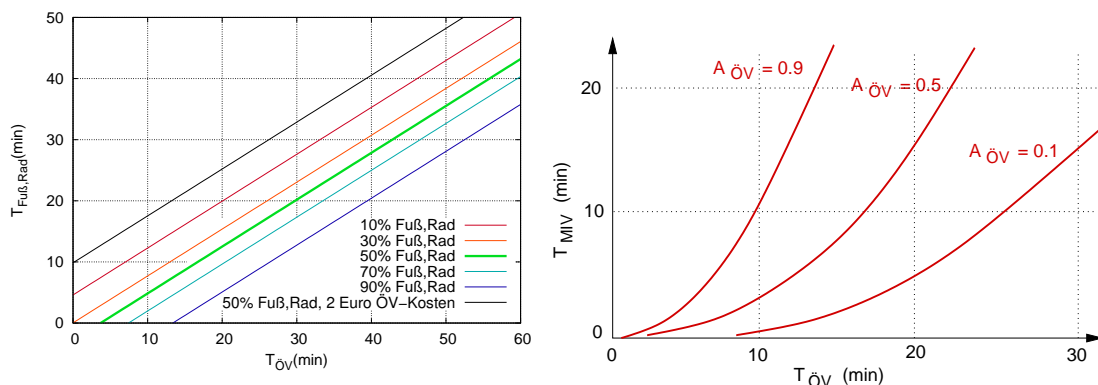


Figure 8.11.: Kontourplot der Anteilswerte für die Alternative “ÖPNV” in Abhängigkeit der Widerstandsfunktionen (negative Nutzen) der zwei Alternativen. Links: Auf das Umfrageergebnis kalibrierte Logit-Modell; Rechts: So sieht es wohl realistischerweise eher aus.

- Die Standardabweichungen $\sqrt{\hat{V}_j}$ der Parameterschätzer können durch die Abmessungen des Bereichs mit skalierten Likelihoodwerten oberhalb von $e^{-1} = 0.37$ abgeschätzt (aber nicht genau bestimmt) werden. In der Abbildung umfasst jede Box Parameterwertintervalle von $\hat{\beta}_j \pm 2\sqrt{\hat{V}_j}$.
- Neben der Standardabweichung der Schätzer gibt es signifikante Korrelationen: Beispielsweise führt eine Zunahme des wahren Wertes β_0 des globalen Bonus für Fuß/Radwege zu negativeren Werten der Zeitsensitivität β_1 dieses Modus: Um zu gleichen modellierten Auswahlverhältnissen zu kommen, welche den beobachtungen entsprechen, müssen die Differenzen der Nutzenfunktionen gleich sein: Ein erhöhter (sprich: weniger negativer) Bonus muss daher durch höhere Zeitkosten ausgeglichen werden. Ganz analog dazu ist der Fuß-Rad-Bonus β_0 positiv mit den Zeitkosten β_2 der Konkurrenzalternative ÖV korreliert.
- Die beiden Zeitsensitivitäten β_1 für Fuß/Rad und β_2 für den ÖV sind stark positiv korreliert und haben zudem nahezu gleiche Werte. Dies legt nahe, dass man durch eine Modellreduktion eventuell eine höhere Aussagekraft erhalten könnte.
- Schließlich gibt es nur schwache Korrelationen zwischen den Geld- und Zeitsensitivitäten.

Der letzte Punkt legt nahe, dass man für die beiden Alternativen die gleiche Zeitsensitivität annehmen kann. Dies resultiert in folgendem reduzierten Modell:

$$\begin{aligned} V_1 &= \beta_0 + \beta_1 T_1, \\ V_2 &= \beta_1 T_2 + \beta_2 K_2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Die Maximum-Likelihood-Kalibrierung des zugehörigen Logitmodells (siehe Master-Vorlesung) ergibt nun (siehe auch die Abbildungen 8.13 und 8.14)

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

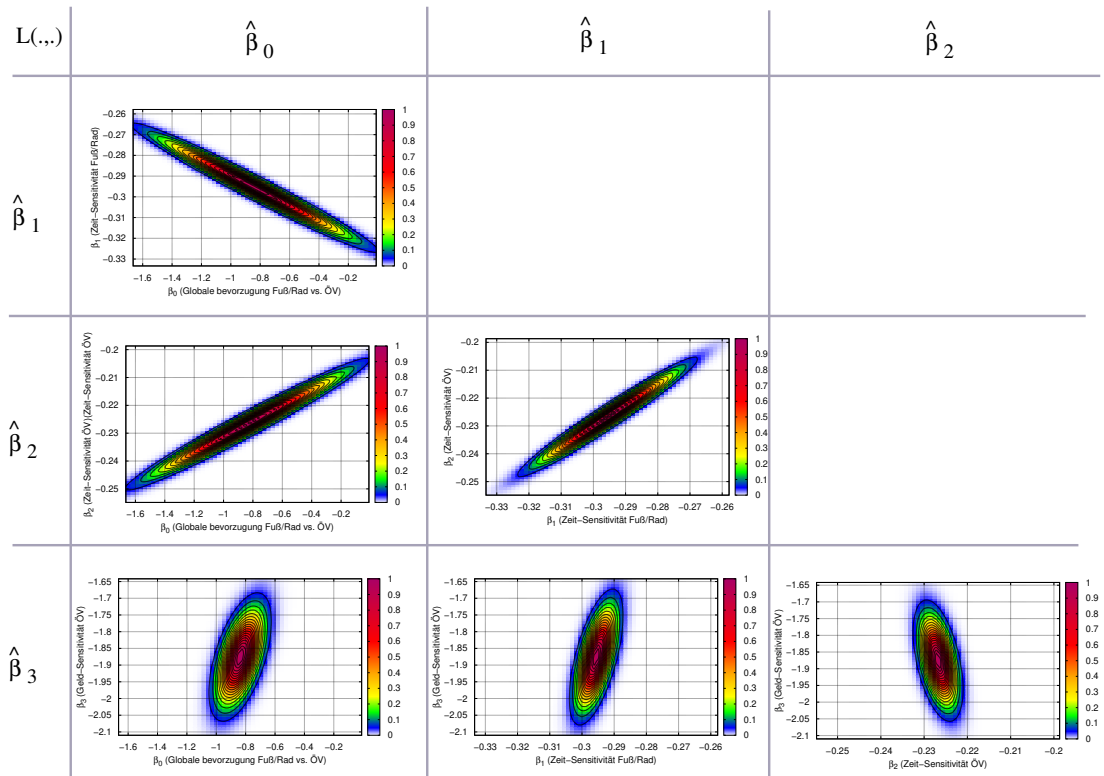


Figure 8.12.: Korrelationsmatrix der Unschärfen der Parameterschätzer. Man sieht, dass neben der Unschärfe (Standardabweichung gleich Quadratwurzel der Diagonalelemente der Kovarianzmatrix) auch erhebliche Korrelationen (Nichtdiagonalelemente der Kovarianz- bzw. Korrelationsmatrix) vorliegen.

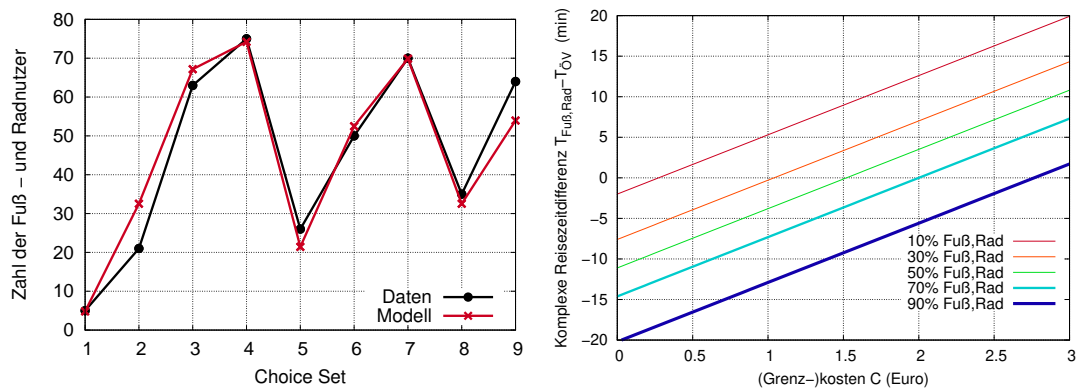


Figure 8.13.: Modellgüte und Kontourplot der theoretischen Anteilswerte für das kalibrierte reduzierten Modell (8.4).

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

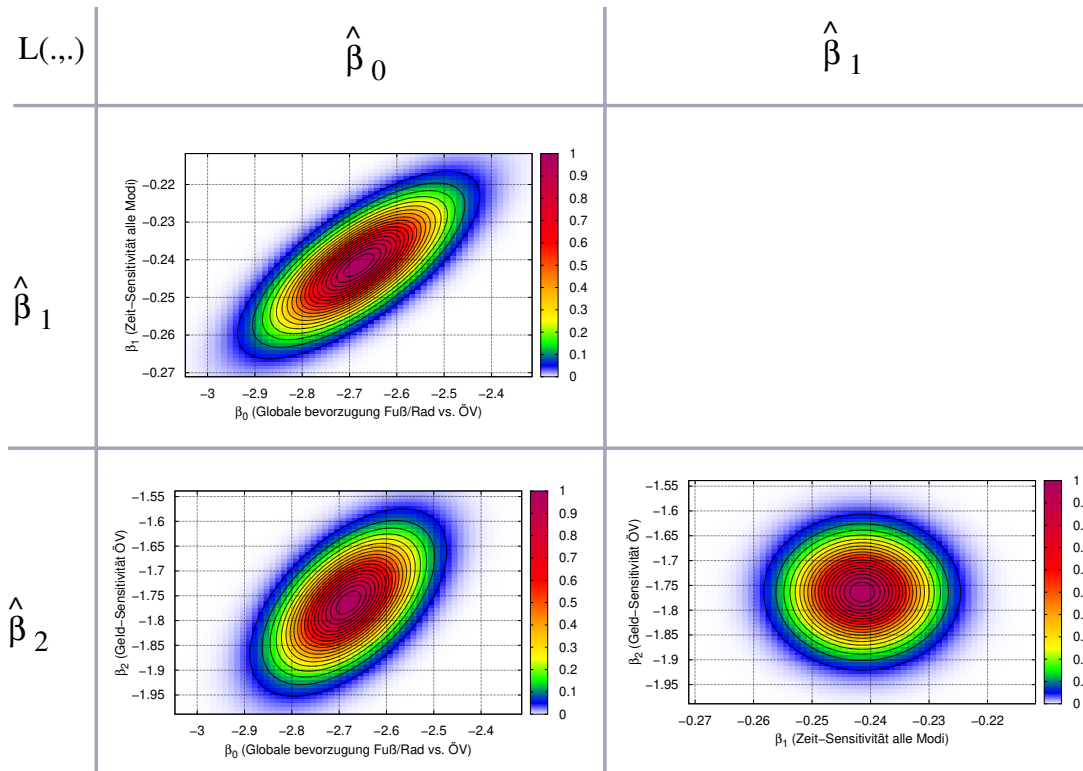


Figure 8.14.: Korrelationsmatrix der Unschärfen der Parameterschätzer des reduzierten Modells (8.4).

8. Datengewinnung: Verkehrserhebungen

$$\hat{\beta}_0 = -2.68 \pm 0.18, \quad \hat{\beta}_1 = -0.241 \pm 0.015, \quad \hat{\beta}_2 = -1.76 \pm 0.11.$$

Die Zeitsensitivität β_1 des reduzierten Modells liegt zwischen den Werten β_1 und β_2 der alternativenbezogenen Zeitsensitivitäten des ursprünglichen Modells. Dies ist ebenso plausibel wie die nur unwesentlich veränderte Geldebewertung des ÖV (Parameter β_2 des reduzierten Modells, entspricht β_3 des ursprünglichen Modells). Selbst der nun deutlich negativere Fuß-Rad Bonus ist zu verstehen, da die Zeitsensitivität der Fuß/Radwege nun geringer ist. Nur bei gleichzeitig negativeren Bonus werden deshalb vergleichbare Auswahlwahrscheinlichkeiten modelliert. Da die Schätzfehler des reduzierten Modells aber tendenziell kleiner sind *und* die Korrelationen zwischen den Schätzern deutlich geringer ausfallen, ist hier das reduzierte Modell zu bevorzugen. Für quantitative Kriterien zur Modellauswahl (Likelihood-Ratio-Tests, Gütetests) wird wieder auf die Master-Vorlesung verwiesen.

Als weiteres Beispiel, was mit dieser Methode alles erfragbar ist, werden hier noch einige Ergebnisse einer Schweizerischen Untersuchung (Intl. Verkehrswesen, 9/2003) wiedergegeben:

Merkmal	Durchschnitt	geschäftlicher Verkehr
Zeitwert MIV	27.7 Sfr/h	74.6 Sfr/h
Zeitwert ÖPNV	18.5 Sfr/h	55.8 Sfr/h
1 × Umsteigen	7.6 Sfr	
Verlässlichkeit	0.1 Sfr/% Verspätungswahrsch.	0.7 Sfr/% Verspätungswahrsch.

Der Zeitwert des ÖPNV ist also, genau wie bei unserer “kleinen Untersuchung”, niedriger als der für IV. Die absoluten Werte sind aber in der Schweizer Untersuchung tendenziell höher, was wohl an den sozioökonomischen Variablen liegt: Schließlich ist die Schweiz teuer und die befragten Personen waren nicht nur Studierende. Diese Abhängigkeit wird auch durch den großen Unterschied der Bewertung von geschäftlichen und sonstigen Verkehr (Wegezweck!) deutlich. Bemerkenswert ist auch, dass einmal Umsteigen mit 7.5 Sfr bewertet wird, zusätzlich zum Zeitverlust, welcher bereits im Zeitwert enthalten ist. Schließlich fällt auf, dass beruflich Tätige die Zuverlässigkeit drastisch höher gewichten als der Durchschnitt.

Aufgabe:

Wie wächst in dem durch (8.2) und (8.3) definierten Entscheidungsmodell die Entscheidungsunschärfe mit den Absolutwerten der Zeitaufwände an? Ist insbesondere die absolute Unschärfe ΔV oder die relative Unschärfe $\Delta V/V$ konstant? Ist das Ergebnis aus Abb. 8.10 und 8.11 konsistent mit diesem Modell?

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

9.1. Allgemeines

Während die automatischen Messmethoden für Querschnittsdaten in der Regel eine **Vollerhebung** der Grundgesamtheit ermöglichen, sind die nur in Form von Befragungen erhebbaren Daten zum Mobilitätsverhalten (Verkehrsfusserhebung) lediglich als **Stichprobenerhebung** durchführbar.

Eine **Stichprobe** ist eine Teilmenge der **Grundgesamtheit**, also Teilmenge einer zeitlich, räumlich und sachlich eingegrenzten Menge von statistischen Einheiten (vgl. Tabelle 9.1).

In diesem Kapitel wird im Weiteren der Übersichtlichkeit halber nur ein Merkmal Y diskutiert, welches eine endogene Variable eines Modells darstellt (z.B. den ÖPNV-Anteil). Die dazugehörigen Modelle werden auch als **Eingleichungsmodelle** bezeichnet. Bei mehreren endogenen Variablen gilt das Folgende für jede einzelne von ihnen.

9.1.1. Kriterien an eine Stichprobe

Eine gute Stichprobe sollte sowohl repräsentativ als auch möglichst effizient sein:

Eine Stichprobe ist bezüglich des Merkmals Y **repräsentativ**, falls die Verteilungsfunktion dieses Merkmals innerhalb der Stichprobe im Mittel (bei vielen Ziehungen der Stichprobe) dieselbe ist wie in der Grundgesamtheit (GG).

Insbesondere gilt dann für Erwartungswert und Varianz (Y_i bezeichnet das i -te Element der Stichprobe bzw. der GG Zufallsvariable)

$$E(Y_i)_{\text{Stichpr}} = E(Y_i)_{\text{GG}} = E(Y) := \mu, \quad V(Y_i)_{\text{Stichpr}} = V(Y_i)_{\text{GG}} = V(Y) := \sigma^2. \quad (9.1)$$

Daraus folgt insbesondere, dass das arithmetische Mittel ein erwartungstreuer *Schätzer* von μ ist, denn

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_i E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_i \mu = \mu.$$

(Näheres siehe Abschnitt 9.1.2).

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Eine Stichprobe ist bezüglich des Merkmals Y **effizient**, wenn die Varianz des zugehörigen effizienten Schätzers $\hat{\mu}$ bei gegebenem Stichprobenumfang minimal ist.

Der effiziente Schätzer ist dabei der erwartungstreue Schätzer mit der geringstmöglichen Varianz, in der Regel das arithmetische Mittel.¹ Die Eigenschaften der Repräsentativität und Effizienz hängen vor allem ab von der Ziehungsgrundlage und Ziehungsmethode.

- Die **Ziehungsgrundlage** muss nicht notwendigerweise identisch zur Grundgesamtheit sein, sondern kann auch eine Obermenge sein oder eine Menge, aus der man die Grundgesamtheit vollständig erschließen kann (abgeleitete Menge). Ist z.B. die Grundgesamtheit sachlich auf Motorradfahrer eingegrenzt, kann man als Ziehungsgrundlage z.B. das Personenregister (Obermenge) oder das Zulassungsregister für Kfz oder Motorräder (abgeleitete Menge) heranziehen. Umfasst die Grundgesamtheit alle Haushalte in Dresden, kann man ebenfalls das Personenregister zur Ziehung heranziehen (abgeleitete Menge).

Verwendet man jedoch nicht direkt die Grundgesamtheit als Ziehungsgrundlage, erhält man ohne zusätzliche Maßnahmen in der Regel nichtrepräsentative Stichproben, die man durch spezielle **Entzerrungs-Methoden** behandeln muss.

- Die einfachste **Ziehungsmethode** ist die **Zufallsauswahl** (Abschnitt 9.2), aber durch eine geeignete **Schichtung** mit einer **Quotenauswahl** (Abschnitt 9.3) kann man bei gleichem Stichprobenumfang die Trennschärfe (Effizienz) erhöhen. Dasselbe kann man jedoch robuster durch eine nachträgliche **Entzerrung** (Abschnitt 9.4) erreichen.

9.1.2. Schätzer

Ein **Schätzer** $\hat{Z} = f(\{Y_i\})$ einer Eigenschaft z der Grundgesamtheit ist eine Funktion der Merkmalswerte Y_i der Stichprobe. In der Regel beschreibt z eine globale Eigenschaft der Grundgesamtheit, die man gerne wissen möchte. Beispiele für solche Größen und mögliche Schätzer dafür sind

- das Stichprobenmittel $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ als Schätzer des Erwartungswertes $\mu = E(Y)$ der Grundgesamtheit,
- die Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ als Schätzer der wahren Varianz $\sigma^2 = V(Y) = E(Y - \mu)^2$.

¹Man beachte, dass die Anwendung eines nichtoptimalen, also nichteffizienten Schätzers auch bei einer effizienten Stichprobe zu suboptimalen Ergebnissen führen würde.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Erhebung	Mobilität in Deutschland (MiD)	System relevanter Verkehrsbefragungen (SrV)
Statistische Einheit	(i) Personen, (ii) Haushalte	wie MiD
Grundgesamtheit	zeitlich: 2002 räumlich: Deutschland sachlich: Inländer ≥ 14 J	zeitlich: 2003, je Di-Do räumlich: 34 Städte sachlich: alle Inländer
Stichprobe (räumlich und sachlich wie Grundgesamtheit)	7.12.2001 - 22.12.2002	April - Juni 2003
Auswahl	geschichtet	Zufallsauswahl (mit Entzerrung)
Stichprobenumfang	26 000 Haushalte 62 000 Personen	13 500 Haushalte 33 000 Personen (3 000 / 6 000 in Dresden)
Erhebungsbasis (Ziehungsgrundlage)	Einwohnermelderegister	wie MiD

Table 9.1.: Grundgesamtheit und Stichprobe bei den beiden wichtigsten deutschen Mobilitätserhebungen.

Schätzer werden üblicherweise mit demselben Symbol wie die zu schätzende Größe bezeichnet, aber zusätzlich mit einem “Dach” versehen. Als Funktion von Zufallsvariablen sind die Schätzer (im Gegensatz zu den zu schätzenden Größen) *selbst* stochastische Größen², haben also insbesondere einen Erwartungswert und eine Varianz. Daran knüpfen sich folgende Kriterien, welche Schätzer erfüllen sollten:

Ein Schätzer \hat{Z} für die Größe z ist **erwartungstreu**, falls

$$E(\hat{Z}) = z \tag{9.2}$$

²Wie in den Statistik-Vorlesungen werden mit arabischen Buchstaben bezeichnete Zufallsgrößen groß und ihre Werte klein geschrieben. Bei griechischen Bezeichnungen wie β_j entfällt diese Unterscheidung. Ein Dach (für Schätzer) kennzeichnet aber auch dort optisch eine Zufallsgröße.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Ein Schätzer \hat{Z} für die Größe z ist **effizient**, falls er erwartungstreu ist und falls, bei gegebener Stichprobe (insbesondere festen Stichprobenumfang) gilt,

$$V(\hat{Z}) = E((\hat{Z} - z)^2) \stackrel{!}{=} \min \quad (9.3)$$

bezüglich aller anderen möglichen erwartungstreuen Schätzer.

Diese Kriterien stellen gewissermaßen das Gegenstück dar zu den Kriterien der Repräsentativität und Effizienz von Stichproben.

Die Frage, ob ein Schätzer erwartungstreu und welcher Schätzer effizient ist, hängt i.A. von der Ziehungsmethodik der Stichprobe ab. Beispielsweise gelten für den Schätzer $\hat{\mu}$ des Erwartungswertes $\mu = E(Y)$ folgende, im Weiteren genauer diskutierte Ergebnisse:

- Wird die Stichprobe per Zufallsauswahl direkt aus der Grundgesamtheit gezogen und sind keine weiteren Informationen über die Struktur der Grundgesamtheit verfügbar (z.B. Altersstruktur), ist das arithmetische Mittel \bar{Y} ein effizienter Schätzer für μ (Abschnitt 9.2).
- Dasselbe gilt, wenn die Stichprobe per Proportionalauswahl (Quotenverfahren) aus der Grundgesamtheit oder aus einer die Grundgesamtheit umfassenden Ziehungsgrundlage (Register) gezogen wird (Abschnitt 9.3).
- Wird die Stichprobe per Zufallsauswahl gezogen und sind weitere Strukturinformationen wie die Alters- und Geschlechtsstruktur der Grundgesamtheit bekannt, so ist der effiziente Mittelwertschätzer ein gewichtetes arithmetisches Mittel $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_i E_i Y_i$. (Abschnitt 9.4).

Im Allgemeinen hängt der effiziente, also optimale Schätzer von der Art der Stichprobe ab. Ggf. auch von den Stichprobenwerten von Strukturmerkmalen wie Alter und Geschlecht, wenn deren Verteilung a priori bekannt ist.

9.2. Zufallsauswahl

Bei der **Zufallsauswahl** werden die N Elemente der Grundgesamtheit willkürlich von 1 bis N nummeriert und dann die n Elemente der Stichprobe “blind” gezogen, wie bei der “Ziehung ohne Zurücklegen” im Urnenmodell.

9.2.1. Vorgehen

Nimmt man das Dresdner Personenregister ($N = 456\,694$) als Ziehungsgrundlage, könnte die Ziehung z.B. wie folgt realisiert werden:

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

1. Indizierung der Ziehungsgrundlage, z.B. alphabetisch: Person 1 = Aae Lennert, ..., Person 456 694 = Zywitzski Olaf.
2. Ziehung einer (0,1)-gleichverteilten (Pseudo-) Zufallszahl $Z \sim G(0, 1)$. Bei einer Ziehung erhält man z.B. die Realisierung $z=0.9334678$.
3. Aufnahme der Person i in die Stichprobe durch folgende Rundungsoperation:³

$$i(z) = \text{round}(zN + 0.5) = 412\ 369.$$

4. Wiederholung der Ziehung, bis man n verschiedene Elemente gezogen hat (zieht man zufällig zweimal dasselbe Element, wird die Ziehung wiederholt).

9.2.2. Stichprobenfehler

Bei Mobilitätsbefragungen ist man i.A. an **Erwartungswerten** der interessierenden Merkmale, z.B. $\mu = E(Y)$, interessiert. Wir nehmen zunächst eine repräsentative Zufallsstichprobe an, bei der (9.1) gilt, also $E(Y_i) = \mu$ und bei der das arithmetische Mittel \bar{Y} den effizienten Schätzer $\hat{\mu}$ für μ darstellt, also den Schätzer mit der minimalen Unschärfe, welche durch die Varianz $V(\bar{Y}) = E((\bar{Y} - \mu)^2)$ charakterisiert wird:

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (9.4)$$

Wichtig ist es, zu unterscheiden zwischen **Zufallsvariablen** wie Y_i und \bar{Y} und den bei einer Ziehung dieser Zufallsvariablen sich ergebenden **Realisierungen** wie y_i und \bar{y} , welche reine Zahlenwerte darstellen. Statistische Operatoren wie $E(\cdot)$ und $V(\cdot)$ können in sinnvoller Weise nur auf die per Konvention groß geschriebenen (oder mit einem Dach gekennzeichneten) Zufallsvariablen angewandt werden.

Verständnisfrage:

Was ist der Erwartungswert und die Varianz eines festen Zahlenwertes?

Erwartungswert

Da der Schätzer $\hat{\mu}$ eine Zufallsvariable darstellt, kann man von ihm Mittelwert und Varianz berechnen. Es gilt

$$E(\hat{\mu}) = E(\bar{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu. \quad (9.5)$$

³Der Summand 0.5 ist notwendig, damit auch die erste und letzte Person dieselbe Ziehungswahrscheinlichkeit erhält wie die übrigen.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Dabei wurde beim vorletzten Gleichheitszeichen berücksichtigt, dass eine Zufallsauswahl aus der Grundgesamtheit zu einer unverzerrten Stichprobe führt.

Bei unverzerrten Stichproben, wie man sie beispielsweise durch eine Zufallsauswahl direkt aus der Grundgesamtheit erhält, ist das arithmetische Mittel ein erwartungstreuer Schätzer für den wahren Mittelwert μ .

Varianz

Bei Mobilitätsuntersuchungen gilt in der Regel $n \ll N$, die Stichprobe ist also sehr viel kleiner als die Grundgesamtheit und die einzelnen Stichprobenelemente Y_i sind unabhängig voneinander, also ist die Kovarianz $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für alle $i \neq j$. Dann gilt für die Stichprobenvarianz des Mittelwertschätzers (vgl. die Symboltabelle auf S. 202 und die Rechenregeln (9.22)-(9.25))

$$\begin{aligned} V(\hat{\mu}) = V(\bar{Y}) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(Y_i) \end{aligned}$$

und bei Repräsentativität, $V(Y_i) = V(Y) = \sigma^2$,

$$V(\hat{\mu}) = \frac{V(Y)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \quad (9.6)$$

Man kann auch zeigen, dass bei festem Stichprobenumfang und ohne Zusatzinformationen diese Varianz die kleinste unter allen erwartungstreuen Schätzern ist.

Das arithmetische Mittel ist ein effizienter Schätzer für den wahren Mittelwert μ , wenn die Stichprobe vom Umfang $n < N$ repräsentativ ist und keine a priori bekannten Strukturmerkmale wie Alter und Geschlecht verfügbar sind. Die Formel (9.6) gilt jedoch nur, falls zusätzlich $n \ll N$.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

9.2.3. Schätzung von Anteilswerten

Eine wichtige Klasse von Mobilitätsmerkmalen sind diskreter Natur (z.B. die Wahl des bevorzugten Verkehrsmittels) und können daher durch eine oder mehrere Ja-Nein-Entscheidungen charakterisiert werden. Jede einzelne Ja-Nein-Entscheidung kann man im statistischen Sinne als sog. *Bernoulli-Experiment* auffassen, also ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ausgängen. Die entsprechende Zufallsvariable Y ist definiert durch

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{“Ja”-Entscheidung} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist außerdem $n \ll N$, so sind die Y_i unabhängig und damit (vgl. Statistik II-Vorlesung) binomialverteilt mit einem Freiheitsgrad:

$$Y_i \sim B(1, \mu), \quad E(Y_i) = \mu, \quad V(Y_i) = \sigma^2 = \mu(1 - \mu). \quad (9.7)$$

Insbesondere hat der Erwartungswert μ die Bedeutung eines **Anteilswertes**. Die *Varianz* des aus der Stichprobe geschätzten Anteilswertes ergibt sich mit (9.6) zu

$$V(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\mu(1 - \mu)}{n}. \quad (9.8)$$

Da die Summe von n unabhängigen $(1, \mu)$ -binomialverteilten Zufallsgrößen einer $(n, n\mu)$ -Binomialverteilung gehorcht, ist hier nicht nur Erwartungswert und Varianz des Stichprobenmittels bekannt, sondern auch die Verteilung selbst:

$$\hat{\mu} = \bar{Y} \sim B(n, n\mu).$$

Eine interessante, allerdings nichttriviale Anwendung der Statistik der Zufallsziehung ist die Begründung für das “Quadratwurzelgesetz” der Gewichtung der Stimmen bei der Europawahl, welches 2007 für Aufregung gesorgt hat, siehe Anhang A.1.

Aufgabe: Mindestgröße einer Stichprobe

Wie groß muss man bei einer Mobilitätserhebung zur Frage “Benutzen Sie bei Arbeitswegen bevorzugt den ÖV” und eines erwarteten Anteils in der Größenordnung 50% die Stichprobe mindestens anlegen, damit der wahre Anteilswert mit einer Unschärfe von höchstens 1% bestimmt werden kann? Definieren Sie dabei die Unschärfe

- (i) als eine Standardabweichung,
- (ii) als die halbe Breite des Konfidenzintervalls zur Fehlerwahrscheinlichkeit 5%.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Lösung

Der zulässige Fehler sei durch $r = 1\% = 0.01$ gegeben

- (i) Hier wird r gleich der Standardabweichung σ des Schätzers $\hat{\mu} = \bar{Y}$ gleichgesetzt. Also mit Gl. (9.8):

$$V(\hat{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\mu(1-\mu)}{n} = r^2 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\mu(1-\mu)}{r^2} = \underline{\underline{2\,500}}.$$

- (ii) Hier wird r gleich der halben Breite des Konfidenzintervalls gesetzt. Bei $n > 30$ ist der Zentrale Grenzwertsatz gültig, also gehorcht die Zufallsgröße $\hat{\mu}$ einer Gaußverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz $\mu(1-\mu)/n = \sigma^2/n$. Damit ist

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

standardnormalverteilt. Teilt man die Fehlerwahrscheinlichkeit symmetrisch auf, also je 2.5% links und rechts auf, ergibt sich in Z die halbe Breite des Konfidenzintervalls gleich dem tabellierten 97.5%-Quantil $z_{0.975} = 1.96$ der Standardnormalverteilung, also

$$z_{0.975} \frac{\sigma}{n} = z_{0.975} \frac{\mu(1-\mu)}{n} = r^2 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{z_{0.975}^2 \mu(1-\mu)}{r^2} = \underline{\underline{9\,600}}.$$

9.3. Quotenauswahl und geschichtete Stichprobe

Ziel der Schichtung einer Stichprobe ist es, die Stichprobe bezüglich der Anteile bestimmter verhaltenshomogenen Untergruppen genau an die jeweiligen Anteile in der Grundgesamtheit zu machen und damit trennschärfere Schätzer zu erhalten:

Bei einer durch **Quotenauswahl** resultierenden **geschichteten Stichprobe** sind die Anteilswerte der Ausprägungen von bestimmten **Quotenmerkmalen** dieselben wie in der Grundgesamtheit.

Da die Zahl der Stichprobenelemente mit bestimmten Ausprägungen der Quotenmerkmale proportional zur Anzahl der entsprechenden Elemente in der Grundgesamtheit ist, nennt man dieses Auswahlverfahren auch **Proportionalauswahl**. Die Quotenmerkmale sollten folgende Bedingungen erfüllen:

- (i) Die Anteile der verschiedenen Ausprägungen der Quotenmerkmale sind in der Grundgesamtheit a priori (von vorneherein) bekannt.
- (ii) Sie beeinflussen die zu untersuchenden Merkmale, indem sie z.B. deren Erwartungswerte und Varianzen ändern.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

(iii) Die Anteile der verschiedenen Schichten (Klassen der Quotenmerkmale) in der Grundgesamtheit sollten nicht zu unterschiedlich sein.

“Klassische” Quotenmerkmale sind insbesondere

- das Geschlecht (binäres Merkmal),
- das Alter (meist in mehrere Altersklassen eingeteilt),
- die Größe des Haushalts (z.B. 1, 2, 3, 4, 5 und mehr).

Schichtet man nach n verschiedenen Quotenmerkmalen, spricht man auch von einer **n -stufiger Quotenauswahl**.

Eine Quotenauswahl ist vor allem bei einer Analyse mit einfachen univariaten Modellen vorteilhaft. In den multivariaten Modellen der Kapitel 10 und der diskreten Wahltheorie sind die wichtigsten Quotenmerkmale in der Regel als erklärende Variablen enthalten und eine Quotenauswahl meist entbehrlich.

Verständnisfrage:

Sind folgende Merkmale i.A. als Quotenmerkmale geeignet? Wenn nein, warum nicht?

1. Anfangsbuchstabe des Nachnamens (z.B. klassiert nach “A-L” und “M-Z”),
2. beruflicher Status (Student,erwerbstätig,arbeitslos etc),
3. Geburtsmonat,
4. Wohnort,
5. Kfz-Verfügbarkeit, Fahrrad-Verfügbarkeit,
6. Kfz-Besitz,
7. Besitz einer ÖPNV-Dauerkarte.

9.3.1. Ziehung einer geschichtete Stichprobe

Das Verfahren wird am Beispiel einer zweistufigen Schichtung vorgestellt, Verallgemeinerungen auf eine oder auf mehr als zwei Stufen sind naheliegend.

1. Festlegen des Stichprobenumfangs n
2. Ermittlung der Anteilswerte ϑ_{kl} der Elemente der Grundgesamtheit, bei denen das Quotenmerkmal 1 in der Klasse k und das Merkmal 2 in der Klasse l liegt. Die Matrix der Anteilswerte kann z.B. folgendermaßen aussehen:

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Alter \ Geschlecht	♂	♀
	0-20 J	$\vartheta_{11} = 16 \%$
20-50 J	$\vartheta_{21} = 18 \%$	$\vartheta_{22} = 15 \%$
> 50 J	$\vartheta_{31} = 20 \%$	$\vartheta_{32} = 16 \%$

Wichtig ist, dass die ϑ_{kl} möglichst *exakt* bekannt sind. Es ist insbesondere zu beachten, dass selbst offizielle Register oft erschreckend ungenau sind.⁴

- Bestimmen der Teilumfänge n_{kl} dieser Merkmalskombinationen in der Stichprobe aus der Quotenbedingung:

$$n_{kl} = n\vartheta_{kl}. \quad (9.9)$$

- Ziehung von Elementen aus der Grundgesamtheit bzw. Ziehungsgrundlage mit dem Zufallsverfahren. Anfangs sind alle Teilumfänge $n_{kl} = 0$. Nach jeder Ziehung wird die Klassenzugehörigkeit (k, l) des neuen Elements bestimmt und der entsprechende Teilumfang n_{kl} inkrementiert (um eins erhöht). Ist nun $n_{kl} > n\vartheta_{kl}$, wird das Element verworfen und die Erhöhung von n_{kl} rückgängig gemacht.
- Sind alle Quotenbedingungen erreicht, ist die Ziehung abgeschlossen.

9.3.2. Stichprobenfehler beim Quotenverfahren

Das Vorgehen wird für eine eindimensionale Schichtung (Quotenanteile ϑ_k) gezeigt; Verallgemeinerungen auf n -fache Schichtung sind naheliegend.

Das Quotenverfahren ist nur sinnvoll, wenn sich die Quotenmerkmale auf die statistischen Eigenschaften der interessierenden Merkmale auswirken. Dann hängen insbesondere die bedingten Erwartungswerte und Varianzen von der Ausprägung bzw. Klasse k des Quotenmerkmals ab:

$$\mu_k = E(Y|k), \quad \sigma_k^2 = V(Y|k), \quad (9.10)$$

wobei “ $|k$ ” für die Bedingung steht, dass das Quotenmerkmal der betrachteten statistischen Einheiten in der Klasse k liegt bzw. die Ausprägung k (z.B. weiblich oder männlich) zutrifft. Natürlich gilt dann auch

$$\mu = \sum_k \vartheta_k \mu_k, \quad (9.11)$$

⁴Beispielsweise weichen die von den Meldebehörden summierte Zahl der in Deutschland lebenden Ausländer um 600 000 bzw. fast 10% (!) von der im Ausländerzentralregister ab. Ähnlich ungenau sind z.B. die Zahlen der von einer Person tatsächlich gezeugten Kinder. Damit sind die prinzipiell gut geeigneten Quotenmerkmale “Ausländer (Y/N)” bzw. “Kinderzahl” problematisch. Selbst die Zahl der insgesamt in Deutschland lebenden Personen ist mit einem geschätzten Fehler oberhalb 1% (!) behaftet, was eine Volkszählung nur durch Abgleich der Register problematisch macht, siehe z.B. [Die Zeit 07.12.2006 Nr. 50](#).

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

während die Regeln (9.22)-(9.25) der Formel-Übersicht zu der Varianz-Summenbedingung

$$\sigma^2 = \sum_k \vartheta_k (\sigma_k^2 + (\mu_k - \mu)^2) \quad (9.12)$$

führen. Die Gesamtvarianz ist also *größer* als die Summe der Einzelvarianzen. Dies ist genau der Grund, warum eine Schichtung effektiv sein kann!

Wir betrachten zunächst für jede Schicht getrennt die Stichproben-Schätzer

$$\hat{\mu}_k = \bar{Y}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} Y_j^{(k)} \quad (9.13)$$

und wollen zunächst annehmen, dass jede Schicht für sich repräsentativ ist. Da nach Voraussetzung keine weitere Struktur innerhalb der Schicht bekannt ist, gelten für die Stichproben-Schätzer $\hat{\mu}_k$ innerhalb jeder Schicht die Beziehungen (9.5) und (9.6) der Zufallsauswahl:

$$E(\hat{\mu}_k) = \mu_k, \quad V(\hat{\mu}_k) = \frac{\sigma_k^2}{n_k}. \quad (9.14)$$

Der eigentlich wichtige Gesamt-Schätzer ist durch

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (9.15)$$

gegeben, ist also identisch zum Schätzer bei der Zufallsauswahl. Unter der Annahme, dass die Anteile ϑ_k fest und bekannt sind, lässt sich der Schätzer unter Ausnutzung der Quotenbedingung $n_k = \vartheta_k n$ und Gl. (9.13) auch schreiben als

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n_k} Y_j^{(k)} = \sum_{k=1}^K \frac{n_k}{n} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} Y_j^{(k)} = \sum_k \vartheta_k \bar{Y}_k$$

Mit den Erwartungswerten und Varianzen der schichtbezogenen Schätzer gemäß (9.14) und den Formeln (9.23) und (9.25) der Formelsammlung lassen sich die statistischen Eigenschaften des Erwartungswertschätzers berechnen:

$$E(\hat{\mu}) = \sum_k \vartheta_k \mu_k = \mu, \quad (9.16)$$

der Schätzer ist also nach wie vor erwartungstreu. Seine Varianz ist gegeben durch

$$\begin{aligned} V(\hat{\mu}) &= V\left(\sum_k \vartheta_k \hat{\mu}_k\right) \\ &= \sum_k \vartheta_k^2 V(\hat{\mu}_k) + 2 \sum_k \sum_{l < k} \vartheta_k \vartheta_l \text{Cov}(\hat{\mu}_k \hat{\mu}_l) \\ &= \sum_k \frac{\vartheta_k^2 \sigma_k^2}{n_k}. \end{aligned}$$

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Dabei wurde eine verschwindende Kovarianz bzw. Korrelation zwischen Stichprobenelementen verschiedener Schichten angenommen, was durch die auch der Quotenauswahl zugrundeliegende Zufallsauswahl gewährleistet ist. Mit der Quotenbedingung $n_k = n\vartheta_k$ erhält man schließlich

$$V^{\text{Quotenverf}}(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} \sum_k \vartheta_k \sigma_k^2. \quad (9.17)$$

Vergleich man diesen Ausdruck mit der Varianz $V^{\text{Zufall}}(\hat{\mu}) = \sigma^2/n$ des Erwartungswertschätzers bei Zufallsauswahl, so sieht man mittels der Beziehung (9.12), dass die letztere Varianz nie kleiner sein kann als die bei Quotenauswahl. Ferner wird der Unterschied besonders deutlich, wenn die Erwartungswerte μ_k stark von den Ausprägungen der Quotenmerkmale abhängen. Dieser Sachverhalt ist auch in Abb. 9.1 illustriert.

9.3.3. Schätzung von Anteilswerten mit dem Quotenverfahren

Falls das Merkmal Y eine diskrete Auswahlvariable darstellt, ihr Erwartungswert also einen Anteilswert, gilt das in Abschnitt 9.2.3 Gesagte analog. Insbesondere ist also auch in jeder Schicht die Varianz durch den Erwartungswert gegeben:

$$\sigma_k^2 = V(Y|k) = \mu_k(1 - \mu_k). \quad (9.18)$$

Abbildung 9.1 zeigt ein Beispiel einer Schichtung in zwei Klassen, wobei sich die Erwartungswerte der interessierenden Variablen Y in den Klassen stark unterscheiden ($\mu_1 = 0.05$ und $\mu_2 = 0.5$). Man sieht eine deutliche Reduktion vor allem, wenn

- Die Abweichungen innerhalb der Schichten deutlich kleiner sind als in der Grundgesamtheit insgesamt (“verhaltenshomogene Gruppen”). Dies ist nach Formel (9.12) dann der Fall, wenn sich die Mittelwerte innerhalb der Klassen deutlich unterscheiden,
- und wenn die Schichten nicht zu unterschiedliche Anteilswerte aufweisen.

Verständnisfrage:

Warum kann man die zu Formel (9.17) führende Rechnung nicht auch bei der Zufallsauswahl durchführen, indem man dort einfach anstelle der wahren Anteile ϑ_k der Schichten die in der Stichprobe vorgefundenen relativen Häufigkeiten f_k nimmt?

Antwort: Bei einer reinen Zufallsauswahl sind die Quoten nicht fest. Vielmehr spielen die relativen Häufigkeiten f_k die Rolle von (erwartungstreuen) Schätzern für die wahren Anteile, $f_k = \hat{\vartheta}_k$. Damit gilt

$$\hat{\mu} = \sum_k f_k \hat{\mu}_k = \sum_k \hat{\vartheta}_k \hat{\mu}_k$$

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Man hat also in jedem Summand *zwei* Zufallsgrößen statt einer, womit letztendlich die größere Streuung (9.6) des Schätzers der Zufallsauswahl resultiert.

Aufgabe: Studentenstadt

In einer “Studentenstadt” wie Erlangen bietet sich die Schichtung bezüglich des Quotenmerkmals “Ist der Einwohner Student?” an. Es soll die Frage der MIV-Bevorzugung anhand einer Stichprobe ($n = 2\,500$) untersucht werden. Bei den Studierende (Anteil 40 %) liege der tatsächliche (aber unbekannte und durch die Stichprobe abzuschätzende) Anteil bei 12.5% und bei den übrigen Einwohnern bei 75%.

- (a) Warum ist das gewählte Quotenmerkmal für diese Untersuchung sinnvoll?
- (b) Wie groß ist die Varianz des geschätzten Gesamtanteils der MIV-Bevorzugung, wenn man das Quotenmerkmal ignoriert und die Stichprobe durch Zufallsauswahl gewinnt?
- (c) Wie ist die geschichtete Stichprobe aufgebaut und wie groß ist ihre Stichprobenvarianz?
- (d) Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, dass die Standardabweichung des geschätzten Anteils der MIV-Bevorzugung höchstens 1% beträgt?

Lösung

- (a) Das Quotenmerkmal “Ist Student” ist
 - (i) aus der Grundgesamtheit (z.B. dem Einwohnermeldeamt) exakt bestimmbar,
 - (ii) das zu untersuchende Merkmal hängt deutlich vom Quotenmerkmal ab,
 - (iii) Die GG wird durch das Quotenmerkmal in nicht zu ungleich starke Schichten aufgeteilt. Gäbe es z.B. nur 10% Studierende, würde die Schichtung wenig Verbesserung bringen (vgl. Abb. 9.1).
- (b) Sei die “Pseudo-Variablen”⁵ $Y = 1$, falls die MIV-Bevorzugung zutrifft und

⁵Das Merkmal Y : MIV-Bevorzugung ist nominalskaliert, also qualitativ. Durch Gleichsetzen der Ausprägungen mit ganzen Zahlen, also hier $Y = 1$ falls die MIV-Bevorzugung zutrifft und 0 sonst, kann man mit den Merkmalsausprägungen rechnen, als sei das Merkmal kardinalskaliert. Dies ergibt jedoch nur in sehr eingeschränkten Kontext Sinn (hier: Errechnen von Anteilswerten), weshalb eine solche Abbildung der Merkmalsausprägungen auch Pseudovariablen heißt.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

=0 sonst. Der wahre Gesamtanteil beträgt

$$E(Y) = \mu = \vartheta_1\mu_1 + \vartheta_2\mu_2 = 0.4 * 0.125 + 0.6 * 0.75 = \underline{\underline{50\%}}.$$

Stichprobenvarianz bei Zufallsauswahl:

$$\sigma_{\text{Zufall}}^2 = \frac{\mu(1-\mu)}{n} = \underline{\underline{0.0001}}, \quad \sigma = \underline{\underline{1\%}}.$$

- (c) Die Stichprobe besteht aus $n_1 = n\vartheta_1 = 1000$ Studierende und $n_2 = n - n_1 = 1\,500$ Nicht-Studierende. Stichprobenvarianz bei Quotenauswahl:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Quoten}}^2 &= \frac{\vartheta_1\sigma_1^2 + \vartheta_2\sigma_2^2}{n} \\ &= \frac{\vartheta_1\mu_1(1-\mu_1) + \vartheta_2\mu_2(1-\mu_2)}{n} \\ &= \underline{\underline{6.25 \cdot 10^{-5}}}, \quad \sigma_{\text{Quoten}} = \underline{\underline{0.791\%}}. \end{aligned}$$

- (d) Zufallsauswahl: $n \geq 2\,500$.

Quotenauswahl:

$$\frac{\vartheta_1\mu_1(1-\mu_1) + \vartheta_2\mu_2(1-\mu_2)}{n} \leq 10^{-4} \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 1\,562}}.$$

Die Stichprobe kann bei gleicher Genauigkeit auf 62.5% des ursprünglichen Umfangs reduziert werden.

9.4. Entzerrung einer Stichprobe

9.4.1. Ursachen

Mehrere Ursachen können zu einer **Verzerrung** der Stichprobe führen, d.h. Quotenanteile, Erwartungswerte oder beides stimmt nicht mit der Grundgesamtheit überein:

- (1) Zieht man eine Stichprobe trotz bekannter Quoten mit dem Zufallsverfahren, erhält man i.A. eine **zufällige Verzerrung**: Die Stichprobe gehorcht nicht mehr den Quotenbedingungen (9.9). Dadurch werden die Aussagen zwar unschärfer, aber bezüglich der gesamten Stichprobe bleiben die Aussagen aus der Stichprobe erwartungstreu, vgl. (9.5). Dies kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass die effizienten Schätzer bei Zufalls- und Quotenauswahl dieselbe mathematische Form haben.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

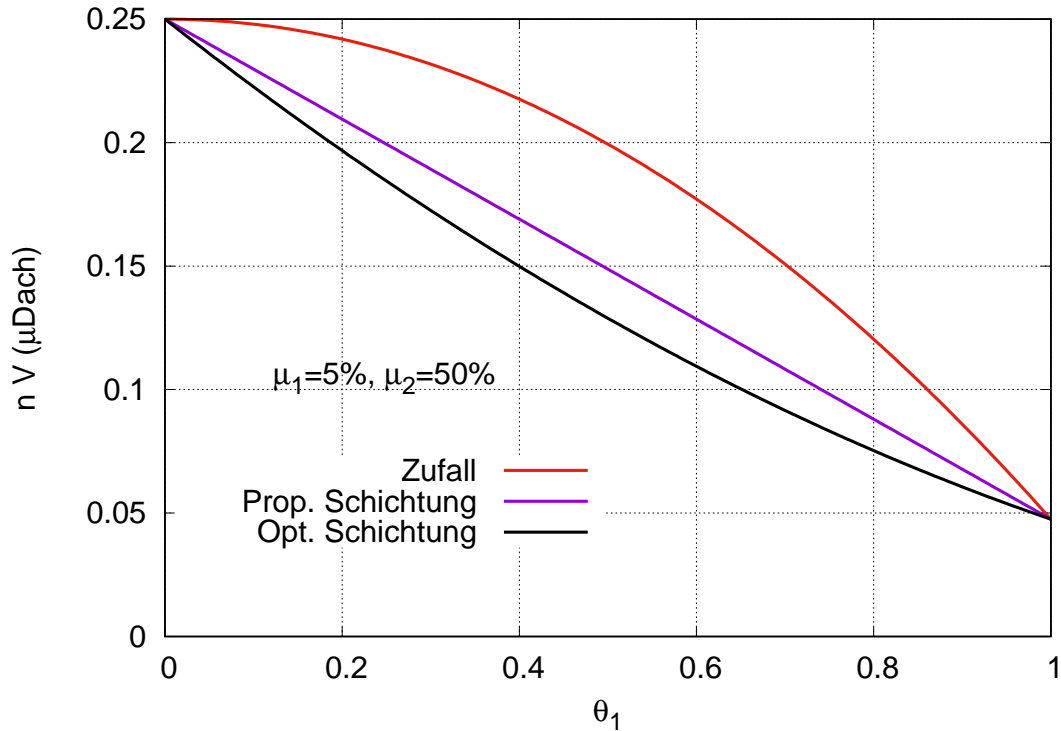


Figure 9.1.: Varianz $V(\hat{\mu})$ des Stichprobenschätzers $\hat{\mu} = \bar{Y}$ bei einstufiger Schichtung in zwei Klassen in Abhängigkeit des wahren Anteilswertes ϑ_1 der ersten Klasse für Zufallsauswahl (schwarz, gepunktet), Quotenauswahl (rot, durchgezogene Linie) und die im Anhang A.2 behandelte “optimale Schichtung” (orange, gepunktet). Als zu schätzende Größe Y wurde ein Anteilswert angenommen, wobei die wahren Werte in den beiden Schichten auf $E(Y|k=1) = \mu_1 = 0.05$ und $E(Y|k=2) = \mu_2 = 0.5$ fixiert wurden, was jedoch bei der Untersuchung nicht bekannt ist. Die Kurve für das Zufallsmodell wurde mit Formel (9.8) mit $\mu = \vartheta_1\mu_1 + \vartheta_2\mu_2$ berechnet, die Kurve für die proportionale Schichtung mit Gl. (9.17) und (9.18) und die Kurve für die optimale Schichtung, siehe A.2.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

- (2) Ist die Ziehungsgrundlage nicht identisch zur Grundgesamtheit, sondern eine Obermenge oder abgeleitete Menge, erhält man in der Regel eine bekannte bzw. **kontrollierbare systematische Verzerrung**. Besteht die Grundgesamtheit z.B. aus allen Haushalten Deutschlands und ist die Ziehungsgrundlage das Personenregister, so wird man offensichtlich bei einer Zufallsauswahl große Haushalte mit zu hoher Wahrscheinlichkeit ziehen (vgl. Abb. 9.2).
- (3) **Systematische Verzerrungen durch unvollständigen Rücklauf**: Zwischen der idealen Ziehung (z.B. mit Zufalls- oder Quotenverfahren) und der realen Stichprobe bestehen Unterschiede, da nicht alle gezogenen Personen kooperieren und die Kooperationswahrscheinlichkeit meist mit den interessierenden Merkmalen gekoppelt ist (z.B. werden vielbeschäftigte Manager die Fragebögen eher seltener beantworten; gleichzeitig haben sie ein anderes Mobilitätsverhalten als andere Gruppen).

Systematische Verzerrungen müssen auf jedem Fall korrigiert werden, da sie nicht nur die Unschärfe vergrößern, sondern auch die Stichprobe als Ganzes nichtrepräsentativ wird. Die bisherigen Schätzer sind damit nicht mehr erwartungstreu! Besteht die Ursache im Unterschied zwischen Ziehungsgrundlage und Grundgesamtheit, ist die Korrektur leicht. Ein unvollständiger Rücklauf hingegen ist in dieser Hinsicht problematischer, da i.A. Korrelationen zwischen der Bereitwilligkeit zur Antwort und den zu untersuchenden statistischen Merkmalen bestehen.

Aufgabe:

Diskutieren Sie dies am Beispiel des Mobilitätsverhaltens (=zu untersuchende Merkmale) von Managern und Rentnern und der Bereitwilligkeit dieser Gruppen, an einer Befragung teilzunehmen.

9.4.2. Durchführung der Entzerrung

Die Entzerrungsmethode ist prinzipiell für alle oben genannten Ursachen dieselbe und basiert auf der Schichtung der Grundgesamtheit bezüglich Quotenmerkmalen. Im Gegensatz zum Quotenverfahren wird jedoch nicht die *Stichprobe selbst* an die Quoten angepasst, sondern die *Stichprobenschätzer* derart durch **Entzerrungsfaktoren** modifiziert, dass sie trotz einer nichtrepräsentativer Stichprobe erwartungstreu werden.

Der erwartungstreue Schätzer des Erwartungswertes $\mu = E(Y)$ ist also nicht mehr, wie beim Zufalls- oder Quotenverfahren, das arithmetische Stichprobenmittel, sondern ein gewichtetes Mittel:

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

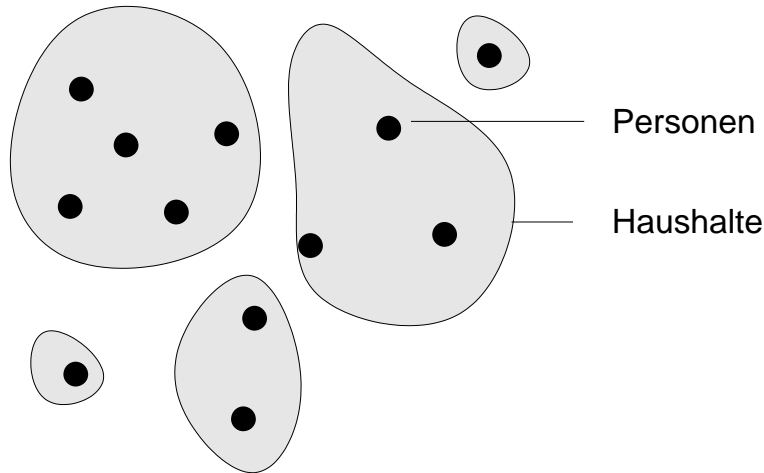


Figure 9.2.: Beispiel für eine Quelle systematischer Verzerrung: Die Ziehungsgrundlage ist das Personenregister (alle Personen), die Grundgesamtheit sollen jedoch alle Haushalte sein. Offensichtlich sind bei dieser Ziehungsmethode große Haushalte überrepräsentiert, was durch Entzerrungsfaktoren kleiner 1 korrigiert werden muss. Vgl. hierzu die Aufgabe am Ende des Abschnitts 9.4.

$$\hat{\mu}^{(E)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i Y_i \quad (9.19)$$

Die Entzerrungsfaktoren korrigieren nachträglich die nicht erfüllten Quotenbedingungen, in dem sie die in der Stichprobe vorgefundenen relativen Häufigkeiten f_k auf die realen Anteilswerte ϑ_k hochrechnen. Für eine zweistufige Schichtung in die Quotenmerkmals-Klassen k und l ergibt sich zum Beispiel

$$E_i = \frac{\vartheta_{kl}}{f_{kl}} = \frac{N_{kl}n}{n_{kl}N}, \quad k = k(i), \quad l = l(i) \quad (9.20)$$

Für jedes Element i wird also die Klassenzugehörigkeit $k(i)$ bezüglich Quotenmerkmal 1 und $l(i)$ bezüglich Merkmal 2 ermittelt und dann die "falschen" relativen Häufigkeiten $f_{kl} = n_{kl}/n$ auf die tatsächlichen Quotenanteile ϑ_{kl} in der Grundgesamtheit hochgerechnet.

9.4.3. Statistische Eigenschaften der Entzerrung

Die Stichprobe wird i.A. *nicht* mehr als repräsentativ vorausgesetzt, für ein Stichprobenelement i gilt also i.A. $E(Y_i) \neq \mu$. Es soll aber nach wie vor gelten, dass

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

innerhalb jeder Schicht die Stichprobe repräsentativ ist, das arithmetische Mittel $\hat{\mu}_k = \bar{X}_k$ also den erwartungstreuen und effizienten Schätzer darstellt.

Verständnisfrage:

Machen Sie sich klar, dass diese Voraussetzung bei den Verzerrungsursachen (1) und (2) des Abschnitts 9.4.1 erfüllt ist, bei der Verzerrungsursache (3) aber problematisch ist.

Die folgende Betrachtung gilt für eine eindimensionale Schichtung in die Klassen k mit wahren Anteilswerten ϑ_k , ist aber leicht auf mehrstufige Schichtungen verallgemeinerbar. Mit dem Schätzer für den Erwartungswert einer Schicht,

$$\hat{\mu}_k = \bar{Y}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} Y_j^{(k)}$$

kann man $\hat{\mu}^{(E)}$ ausdrücken als

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^{(E)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i Y_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_k \sum_{j=1}^{n_k} E_k Y_j^{(k)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_k E_k n_k \hat{\mu}_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_k \frac{\vartheta_k}{f_k} n_k \hat{\mu}_k \\ &= \sum_k \vartheta_k \hat{\mu}_k, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $f_k = n_k/n$ eingesetzt wurde.

Erwartungswert

Nach Voraussetzung gilt in jeder Schicht Repräsentativität, also $E(\hat{\mu}_k) = \mu_k$ und damit mit (9.11)

$$E(\hat{\mu}^{(E)}) = \sum_k \vartheta_k E(\hat{\mu}_k) = \sum_k \vartheta_k \mu_k = \mu.$$

Das entzerrte Stichprobenmittel $\hat{\mu}^{(E)}$ ist also erwartungstreu!

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Varianz

Mit verschwindender Kovarianz zwischen den einzelnen Schichten (vgl. Herleitung der Varianz des geschichteten Stichprobenmittels) ergibt sich

$$\begin{aligned}V(\hat{\mu}^{(E)}) &= \sum_k \vartheta_k^2 V(\hat{\mu}_k) \\ &= \sum_k \vartheta_k^2 \frac{\sigma_k^2}{n_k} \\ &= \sum_k \vartheta_k^2 \frac{\sigma_k^2}{n f_k}\end{aligned}$$

und mit $f_k = \vartheta_k/E_k$ schließlich

$$V(\hat{\mu}^{(E)}) = \frac{1}{n} \sum_k \vartheta_k E_k \sigma_k^2 \quad (9.21)$$

9.4.4. Diskussion: Entzerrung oder Schichtung?

Die mit dem entzerrenden Schätzer $\hat{\mu}^{(E)}$ geschätzten Mittelwerte sind erwartungstreu und haben außerdem eine Varianz, welche nahezu der der geschichteten Stichprobe entspricht, ja sogar kleiner sein kann (die Ausdrücke (9.21) und (9.17) sind bis auf die Entzerrungsfaktoren E_k , welche sowohl kleiner als auch größer als 1 sein können, dieselben). Vg. hierzu Abb. 9.3. Außerdem werden automatisch die meisten systematischen Verzerrungen mitberücksichtigt. Deshalb verzichtet die Erhebung SrV auf eine geschichtete Stichprobe, wertet aber die Zufalls-Stichprobe mit entzerrenden Schätzern aus.

Fazit: Allgemein führt die Anwendung der Entzerrung sowohl bei zufälligen wie auch bei systematischen Verzerrungen zu erwartungstreuen Schätzern, selbst wenn die Natur der Verzerrung (zufällig oder systematisch oder beides) nicht bekannt ist. Unabhängig von der Ziehungsmethode der Stichprobe wird außerdem fast immer die Trennschärfe erhöht, so dass man Entzerrung prinzipiell immer anwenden sollte. Als einzige Bedingung wird eine genaue Kenntnis der Quotenanteile in der Grundgesamtheit gefordert. Die Erlangung dieser Kenntnis ist eine der wichtigsten Gründe für Volkszählungen.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

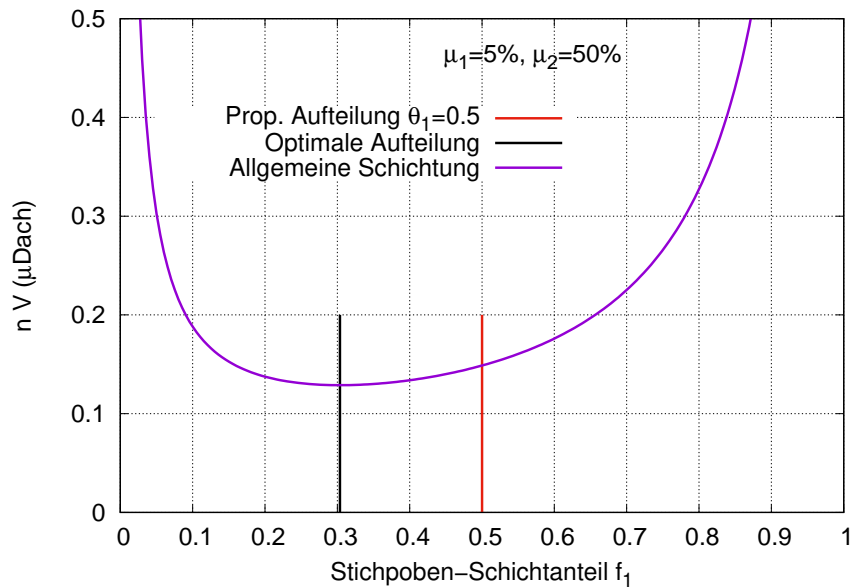


Figure 9.3.: Varianz (9.21) bei Einsatz der Entzerrung (9.19) mit (9.20) als Funktion eines variablen Stichprobenanteils f_1 bei einer festen Quote $\vartheta_1 = 0.5$ in der Grundgesamtheit. Wie in Abb. 9.1 ist die zu schätzende Größe in den einzelnen Schichten mit $\mu_1 = 0.05$ und $\mu_2 = 0.5$ angenommen, was jedoch bei der Untersuchung nicht bekannt ist. Die auf der x -Achse aufgetragenen unterschiedlichen Stichprobenanteile können dabei von zufälligen, systematischen oder gewollte Verzerrungen herrühren. Im Falle einer Zufallsauswahl wird f_1 in der Nähe von $\vartheta_1 = 0.5$ liegen und damit ähnliche Genauigkeiten wie bei der geschichteten Stichprobe erreicht. Bei der optimalen Aufteilung (Anhang A.2) wird die Stichprobe absichtlich verzerrt, so dass nach der anschließenden Entzerrung die Varianz des Schätzers bei gegebenem Stichprobenumfang minimal ist. Zum Vergleich: Die mit n multiplizierte Stichprobenvarianz bei Zufallsauswahl ist nach Gl. (9.8) mit $\mu = \vartheta_1\mu_1 + \vartheta_2\mu_2 = 0.275$ ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0.5$) durch $nV(\hat{\mu}) = 0.199$ gegeben.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Aufgabe:

Die Stichprobe aus der Studentenstadt von Abschnitt 9.3 zur Ermittlung der MIV-Bevorzugung wird nun mit Zufallsauswahl durchgeführt und dabei zufällig 1 050 Studierende (statt der durch die Quotenbedingung festgelegten 1 000 Studierende) sowie 1 450 Nichtstudierende gezogen. Wie groß sind die Entzerrungsfaktoren und die Standardabweichung des entzerrenden Schätzers für die MIV-Bevorzugung?

Lösung Entzerrungsfaktoren für Studierende ($k = 1$) und Nichtstudierende ($k = 2$) mit $\vartheta_1 = 0.4$ und $\vartheta_2 = 0.6$, $n_1 = 1050$ und $n_2 = 1450$:

$$E_1 = \frac{\vartheta_1}{f_1} = \frac{n\vartheta_1}{n_1} = \frac{20}{\underline{\underline{21}}}, \quad E_2 = \frac{\vartheta_2}{f_2} = \frac{30}{\underline{\underline{29}}}.$$

Varianz des entzerrenden Schätzers (mit $\mu_1 = 0.125$ und $\mu_2 = 0.75$):

$$V(\hat{\mu}^{(E)}) = \frac{1}{n} \left[\vartheta_1 E_1 \mu_1 (1 - \mu_1) + \vartheta_2 E_2 \mu_2 (1 - \mu_2) \right] = \underline{\underline{6.32 * 10^{-5}}}$$

Dies entspricht einer Standardabweichung von 0.795% und ist nahezu identisch zum Ergebnis des Quotenverfahrens, aber deutlich trennschärfer als das Zufallsverfahren ohne Entzerrung.

Optimale Aufteilung

Schließlich ist noch die “optimale Aufteilung” der Schichten einer Stichprobe zu erwähnen, bei der Quotenauswahl und Entzerrung so kombiniert werden, dass bei gegebenem Stichprobenumfang die Stichprobenvarianz des effizienten Schätzers minimal wird. Allerdings stehen die Ergebnisse meist nicht in Relation zum Mehraufwand bei der Ziehung. Näheres dazu lässt sich im Anhang A.2 finden, vgl. auch Abb. 9.3.

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Aufgabe: Personen und Haushalte

In einer Stadt gibt es 50% Einpersonenhaushalte, 20% mit zwei Personen, 12% mit drei Personen, 10% mit vier Personen sowie 8% mit mehr als vier (im Mittel 6) Personen. Eine Stichprobe ($n = 1\,000$) wird mit dem Zufallsverfahren aus dem Personenregister dieser Stadt gezogen. Dabei erhielt man 222 Personen, welche in 1-Personen-Haushalten leben. Die anderen Haushaltsgrößen waren mit 228 (zwei), 150 (drei), 180 (vier) und 220 (fünf oder mehr Personen) vertreten.

- (a) Wie lauten die Entzerrungsfaktoren bezüglich der Haushaltsgrößen, wenn die Grundgesamtheit aus allen Einwohnern dieser Stadt bestehen soll?
- (b) Wie lauten die Entzerrungsfaktoren, wenn anstattdessen alle Haushalte dieser Stadt betrachtet werden sollen?
- (c) Welche relativen Stichprobenanteile an den verschiedenen Haushaltsgrößen werden im Mittel bei sehr häufiger Ziehung der Stichprobe nach obigem Schema erwartet? Wie sind dann die Entzerrungsfaktoren bei Haushalts-Betrachtungen?
- (d) Bei der SrV läuft die Ziehung modifiziert ab: Zufallsverfahren aus dem Einwohner-Register, aber bei Mehrpersonen-Haushalten werden auch alle anderen Haushaltsmitglieder mit einbezogen. Welche Entzerrungsfaktoren erwartet man nun, falls alle Personen die Grundgesamtheit darstellen?

Lösung Die Lösungen der Teilaufgaben kann man kompakt in eine Arbeitstabelle schreiben, die einzelnen Spalten werden bei den einzelnen Aufgabenteilen erklärt.

Klasse	ϑ_k	y_k	h_k^P	f_k^P	ϑ_k^P	$E_k^P = \frac{\vartheta_k^P}{f_k^P}$	$E_k = \frac{\vartheta_k}{f_k}$
1-Pers.	0.50	1	222	0.222	0.234	1.05	2.25
2-Pers.	0.20	2	228	0.228	0.187	0.82	0.88
3-Pers.	0.12	3	150	0.150	0.168	1.12	0.80
4-Pers.	0.10	4	180	0.180	0.187	1.04	0.56
≥ 5 -Pers.	0.08	6	220	0.220	0.224	1.02	0.36

Die statistische Einheit sind die Personen. Die Ausprägungen des Quotenmerkmals (Spalte 1) lauten "die Person lebt in einem Haushalt der Größenklasse k ". Zunächst werden in der Arbeitstabelle die in der Aufgabenstellung gegebenen Angaben aufgelistet: Die tatsächlichen Anteile ϑ_k der Haushaltsgrößenklassen k , bezogen auf die Gesamtzahl der Haushalte (nicht der Personen!), die mittlere Zahl

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

y_k der Personen in der Größenklasse k , sowie die absoluten Stichprobenhäufigkeiten h_k^P . Ein Superskript "P" bedeutet dabei, dass sich die jeweilige Größe auf die Grundgesamtheit "alle Personen dieser Stadt" bezieht, während sich Größen ohne Superskript auf die Grundgesamtheit "alle Haushalte dieser Stadt" beziehen.

- (a) Um die Entzerrungsfaktoren

$$E_k^P = \vartheta_k^P / f_k^P$$

bezüglich der Grundgesamtheit "alle Personen" zu berechnen, muss man zunächst die Anteile ϑ_k^P bezüglich dieser Grundgesamtheit kennen. Es gilt (mit N der Zahl der Haushalte in der Grundgesamtheit)

$$\vartheta_k^P = \frac{\text{Zahl der Personen in Haushaltsklasse } k}{\text{Gesamtzahl der Personen}} = \frac{N \vartheta_k y_k}{\sum_{k'} N \vartheta_{k'} y_{k'}} = \frac{\vartheta_k y_k}{\bar{y}}.$$

Mit

$$\bar{y} = \sum_k \vartheta_k y_k = 2.14$$

und den empirischen relativen Häufigkeiten $f_k^P = h_k^P / n = h_k^P / 1000$ ergeben sich somit die Spalten ϑ_k^P und $E_k^P = \frac{\vartheta_k^P}{f_k^P}$ der Tabelle. Da die Ziehungsgrundlage in diesem Aufgabenteil mit der Grundgesamtheit identisch ist, weichen die Entzerrungsfaktoren, wie erwartet, nur geringfügig von 1 ab. Sie korrigieren hier lediglich zufällige Verzerrungen.

- (b) Bei Haushalten als Grundlage der statistischen Gesamtheit ändert sich in der Entzerrungsformel gegenüber Aufgabenteil nur der Zähler, der hier direkt den tatsächlichen Anteilen ϑ_k der Größenklassen bezüglich aller Haushalte entspricht:

$$E_k = \frac{\vartheta_k}{f_k^P}.$$

Da hier Ziehungsgrundlage und Grundgesamtheit nicht übereinstimmen, weichen die Entzerrungsfaktoren wesentlich von 1 ab und korrigieren sowohl zufällige als auch systematische Verzerrungen. Vgl. hierzu auch die Abb. 9.2.

- (c) Die erwarteten Stichprobenanteile bei einer auf Personen basierenden Ziehung sind einfach gegeben durch

$$E(h_k^P) = n \vartheta_k^P = 1000 \vartheta_k^P,$$

also $E(h_1^P) = 234$ etc.

Die Korrekturfaktoren E_k^{sys} allein der systematische Verzerrung sind damit gegeben durch

$$E_k^{\text{sys}} = \frac{\vartheta_k}{\vartheta_k^P} = \frac{\bar{y}}{y_k}$$

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

mit den Ergebnissen

$$E_1^{\text{sys}} = 2.14, \quad E_2^{\text{sys}} = 1.07, \quad E_3^{\text{sys}} = 0.71\bar{3}, \quad E_4^{\text{sys}} = 0.53\bar{5}, \quad E_5^{\text{sys}} = 0.35\bar{6}.$$

Im Vergleich mit E_k sieht man sehr schön dieselbe Größenordnung. Da aber die zufälligen Anteile nicht berücksichtigt werden, liegt E_k^{sys} mal über und mal unterhalb den Werten für E_k .

- (d) Hier sind die Verhältnisse genau umgekehrt: Da diese Ziehungsmethodik effektiv der Ziehung von Haushalten und nicht von Personen entspricht, sind die relativen Häufigkeiten $f_k = h_k/n$ und nicht $f_k^{\text{P}} = h_k^{\text{P}}/n$ gegeben. An den Entzerrungsformeln ändern sich lediglich die Nenner. Bei Bezug auf Personen erhält man also die Entzerrungsfaktoren $E_k^{\text{P}} = \frac{\vartheta_k^{\text{P}}}{f_k}$. Hier erwartet man $E_k^{\text{P}} < 1$ (> 1) für kleine (große) Haushalte. Insbesondere ist der Korrekturfaktor der systematischen Entzerrung genau der Kehrwert des in Aufgabenteil (c) berechneten systematischen Entzerrungsfaktors.

9.5. Qualitative Stichprobenziehung

Von allen bisherigen, in der Ökonometrie/Statistik im engeren Sinne eingesetzten Ziehungsmethoden ist der Begriff der “qualitativen Stichprobenziehung” zu unterscheiden. Dieses Ziehungsdesign wird vor allem in den Sozialwissenschaften angewandt und bedeutet eine subjektive, zur jeweiligen Fragestellung passende Auswahl. Damit ist sie i.A. weder repräsentativ noch sind damit (z.B. durch Entzerrung) repräsentative Aussagen zu bekommen. Sinn ergibt dies nur

- bei aus Personen bestehenden Stichproben,
- wenn im Schwerpunkt auch qualitative (nominalskalierte oder ordinalskalierte) Merkmale befragt werden, am besten in offener Fragestellung.

Ist man z.B. an Verbesserungsvorschlägen interessiert (=in offener Fragestellung erhobene nominalskalierte Merkmale), ist es sicherlich sinnvoll, subjektiv die kompetentesten, kooperativsten oder engagiertesten Leute/Mitarbeiter/Studierende etc auszuwählen.

Im Gegensatz dazu sind alle anderen hier vorgestellten Stichprobenziehungsmethodiken, ob nun Zufall- Quoten- Klumpen- oder systematische Auswahl, eindeutig quantitative Ziehungsmethoden. Wann immer man auch quantitative (kardinalskalierte) Merkmale seriös analysieren/auswerten will (also Statistik im engeren Sinne betreiben will), ist eine quantitative Stichprobe Pflicht. Bei rein qualitativen Fragestellungen hingegen kann eine qualitative Stichprobenauswahl bei gleichen Stichprobenumfang oft aussagekräftiger sein

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

9.6. Verwendete Symbole und nützliche Formeln

Y (“groß Y ”)	Wert des zu untersuchenden Merkmals (Merkmalsausprägung) als <i>Zufallsvariable</i> in der Grundgesamtheit (GG)
Y_i	Merkmalsausprägung als Zufallsvariable beim Stichprobenelement i
y_i (“klein y_i ”)	Merkmalsausprägung als <i>konkreter realisierter Zahlenwert</i> beim Stichprobenelement i
n, N	Umfang von Stichprobe und Grundgesamtheit
$\mu = E(Y)$	Wahrer Erwartungswert (“Mittelwert”) in der GG
$\sigma^2 = E[(Y - \mu)^2]$	Varianz von Y in der GG
$V(Y)$	Varianz $E[(Y - E(Y))^2]$ bei allgemeinen Zufallsvariablen Y
$\text{Cov}(Y_1, Y_2)$	Kovarianz $E[(Y_1 - E(Y_1))(Y_2 - E(Y_2))]$ zweier Zufallsvariablen Y_1 und Y_2
\hat{Y}	Stichproben-Schätzer für die allgemeine Zufallsvariablen Y . Ein Beispiel für \hat{Y} ist das arithmetische Mittel $\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_i Y_i$
$\vartheta_k, \vartheta_{kl}$	Wahrer Anteil der verschiedenen Ausprägungen der Schichtungsmerkmale bei ein- und zweistufiger Schichtung
E_k, E_{kl}	Entzerrungsfaktoren für Erwartungswert-Schätzer
$f_k = \frac{n_k}{n}$	Relative Stichprobenhäufigkeit der Ausprägungen des Schichtungsmerkmals
μ_k, σ_k^2	Erwartungswert und Varianz des betrachteten Merkmals Y in Schicht k
$\hat{\mu}^{(E)}$	Erwartungswert-Schätzer mit Entzerrung

Allgemeine Formeln für Erwartungswerte

Es seien Y und Z Zufallsvariable und a und b Zahlenwerte. Dann gilt

$$E(aY + b) = aE(Y) + b, \quad (9.22)$$

$$E(aY + bZ) = aE(Y) + bE(Z), \quad (9.23)$$

$$V(aY + b) = a^2V(Y), \quad (9.24)$$

$$V(aY + bZ) = a^2V(Y) + b^2V(Z) + 2ab\text{Cov}(Y, Z). \quad (9.25)$$

9. Stichprobentheorie und Stichprobendesign

Hinweis: Verwechseln Sie nicht das Symbol $E(\dots)$ für den Erwartungswert mit den Entzerrungsfaktoren E_k .

10. Stetige ökonomische Modelle

In diesem Kapitel werden Sachverhalte bzw. entsprechende ökonomische Modelle betrachtet, in denen die abhängige bzw. endogene bzw. erklärte Variable Y stetiger Natur ist. Diskrete abhängige Variable, welche im Verkehrskontext typischerweise die Ergebnisse von Wahlentscheidungen darstellen, werden in der Master-Vorlesung beschrieben. Aus prinzipiellen Gründen sind Modelle diskreter Variablen immer nichtlinearer Natur. Im Falle stetiger abhängiger Variablen hingegen ergeben lineare Modelle einen Sinn und werden weitaus häufiger angewandt als nichtlineare Modelle. Neben den für alle stetigen Modelle gültigen allgemeinen Kapitel 10.1 - 10.3 werden nichtlineare Modelle deshalb nur kurz im Abschnitt 10.8 angesprochen.

10.1. Struktur der Gleichungen

Wir betrachten *eine* abhängige bzw. erklärte Variable Y , welche von i. A. mehreren unabhängigen bzw. erklärenden Variablen $x_m, m = 1, \dots, M$, beschrieben wird. Ferner schließen wir eine Rückkopplung aus. In diesem Fall stellt die Beschränkung auf eine abhängige Variable, also auf sogenannte **Eingleichungsmodelle**, keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, da man ggf. für jede abhängige Variable ein eigenes Modell definieren kann. Ferner drücken wir alle durch das Modell nicht erklärten Einflüsse durch einen zusätzlichen additiven Störterm bzw. nicht erklärten Term aus, der meist als Zufallsschwankung angenommen wird. Die obige Annahmen ergeben (i. A. nichtlineare) Modelle folgender Form:

$$Y = \hat{y} + \epsilon = f(x_1, \dots, x_M, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_J) + \epsilon. \quad (10.1)$$

Hierbei bezeichnet/bezeichnen

- Y die abhängige (bzw. erklärte bzw. endogene) Variable. Um ihre Natur als Zufallsvariable zu verdeutlichen, wird sie gemäß allgemeiner Konvention "groß" geschrieben.
- $f(\cdot) = \hat{y}(\cdot)$ die Modellfunktion,
- $x_m, m = 1, \dots, M$ die unabhängigen (bzw. erklärenden bzw. exogenen) Variablen. Diese werden als bekannt bzw. kontrollierbar angenommen, so dass sie keinen Zufallsanteil besitzen und konsequenterweise "klein" geschrieben werden,

10. Stetige ökonomische Modelle

- $\beta_j, j = 0, \dots, J$ die **Modellparameter**, deren **Schätzung** bzw. **Kalibrierung** Hauptgegenstand dieses Kapitels ist,
- und ϵ den “Residualterm”, welcher summarisch alle durch $f(\dots)$ nicht erklärten Anteile bzw. Zufallseinflüsse enthält.

Der nicht erklärte Teil ϵ resultiert im Wesentlichen aus folgenden Gründen:

- Der Sachverhalt enthält explizite Zufallselemente.
- Die zu beschreibenden statistischen Einheiten sind heterogener Natur, müssten also eigentlich durch individuelle Parametersätze beschrieben werden.
- Nicht alle exogenen (bzw. unabhängigen bzw. erklärenden) Variablen sind bekannt oder im Modell enthalten. In diesem Fall sagt man auch, dass Problem sein **fehlspezifiziert**.
- Das mathematische Modell selbst ist nicht exakt zutreffend.

Die ersten beiden Einflussfaktoren führen zu im Allgemeinen unkorrelierten stochastischen Residualtermen, deren Erwartungswert o.E.d.A. nullgesetzt werden kann. Die letzten beiden Einflüsse hingegen resultieren in Korrelationen und deterministischen Anteilen bei den Residualtermen. Dies kann zu falschen Schlussfolgerungen bis hin zur Unbrauchbarkeit des jeweiligen Modells führen.

Im Folgenden werden stochastische Residualterme mit verschwindendem Erwartungswert angenommen, die außerdem unabhängig und identisch verteilt sind, was man auch als **i.i.d.**: *Independent and identically distributed* bezeichnet. Daraus folgt insbesondere bezüglich der verschiedenen Realisierungen i eine verschwindende Kovarianz (Unabhängigkeit ist ja hinreichend für verschwindende Korrelationen!) und eine gleichbleibende Varianz, was auch als **Homoskedastizität** bezeichnet wird:

$$E(\epsilon_i) = 0, \quad E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0 \text{ falls } i \neq j, \quad E(\epsilon_i^2) = \sigma_\epsilon^2. \quad (10.2)$$

Diese Bedingungen sind ein Teil der in Abschnitt 10.5.1 näher spezifizierten **Gauß-Markow-Annahmen**. Wichtig ist, dass der Zufallsterm ϵ nicht Teil des ökonomischen Modells ist, sondern vielmehr eine kontrollierte Minimierung von Fehlertermen und damit eine Anpassung bzw. **Kalibrierung** der Modellparameter ermöglicht. Bei den *Discrete-Choice*-Modellen des folgenden Kapitels hingegen wird der Zufallsanteil in Form eines *Zufallsnutzens* Teil der Modelle sein.

10.2. Vorgehen bei der ökonomischen Untersuchung

10.2.1. Ablauf bei vorgegebenem Modell

Liegt ein bewährtes Modell vor, welches nicht weiter hinterfragt werden muss (oder ein Softwarepaket, bei dem man an den Modellen nicht “drehen” kann), so läuft die allgemeine ökonomische Untersuchung in zwei Schritten ab:

10. Stetige ökonomische Modelle

1. **Analyse:** Diese beinhaltet
 - a) Die **Datenbeschaffung** für den zu untersuchenden Sachverhalt, meist in Form einer Stichprobe (Kap. 8 und 9),
 - b) die **Kalibrierung** des Modells bzw. **Parameterschätzung**, also die Anpassung der Modellparameter auf Werte, mit denen das Modell die im vorhergehenden Schritt erhobenen Daten am besten beschreibt (Abschnitt 10.3),
 - c) den **Belastbarkeitstest** der Aussagen: Hierbei wird mit statistischen Mitteln (Signifikanztests) untersucht, ob die im Wesentlichen in den Beträgen und Vorzeichen der geschätzten Modellparameter enthaltenen Aussagen **signifikant** sind, also nicht durch den Zufall entstanden sein können.
2. Anwendung bzw. **Prognose:** Das kalibrierte Modell wird mit unveränderten Parameterwerten auf neue Systeme bzw. auf dasselbe System in der Zukunft angewandt.

Das Ergebnis einer ökonomischen Untersuchung besteht zum Einen in den vom Modell im Anwendungs- bzw. Prognosefall vorausgesagten endogenen Variablenwerten. Zum Anderem geben auch die Beträge und Vorzeichen der kalibrierten Modellparameter oft relevante Aussagen.

Beispiel: Im Rahmen der Verkehrsplanung werden in der Analysephase die Modellparameter (spezifische Verkehrsaufkommen, Parameter der Bewertungsfunktionen, β -Parameter des Logitmodells, Parameter der CR-Funktionen, ...) anhand gemessener Verkehrsaufkommen und Verkehrsaufteilungen angepasst. Mit diesen angepassten Parametern kann anschließend das Verkehrsaufkommen nach Durchführung einer Planungsmaßnahme prognostiziert werden.

10.2.2. Modellentwicklung und Validierung

Liegt kein verlässliches Modell vor oder hat man Zweifel an der Gültigkeit der infrage kommenden Modelle, muss man die Untersuchung mit einer *Modellentwicklung* koppeln und die Modelle *selbst* (nicht nur die aus ihnen gewonnenen Aussagen) testen. Dies wird auch als **Modellvalidierung** bezeichnet.

Hierbei wird eine Aussage bzw. Prognose *simuliert*, also das kalibrierte Modell mit unveränderten Modellparametern auf neue Systeme (ähnliche Sachverhalte bzw. derselbe Sachverhalt für andere Zeitpunkte bzw. Zeiträume) angewandt. Im Gegensatz zur eigentlichen Anwendung/Prognose sind im Zielsystem allerdings alle Daten bekannt, insbesondere die der endogenen Variablen. Bei der Validierung werden die vorausgesagten und tatsächlichen Werte verglichen und getestet, ob sich die Abweichungen in vertretbaren Grenzen hält bzw. ob sie sich gegenüber der Kalibrierung stark erhöht haben. Ein wichtiges Kriterium für gute Modelle ist

10. Stetige ökonomische Modelle

außerdem ihre **Robustheit**: Hierbei wird das Modell auf die neuen Daten kalibriert und die geschätzten Modellparameter mit denen der “alten” Kalibrierung verglichen. Je weniger Abweichungen man findet, desto robuster und aussagekräftiger ist das Modell.

Ist man mit dem Ergebnis der Validierung nicht zufrieden, muss das Modell entsprechend modifiziert werden, worauf sich ein neuer Zyklus aus Kalibrierung/Validierung und ggf. neuer Datenbeschaffung anschließt.

Ein Spezialfall der Validierung stellt der sogenannte **Back-Test** dar, bei welchem zum selben Sachverhalt Test-Daten (Stichproben) für mehrere Zeitpunkte bzw. Zeiträume vorliegen. Nur ein Teil dieser Daten wird zur Kalibrierung verwendet, der andere zur Validierung.

Beispiel: Liegen die Mobilitätsdaten einer Stadt jährlich für die Jahre 2001-2008 vor, kann man die Daten von 2001-2007 für die Kalibrierung und das Jahr 2008 für die Validierung heranziehen (Back-Test). Man kann zur Validierung auch die Daten einer anderen Stadt derselben Grundgesamtheit (z.B. westdeutsche Großstadt) verwenden.

10.3. Modellkalibrierung

Eine Modellkalibrierung, d.h. Schätzung der Modellparameter durch Vergleich der Modellaussagen mit den Daten, kann wegen der unvermeidlichen nichterklärten Elemente nicht zum Ziel haben, eine *exakte* Übereinstimmung des Modells mit den Daten zu liefern. Vielmehr gilt es, durch Variation der Modellparameter ein noch zu definierendes Fehlermaß zu minimieren (Regression) bzw. die Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen bei gegebenen Beobachtungen zu maximieren (Maximum-Likelihood-Methode).

Zur Durchführung der Kalibrierung werden $n > J + 1$ Messungen bzw. Beispielsinstanzen des zu beschreibenden Sachverhalts als Stichprobe vorausgesetzt. Jedes Element i der Stichprobe bzw. Messung i enthält dabei folgenden Satz von Größen:

- den Wert y_i der abhängigen bzw. erklärten Variablen bei der Messung i ,
- die dazugehörigen Messwerte x_{mi} der erklärenden Variablen x_m ,
- möglichst auch noch Merkmalsausprägungen weiterer möglicherweise relevanter Variablen, mit denen man das Modell bei Bedarf erweitern kann.

Wendet man das **abstrakte Modell** 10.1 auf die n Datensätze $\{(y_i, x_{1i}, \dots, x_{Mi})\}$ der Stichprobe an, erhält man die **Systemgleichungen**

$$y_i = f(x_{1i}, \dots, x_{mi}, \dots, x_{Mi}, \beta_0, \dots, \beta_j, \dots, \beta_J) + \epsilon_i := \hat{y}_i + \epsilon_i. \quad (10.3)$$

Diese Gleichungen stellen wegen $n > J + 1$ ein *überbestimmte* Gleichungssystem dar, welches manchmal auch als **Populationsmodell** (da das abstrakte Modell mit

10. Stetige ökonomische Modelle

Daten “bevölkert” wird) bzw. als Satz von **Mess-Gleichungen** bezeichnet wird:¹

Verständnisfrage:

Warum ist ein überbestimmtes Gleichungssystem in diesem Fall erwünscht und notwendig?

Wegen der Überbestimmtheit lässt sich dieses System nicht exakt lösen, sondern es kann nur die verbleibende Rest-ungenauigkeit minimiert werden. Darauf begründen die zwei wichtigsten Methoden zur Modellkalibrierung, die **Methode der kleinsten Fehlerquadrate** (Regressionsmethode) und die **Maximum-Likelihood-Methode**. Beide Methoden stehen zueinander in Beziehung.² Im allgemeinen multivariaten Fall mit korrelierten stochastischen Störgrößen ist die Maximum-Likelihood-Methode jedoch aussagekräftiger, aber auch unanschaulicher.³ Für Modelle mit diskreten endogenen Variablen wie diskrete Wahlmodelle ist nur die Maximum-Likelihood-Methode sinnvoll. Diese wird aber erst in der vertiefenden Methoden-Vorlesung des Master-Studiums behandelt. In diesem Kapitel wird hingegen die Regressionsmethode angewandt.

10.3.1. Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Bei dieser, englisch auch als *Least Squares* (LQ) bzw. *Least squared errors* (LSE) oder als *Regressionsrechnung* bezeichneten Methode wird die Fehlerquadratsumme als Funktion der Menge $\{\beta_j\}$ der Parameterwerte β_0, \dots, β_J betrachtet:

$$S(\{\beta_j\}) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}(x_{1i}, \dots, x_{Mi}; \beta_0, \dots, \beta_J)]^2, \quad (10.4)$$

und bezüglich der Parameter minimiert. Als notwendige Bedingungen für das Minimum müssen alle Ableitungen verschwinden, $\frac{dF}{d\beta_j} = 0$. Aufgrund der speziellen Struktur von (10.4) (Summe von Quadraten) kann man in diesem Fall sogar zeigen, dass die Bedingungen verschwindender Ableitungen hinreichend sind und im linearen Fall darüberhinaus ein eindeutiges Ergebnis liefern. Dies ergibt $J + 1$ im Allgemeinen nichtlineare Gleichungen für die $J + 1$ unbekannt Parameterwerte. Eine analytische Lösung ist nur in Ausnahmefällen möglich. Wegen der aber

¹Man beachte, dass hier y_i den Wert *einer* erklärten Variablen Y bei der Messung i bezeichnet, also eine feste Zahl und deshalb auch “klein” geschrieben. Hingegen bezeichnet der Index k im allgemeinen Modell (1.1) die k -te unabhängige Variable. Man muss also sorgfältig Systemgleichungen von Modellgleichungen unterscheiden.

²Im Falle gaußverteilter und unabhängiger Störterme sind die Ergebnisse dieselben.

³Berechnet und analysiert man auch die Matrix der zweiten Ableitungen der Fehlerquadratsumme (Hesse-Matrix), so erhält man auch im Falle korrelierter gaußverteilter Zufallsgrößen identische Aussagen. Dies wird hier jedoch nicht weiter behandelt.

10. Stetige ökonomische Modelle

meist “gutmütigen” Nichtlinearität ist jedoch eine numerische Nullstellensuche, beispielsweise durch das **Newton-Raphson-Verfahren**, meist möglich.

Mit Hilfe der dadurch minimierten Fehlerquadratsumme S_{\min} lässt sich anschließend auch die Stärke des stochastischen Beitrags, d.h. die **Residualvarianz** σ_ϵ^2 abschätzen:

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{S_{\min}}{n - J}, \quad (10.5)$$

und damit auch ein Maß für die Güte des Modells gewinnen: Je näher das **Bestimmtheitsmaß**

$$B = 1 - \frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{s_y^2}, \quad s_y^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (10.6)$$

an den Maximalwert $B = 1$ herankommt, desto besser ist das Modell.

Aufgabe: Trivialmodell

In einem “Trivialmodell” ist die deterministische Teil der endogenen Variable durch die Gleichung

$$\hat{y} = a$$

mit dem Modellparameter a gegeben. Wie lautet der Ausdruck für den kalibrierten Wert von a als Funktion der y_i und x_{ji} ? Geben Sie auch die Ausdrücke für die Residualvarianz und das Bestimmtheitsmaß an. Welche Bedeutung hat die Residualvarianz in diesem Fall?

Lösung

Die Minimierung der Fehlerquadratsumme führt auf $a = \bar{y}$. Daraus ergibt sich mit (10.5) und (10.6) $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = s_y^2$, also das Bestimmtheitsmaß $B = 0$. Das Bestimmtheitsmaß gibt also an, in welchem Maße das Modell eine bessere Aussage liefert als das Trivialmodell. Dies ist analog zu den Modellen der Wettervorhersage, die sich auch am Trivialmodell (“Das Wetter bleibt wie es ist”) messen lassen müssen.

10.3.2. Maximum-Likelihood-Methode

Bei dieser, oft auch als ML abgekürzte Methode werden die n Messungen bzw. Instanzen des zu beschreibenden Sachverhalts als n Realisierungen des stochastischen ökonomischen Modells (10.1) gesehen. Für jede Messung i , also jeden

10. Stetige ökonomische Modelle

Satz von Werten x_{ji} der exogenen Variablen und bei gegebenen Parametern β_j , bekommt man aus dem ökonomischen Modell (10.1) eine *Zufallsgröße*

$$Y_i = f(\{x_{mi}\}, \{\beta_j\}) + \epsilon_i,$$

welche mit dem aus der jeweiligen Messungen erhaltenen *Zahlenwerte* y_i verglichen wird. Nun wird, in Abhängigkeit der Parameter $\{\beta_j\}$, die kombinierte Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass die Messung 1 den Wert y_1, \dots , die Messung n den Wert y_n liefert:

$$P_{\text{ML}}(\{\beta_j\}) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = \max!$$

Die Parameter β_0 bis β_J werden nun so bestimmt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das stochastische Modell mit den Messungen übereinstimmt, maximal ist.⁴ Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit muss, im Gegensatz zur Regressionsmethode, die Verteilung der Störgröße ϵ spezifiziert werden.

Die Maximum-Likelihood-Methode wird (in der Master-Vorlesung) bei der Modellierung diskreter abhängiger Variablen genauer betrachtet. Bei den folgenden linearen Modellen kontinuierlicher Variablen kann man zeigen, dass das Ergebnis der Fehlerquadratminimierung und der Maximum-Likelihood-Methode dasselbe ist, wenn man die ϵ_i als nicht korrelierte gaußverteilte Zufallsvariablen annimmt. Dies ist unter den Bedingungen

- Zufallsstichproben und ein vollständiges Modell \Rightarrow die ϵ_i sind unabhängig,
- Anwendbarkeit des Zentralen Grenzwertsatzes \Rightarrow die ϵ_i sind gaußverteilt

der Fall. Die Unabhängigkeit und Stochastizität der ϵ_i gilt nicht, wenn das Modell unvollständig ist, also nicht alle relevanten exogenen Variablen (Einflussfaktoren) enthält. Dann ergibt eine Kalibrierung – egal, ob mit der LQ oder der ML-Methode – und selbst der anschließende Belastungstest oft irreführende bzw. falsche Aussagen.

10.4. Lineare multivariate Modelle

10.4.1. Modellgleichungen

Im multivariaten lineare Fall kann man das allgemeine ökonomische Modell (10.1) schreiben als

$$Y(\mathbf{x}, \beta_0, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^J \beta_j x_j + \epsilon. \quad (10.7)$$

⁴Bei stetigen Größen ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines festen Wertes i. A. exakt gleich Null. Deshalb wird genau genommen die Wahrscheinlichkeits*dichte* maximiert.

10. Stetige ökonomische Modelle

Man hat also $M = J$ exogene Variable und neben dem Achsenabschnitt β_0 , welcher eine spezielle Rolle spielen wird (siehe weiter unten), J zu kalibrierende Modellparameter.

Die einzelnen Größen der Gleichung (10.7) bedeuten

- Y : Die abhängige (erklärte) Variable, welche mit den Ergebnissen der Umfragen/Messungen verglichen wird,
- x_j : einen Satz von abhängigen Variablen,
- β_0 : Der konstante Anteil, auch Achsenabschnitt (engl. *intercept*) genannt. Dies wird besonders anschaulich im bivariaten Fall, in dem die Funktion $Y(x_1, x_2)$ eine Ebene im Raum der unabhängigen und abhängigen Variablen beschreibt und die die abhängige Variable beschreibende Achse bei β_0 schneidet, siehe Abb. 10.1.
- β_j : Anstiegsparameter, welche die Änderungsrate von Y bei Änderung von x_j unter **ceteris-paribus-Bedingungen** beschreibt. Dieser Zusatz (lateinisch für “alles Andere bleibt gleich”, also insbesondere alle übrigen unabhängigen Variablen und alle Parameter) ist ein zentrales Konzept und wesentlich für die Aussagekräftigkeit der multivariaten Regression im Vergleich zur niedriger dimensionalen oder univariaten Regression.
- ϵ : Die nichterklärbare Restabweichung des Modells von den Daten. Ohne Einschränkung wird der Erwartungswert gleich Null gesetzt. Außerdem wird konstante Varianz (“Homoskedastizität”) und Unkorreliertheit der einzelnen Messerte ϵ_i (Realisierungen von ϵ) vorausgesetzt, vgl. Gl. (10.2).

Die Variablen und die Parameter β_0, \dots, β_J lassen sich auch kompakt zu einem **Variablenvektor** \mathbf{x} bzw. einem Parametervektor $\boldsymbol{\beta}$ zusammenfassen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_J \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_J \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

wobei formal $x_0 = 1$ gesetzt wurde. Das Lineare Modell erhält dann die kompakte Form

$$Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} + \epsilon. \quad (10.9)$$

Ohne jede weitere Komplikation kann man das lineare Modell (10.9) auch auf **quasilineare Modelle** verallgemeinern:

$$Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=0}^J \beta_j f_j(\mathbf{x}) + \epsilon. \quad (10.10)$$

10. Stetige ökonomische Modelle

Solche Modelle sind in den Koeffizienten linear, in den exogenen Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$ jedoch nichtlinear.⁵ Bei der Kalibrierung erhält man nach wie vor ein lineares Gleichungssystem. Der Einfachheit halber werden wir das Verfahren aber explizit für lineare Modelle beschreiben.

Verständnisfrage:

Warum stellt die Bedingung $E(\epsilon) = 0$ an den Zufallsanteil keine Einschränkung der Allgemeinheit dar?

10.4.2. Parameterschätzung 1: Formulierung mit Summen

Zur Durchführung der Parameterschätzung bzw. der Modellkalibrierung werden Mess- oder Umfragedaten in folgendem Format benötigt:

$$\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{array} \left\| \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{array} \right| \begin{array}{c} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{array} \left| \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{array} \right| \begin{array}{c} x_{J1} \\ x_{J2} \\ \vdots \\ x_{Jn} \end{array}$$

Die aus dem Modell (10.7) und dieser Daten folgenden Systemgleichungen lauten daher

$$y_i = \hat{y}_i + \epsilon_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^J \beta_j x_{ji} + \epsilon_i, \quad (10.11)$$

wobei x_{ji} den Wert von x_j bei der i -ten Messung bezeichnet. Die resultierende Fehlerquadratsumme hängt von allen Modellparametern β_0 und $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_J\}$ ab und lautet⁶

$$S(\beta_0, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_0 - \sum_{m=1}^J \beta_m x_{mi} \right)^2, \quad (10.12)$$

wobei x_{ji} den Wert von x_j bei der i -ten Messung bezeichnet. Man beachte, dass sich (10.12) auf die Mess-Gleichungen (10.11) bezieht, also auf feste und bereits gegebene Messwerte der abhängigen und unabhängigen Variablen. Die Fehlerquadratsumme hängt deshalb *nicht* von den y_i oder x_{mi} ab! Ableitung nach β_0 und Nullsetzen liefert

$$\beta_0 = \bar{y} - \sum_{m=1}^J \beta_m \bar{x}_m, \quad (10.13)$$

⁵Insbesondere muss die Zahl M der "echten" exogenen Variablen nicht gleich J sein.

⁶Im Folgenden wird absichtlich nicht über j sondern über m summiert, da später nach β_j abgeleitet werden soll.

10. Stetige ökonomische Modelle

mit dem arithmetischen Mittel $\bar{x}_m = \frac{1}{n} \sum_i x_{mi}$. Die Bedingungen $\frac{\partial F}{\partial \beta_j} = 0$ liefern⁷

$$\sum_{i=1}^n \left(y_i x_{ji} - \beta_0 x_{ji} - \sum_{m=1}^J \beta_m x_{mi} x_{ji} \right) = 0.$$

Setzt man nun (10.13) für β_0 ein, erhält man als Kalibrierungsbedingungen der LQ-Methode ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten β_1 bis β_J :

$$\sum_{m=1}^J s_{jm} \beta_m = s_{jy} \quad (10.14)$$

mit den Elementen der deskriptiven Kovarianzmatrix der erklärenden Variablen

$$s_{jm} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji} x_{mi} - \bar{x}_j \bar{x}_m \quad (10.15)$$

und der deskriptiven Kovarianz zwischen x_j und y ,

$$s_{jy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji} y_i - \bar{x}_j \bar{y}. \quad (10.16)$$

In Matrix-Vektor-Notation kann man (10.14) auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{j1} & \cdots & s_{jJ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1y} \\ \vdots \\ s_{Jy} \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Aufgabe:

Zeigen Sie, dass (10.14) bei einer einzigen erklärenden Variablen sowie der Gleichsetzung $\beta_0 = a$, $\beta_1 = b$ die Kalibrierungsbedingungen (10.35) der Koeffizienten a und b der univariaten linearen Regression liefert.

10.4.3. Parameterschätzung 2: Formulierung mit Vektoren und Matrizen

Die abstrakte Formulierung mit Vektoren und Matrizen ist zunächst etwas ungewohnt, sie hat aber, wenn man einmal die wichtigsten Matrizenregeln kennt, durchaus Vorteile:

⁷Man beachte, dass man den Index j der Ableitung nach β_j vom Summationsindex m unterscheiden muss!

10. Stetige ökonomische Modelle

- Die Formulierung ist kompakter und einheitlicher,
- die induktive Statistik lässt sich mit dieser Formulierung eleganter durchführen,
- die Formulierung entspricht den Standard-Softwarepaketen. Die numerische Lösung ist einfacher zu programmieren.

Dem stehen aber auch Nachteile gegenüber:

- Die Formulierung ist abstrakt und unanschaulich,
- Die Rechnung “per Hand” ist komplizierter. Beispielsweise haben die Gleichungssysteme eine “Unbekannte” mehr

Man sollte also beide Herangehensweisen kennen. Sowohl konzeptionell als auch praktisch ist mal die eine, mal die andere Formulierung effizienter.

Systemgleichungen

Wie bereits erwähnt, wird der konstante Achsenabschnitt β_0 formal zu einem Anstiegsparameter, wenn man die Pseudo-Variable $x_0 = 1$ einführt. Das lineare Modell wird dann zu

$$Y(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^J \beta_j x_j + \epsilon = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} + \epsilon \quad (10.18)$$

und die Systemgleichungen zu

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}. \quad (10.19)$$

bzw. ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} & \cdots & x_{J1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{0n} & \cdots & x_{Jn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_J \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} \quad (10.20)$$

- \mathbf{Y} und $\boldsymbol{\epsilon}$ sind Spaltenvektoren mit n Elementen. Y_i bzw. ϵ_i geben die Werte der endogenen Variablen Y bzw. der Restabweichung ϵ bei der i -ten Messung an.
- $\boldsymbol{\beta}$ ist ein Spaltenvektor mit $J + 1$ Elementen; β_j mit $j = 0, 1, \dots, J$ gibt den Wert des j -ten Parameters an.
- \mathbf{X} ist eine $n \times (J + 1)$ -Matrix.⁸ Das Element x_{ji} gibt den Wert der j -ten exogenen Variablen bei der i -ten Messung an. Da die Pseudovariablen $x_0 = 1$, haben automatisch auch deren “Messwerte” x_{0i} den Wert 1.⁹

⁸Achtung! Entgegen der üblichen Konvention gilt für die Elemente x_{ji} , dass *zuerst* der Spaltenindex und *dann* der Zeilenindex genannt wird! x_{ji} bezeichnet die $(j + 1)$ -te Spalte und i -te Zeile

⁹Verwechseln Sie bitte nicht den Vektor \mathbf{x} der exogenen Variablen im Modell (10.18) und die Matrix \mathbf{X} der Werte der exogenen Variablen in der Systemgleichung (10.19).

10. Stetige ökonomische Modelle

Fehlerquadratsumme

Auch diese lässt sich kompakt in Vektor-Matrix-Notation schreiben:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta})^T \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta}). \quad (10.21)$$

Hierin bedeutet das Superskript T die Transposition, welche auf Vektoren und Matrizen angewandt werden kann:

- Transponiert man einen Spaltenvektor, erhält man den zugehörigen Zeilenvektor und umgekehrt,
- Bei einer Matrix werden die Zeilen und Spalten vertauscht: $(\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji}$.

Minimierung der Fehlerquadratsumme

Zur Minimierung bezüglich $\boldsymbol{\beta}$ multipliziert man S zunächst aus:¹⁰

$$\begin{aligned} S &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{Y}) - (\mathbf{Y}^T \mathbf{X})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \boldsymbol{\beta} \\ &:= \text{const.} - \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b}^T \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Assoziativität aller Operationen (man kann beliebig klammern) und die Transpositionsregeln

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad (\mathbf{A}\mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} \quad (10.22)$$

ausgenutzt und, um den nun folgenden Ableitungsschritt übersichtlicher zu gestalten, die Konstanten

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{X}^T \mathbf{y} && \text{(Spaltenvektor mit } J + 1 \text{ Komponenten)} \\ \mathbf{b}^T &= \mathbf{y}^T \mathbf{X} && \text{(Zeilenvektor mit } J + 1 \text{ Komponenten)} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} && ((J + 1) \times (J + 1) \text{ - Matrix)} \end{aligned}$$

eingeführt. Außerdem gilt

$$\mathbf{b}^T \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{b} = \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{a}$$

und damit letztendlich

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \text{const.} - 2\boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{a} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta}.$$

¹⁰Wo Eindeutigkeit besteht, werden die Punkte, welche das Skalarprodukt bzw. die Multiplikationen von Matrizen mit Vektoren und von zwei Matrizen beschreiben, weggelassen.

10. Stetige ökonomische Modelle

Auch das Ableiten nach allen Parametern kann man formal als (Spalten-)Vektoroperator schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \beta_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial \beta_J} \right)^T \quad (10.23)$$

Es gelten die folgenden Ableitungsregeln, die man sich am besten durch direktes Einsetzen veranschaulicht:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} (\boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_0} (\sum_j \beta_j a_j) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_J} (\sum_j \beta_j a_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_J \end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

und, unter Beachtung der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} (\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_0} (\sum_j \sum_k \beta_j A_{jk} \beta_k) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_J} (\sum_j \sum_k \beta_j A_{jk} \beta_k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k A_{0k} \beta_k + \sum_j \beta_j A_{j0} \\ \vdots \\ \sum_k A_{Jk} \beta_k + \sum_j \beta_j A_{jJ} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta} \\ &\stackrel{\mathbf{A}=\mathbf{A}^T}{=} 2\mathbf{A} \boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Mit diesem Rüstzeug ist das eigentliche Ableiten dann einfach:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{a} + 2\mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \stackrel{!}{=} 0$$

und schließlich nach Multiplikation mit der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ von links die finalen Kalibrierungsbedingungen

$$\boldsymbol{\beta}_{\text{kalibr}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (10.24)$$

Die Inversion der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit $(J+1)$ Unbekannten.

Aufgabe:

Zeigen Sie, dass für den Fall einer exogenen Variablen $x_1 = z$ die Kalibrierungsbedingungen (10.24) auf die aus den Statistikvorlesungen bekannten und im Abschnitt 10.6.2 wiedergegebenen Bedingungen führen.

Hinweis: Die erste Spalte von \mathbf{X} besteht (wie immer) aus Einsen und die zweite Spalte aus den Messwerten $z_i, i = 1, \dots, n$.

10. Stetige ökonomische Modelle

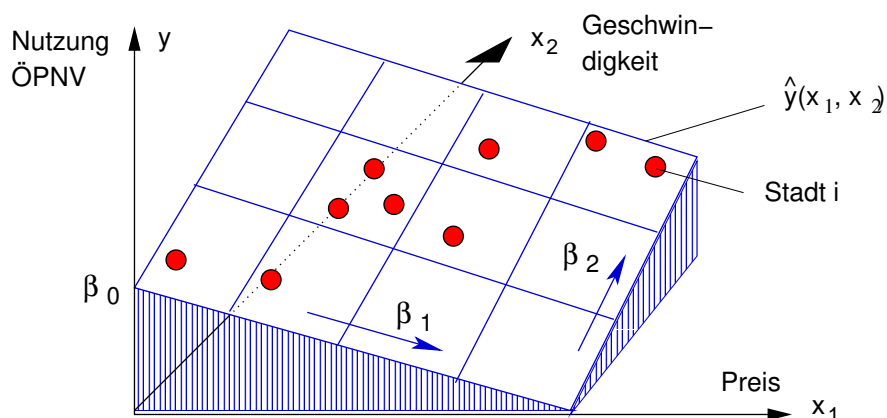


Figure 10.1.: Bedeutung des Achsenabschnittes β_0 und der Anstiegsparemeter β_1 und β_2 im bivariaten linearen Modell zur Beschreibung der Einflussfaktoren der ÖPNV-Nutzung. Die roten Punkte sind die Daten (Streudiagramm), während die blaue Ebene das bivariante Modell darstellt. Aus Gründen der Darstellung ist hier der Residualfehler=0 angenommen, so dass die roten Punkte auf der blauen Ebene liegen. Das lineare Modell beschreibt hier die Daten also exakt.

10.4.4. Anschauliche Interpretation des linearen Modells

Das multivariate lineare Modell und die Bedeutung seiner Modellparameter wird nun anhand des einfachsten nichttrivialen Falls (zwei unabhängige Variablen) anhand der Nutzungshäufigkeit der ÖPNV-Systeme vergleichbarer Städte veranschaulicht (Abb. 10.1): Die wichtigsten Einflussparameter und damit geeignete unabhängige Variablen sind der Preis x_1 und die Reisezeit bzw., um unabhängig von der Größe des Systems zu werden, die mittlere Geschwindigkeit x_2 . Die abhängige Variable Y gibt das Maß der Nutzung, z.B. in Form von verkauften Tickets oder der spezifischen Verkehrsleistung in ÖPNV-Kilometern pro Einwohner und Jahr an. Die einzelnen Punkte in Abb. 10.1 geben die Beobachtungswerte in verschiedenen Städten i an.

Plausiblerweise fällt die Nutzung mit dem Preis, also wird ein negativer Steigungsparameter $\beta_1 = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1}$ erwartet. Hingegen sollte die Nutzung mit der mittleren Geschwindigkeit unter ceteris-paribus-Bedingungen (gleiche Preise, gleiche sonstige Umstände) steigen, also $\beta_2 = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} > 0$. Schließlich gibt der Achsenabschnitt β_0 die Nutzungshäufigkeit bei kostenlosem jedoch stillstehendem ÖPNV an (offensichtlich ist hier der Anwendungsbereich des linearen Modells überschritten).

10. Stetige ökonometrische Modelle

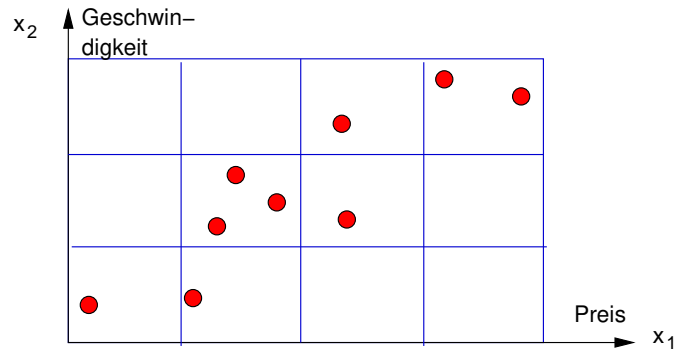


Figure 10.2.: Projektion der Datenpunkte der Abbildung 10.1 auf die x_1 - x_2 -Ebene.

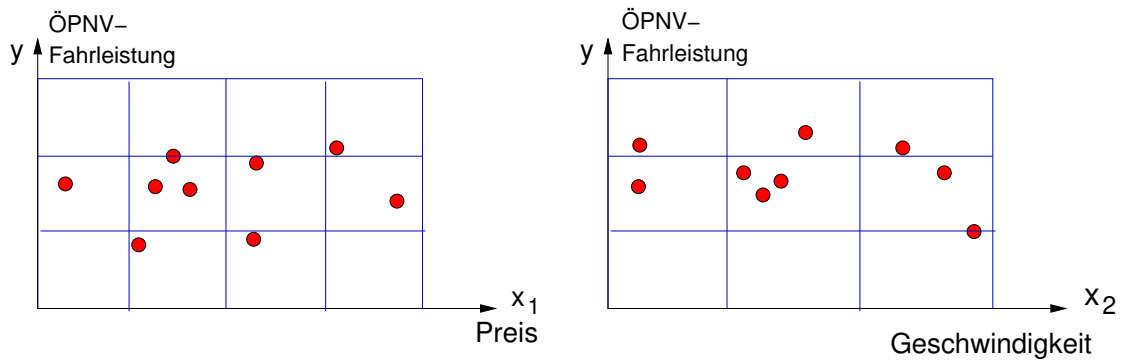


Figure 10.3.: Streudiagramm der Datenpunkte, falls nur x_1 (links) bzw. x_2 (rechts) als erklärende Variable berücksichtigt wird. Die Daten entsprechen denen von Abbildung 10.1 und 10.2.

10. Stetige ökonomische Modelle

Wichtig ist, sich anschaulich zu machen, dass die Vernachlässigung einer der beiden erklärenden Variablen zu falschen Schlussfolgerungen führen würde. Dies wird wesentlich durch die im Allgemeinen vorhandene *Korrelation* der Werte der unabhängigen Variablen bei den verschiedenen Stichprobenelementen bewirkt: Städte mit gut ausgebauten und schnellen ÖPNV haben tendenziell höhere Ticketpreise (pro Streckeneinheit) als Städte mit geringerwertigen ÖPNV-Netz. Die Korrelation $r_{12} = s_{12}/\sqrt{s_1^2 s_2^2}$ bzw. die Kovarianz s_{12} ist also in unserem Beispiel positiv: Die auf die x_1 - x_2 -Ebene projizierte Punktwolke ist also tendenziell längs einer ansteigenden Geraden angeordnet (Abb. 10.2).

Vernachlässigt man nun entweder x_1 oder x_2 , projiziert also die Datenpunkte auf die x_2 - y - bzw. auf die x_1 - y -Ebene, so hebt die Korrelation s_{12} zusammen mit der Projektion die Wirkung des noch verbleibenden wahren Anstiegsparameters β_2 bzw. β_1 weitgehend auf bzw. kann sogar zu gegenteiligen Effekten führen: Erhöht man die Geschwindigkeit, verbessert also das Angebot, reduziert sich die Nachfrage (Abb. 10.3). Dies führt zu folgender wichtigen Feststellung:

Vernachlässigt man in einem linearen ökonomischen Modell relevante erklärende Variable, ist das Modell **fehlspezifiziert** und die Modellkalibrierung durch lineare Regression oder der Maximum-Likelihood-Methode führt zu systematischen Fehlern. Dies resultiert in falschen Schlussfolgerungen und das Modell ist, im besten Fall, unbrauchbar.

Zum Problem der Fehlspezifikation

Allgemein liegt eine Fehlspezifikation vor, wenn

1. eine wesentliche erklärende Variable nicht berücksichtigt wurde (wie hier),
2. eine 100%ig mit anderen Variablen oder Linearkombinationen davon korrelierte erklärende Variable mitgeführt wird,
3. eine irrelevante erklärende Variable mitgeführt wird.

Der letztere Fall ist vergleichsweise harmlos. Der entsprechende Anstiegsparameter ist dann nicht signifikant von null verschieden. Der zweite Fall führt zu viel größeren Streubreiten, aber zu keiner systematischen Verfälschung des Mittelwertes. Fall (1) hingegen kann genau dies bewirken, wie diese Aufgabe zeigte. Er ist deshalb die gefährlichste Art der Fehlspezifikation.

10.5. Statistische Eigenschaften der Regressionskoeffizienten

10.5.1. Gauß-Markow-Annahmen

Die Modellkalibrierung mit Hilfe der Regressionrechnung nach den Abschnitten 10.3.1 bzw. 10.4.2 ist nur dann statistisch tragfähig, d.h. mit kontrollierbaren Fehlern behaftet, falls das Modell und die Fehlerterme die sogenannten **Gauß-Markow-Annahmen** erfüllen:

1. Das Modell ist zumindest **quasilinear**, also linear in den Parametern. Dies schließt insbesondere die linearen Modelle ein, aber auch Modelle wie

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 \sqrt{x_1 x_2} + \dots$$

2. Die unabhängigen Variablen dürfen nicht perfekt korreliert oder voneinander linear abhängig sein. Mathematisch zeigt sich dies daran, dass die Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{S} einen Rang kleiner J hat bzw. $\text{Det } \mathbf{S} = 0$. Nichtperfekte Korrelationen sind aber ausdrücklich zugelassen!
3. Der Fehlerterm hat den Erwartungswert $E(\epsilon_i) = 0$
4. Die zur Kalibrierung herangezogenen Daten stammen aus einer Zufalls-Stichprobe vom Umfang $n > J + 1$
5. Homoskedastizität: Die Varianz des Fehlerterms $E(\epsilon_i^2) = \sigma_\epsilon^2$ ist konstant. Die verschwindenden Korrelationen, $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ für $i \neq j$, folgen übrigens aus der Bedingung einer Zufalls-Stichprobe.
6. Der Fehlerterm ist gaußverteilt. Daraus und aus den vorhergehenden beiden Bedingungen folgt übrigens, dass die Fehlerterme i.i.d. sind.

Die letzte Bedingung ist nur zur genauen Ermittlung der Konfidenzintervalle und Grenzen statistischer Tests mit der Student-t-Verteilung notwendig. Wichtiger sind die ersten fünf Bedingungen, die zusammen eine Fehlspezifikation ausschließen.

10.5.2. Induktive Statistik multivariater linearer Modelle

Um zu belastbaren, also statistisch signifikanten Aussagen zu kommen, müssen die gerade diskutierten Gauß-Markow-Annahmen erfüllt sein. Dann kommen die bereits aus der [Grundvorlesung in Statistik II](#) bekannten parametrischen Intervallschätzungen und Tests zum Einsatz:

- Bei der **Intervallschätzung** wird um den mit der Regression geschätzten Parameterwert $\hat{\beta}_j$ ein **Konfidenzintervall** bestimmt, in dem sich der wahre Wert β_j mit einer gewissen Sicherheit $1 - \alpha$ befindet. Hierbei wird die **Fehlerwahrscheinlichkeit** α meist mit $\alpha = 5\%$ oder 1% angenommen. Je kleiner α , desto sicherer, aber auch desto unschärfer werden die Aussagen.

10. Stetige ökonomische Modelle

- Beim **statistischen Test** des Parameters β_j wird eine gewisse **Nullhypothese** $\beta_j = \beta_{j0}$ getroffen und getestet, ob man diese bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit α ablehnen kann. Nur im Falle einer Ablehnung bekommt man eine signifikante Aussage, nämlich “Die Nullhypothese trifft nicht zu”. Kann man den Test hingegen nicht ablehnen, erhält man keine Aussage, da daraus *nicht* die Gültigkeit der Nullhypothese folgt. Auch hier gilt: Je höher α , desto häufiger erreicht man die Ablehnung, desto unsicherer ist die damit verbundene Aussage jedoch

Es folgen zunächst Konfidenzintervalle und statistische Tests für die Parameter im allgemeinen multivariaten Fall. Der folgende Abschnitt 10.6 stellt für die Spezialfälle zweier bzw. einer erklärender Variablen explizite Ausdrücke für die Parameterschätzung durch lineare Regression sowie dazugehörige Konfidenzintervalle und statistische Tests vor. Für Interessierte folgen im Abschnitt 10.7 einige Herleitungen.

Konfidenzintervall und Test der Anstiegsparameter für den allgemeinen multivariaten Fall

Beides hängt im Wesentlichen von der (geschätzten) *Varianz* $V(\hat{\beta}_j)$ des mit Hilfe der linearen Regression gewonnenen Schätzers $\hat{\beta}_j$ ab. Das *Konfidenzintervall* für den wahren Parameter β_j zur Fehlerwahrscheinlichkeit α ist gegeben durch

$$\beta_j \in \left[\hat{\beta}_j - t_{(1-\alpha)/2}^{(n-J-1)} \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)}, \hat{\beta}_j + t_{(1-\alpha)/2}^{(n-J-1)} \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)} \right] \quad (10.25)$$

und die Test-Statistik zur Nullhypothese β_{j0} durch die **Student-Teststatistik** (“T-Statistik”)

$$T_{\beta_j} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j0}}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)}} \sim T(n - J - 1), \quad (10.26)$$

welche bei gaußverteilten Residualtermen einer Student-t-Verteilung mit $n - J - 1$ “Freiheitsgraden” gehorcht. Die Zahl der “Freiheitsgrade” ist dabei durch den Überschuss der Zahl n der Messungen bzw. Bedingungsgleichungen bezüglich der Zahl $J + 1$ der zu kalibrierenden Parameter gegeben, also durch die Zahl der Gleichungen, welche für die Stochastizität “übrigbleiben”.

Die Testaussagen lassen sich aus den konkreten Realisierungen t_{β_j} der Test-Statistik gewinnen:

- **Test auf Gleichheit:** Die Nullhypothese $\beta_j = \beta_{j0}$ ist angenommen, falls die Realisierung der Teststatistik der Bedingung

$$|t_{\beta_j}| < t_{(1-\alpha)/2}^{(n-J-1)} \quad (10.27)$$

10. Stetige ökonomische Modelle

genügt. Mit der Nullhypothese $\beta_{j0} = 0$ findet dieser Test vor allem Anwendung, wenn man allgemeine Systeme auf signifikante Einflussfaktoren oder speziell Zeitreihen auf das Vorhandensein eines Trends prüfen will.

- **Test auf Ungleichheit:** Die Nullhypothese $\beta_j < \beta_{j0}$ kann nur abgelehnt werden, falls

$$t_{\beta_j} > t_{1-\alpha}^{(n-J-1)}. \quad (10.28)$$

Der Test auf “größer als” verläuft analog: Man testet den negativen Wert auf “kleiner als” mit dem Ergebnis einer Ablehnung falls

$$t_{\beta_j} < -t_{1-\alpha}^{(n-J-1)}.$$

Sowohl die Konfidenzintervalle als auch die Entscheidungskriterien der Tests hängen von den tabellierten **Quantilen** $t_q^{(n-J-1)}$ der Student-Verteilung ab.¹¹ Um die Formeln auswerten zu können, benötigt man noch die geschätzte *Varianz* $\hat{V}(\hat{\beta}_j)$ der durch die Regression erhaltenen Werte $\hat{\beta}_j$ der Modellparameter. Für den j -ten Anstiegsparameter (*intercept*) ergeben sich

$$\hat{V}(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{n} \frac{\det(\underline{\underline{S}})_j}{\det(\underline{\underline{S}})}, \quad (10.29)$$

mit $\det(\underline{\underline{S}})$ der Determinante der aus den s_{jk} gebildeten Kovarianzmatrix und $\det(\underline{\underline{S}})_j$ der Determinante dieser Matrix ohne die Zeile und Spalte j . Schließlich ergibt sich der Schätzer $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ für die **Residualvarianz** σ_ϵ^2 aus (10.5) zu

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{S_{\min}}{n-1-J} = \frac{1}{n-1-J} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{m=1}^J \hat{\beta}_m x_{mi} \right)^2. \quad (10.30)$$

10.6. Spezialfälle

10.6.1. Zwei erklärender Variablen

Aus der linearen Regression (10.14) bzw. (10.17) und Gl. (10.13) ergeben sich in diesem Fall ($J = 2$) die Schätzer der linearen Anstiegsparameter und der Konstante (*intercept*) zu

¹¹Zur Erinnerung: Das Quantil zum Argument q gibt den Wert der Zufallsvariablen an, bei dem die Realisierungen mit einer Wahrscheinlichkeit q darunterliegen.

10. Stetige ökonomische Modelle

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{s_{1y}s_{22} - s_{2y}s_{12}}{\det(\underline{S})}, \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{s_{2y}s_{11} - s_{1y}s_{21}}{\det(\underline{S})}, \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \beta_1\bar{x}_1 - \beta_2\bar{x}_2.\end{aligned}\tag{10.31}$$

Die geschätzte Varianz der Schätzer der linearen Anstiegsparameter¹² ergeben sich mit (10.29) zu

$$\hat{V}(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{ns_{jj}(1 - r_{12}^2)}, \quad j = 1, 2,\tag{10.32}$$

mit dem Schätzer der Residualvarianz $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ aus (10.30) und der deskriptiven Korrelation

$$r_{12} = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}s_{22}}}.\tag{10.33}$$

Die Formeln (10.25) und (10.26) für die Konfidenzintervalle und Tests gelten unverändert.

Diese Beziehungen zeigen, dass es im multivariaten Fall wichtig ist, dass die erklärenden Variablen x_j nicht direkt voneinander abhängig sind. Andernfalls ist ihre Korrelation $r_{12} = 1$ und die Parameter und ihre Varianzen sind wegen der Nenner $\det(\underline{S})$ bzw. $(1 - r_{12}^2)$ nicht definiert. Hängen die unabhängigen Variablen x_1 und x_2 nicht exakt aber doch weitgehend voneinander ab, was auch als **Kolin-earität** bezeichnet wird, wird die Varianz $V(\hat{\beta}_j)$ wegen des Nenners $(1 - r_{12}^2)$ sehr groß, was zu großen Konfidenzintervallen bzw. nicht ablehnbaren Testts, also zu schwachen Aussagen führt. Ein Beispiel für eine solche Kolin-earität ist häufig das Paar Reisezeit und Reiseweite. Dazu noch einige Bemerkungen:

- Eine nichtverschwindende Korrelation vom Betrag kleiner eins zwischen den erklärenden Variablen (also eine nichtexakte Kolin-earität) ist ausdrücklich zugelassen, vgl. Abb. 10.2.
- Im mehrdimensionalen Fall “verdirbt” eine starke Kolin-earität zwischen zwei exogenen Variablen nicht automatisch die Aussagekraft bezüglich anderer Variablen. Seien z.B. x_1 die Reisezeit, x_2 die Reiseweite und x_3 die Kosten und seien x_1 und x_2 stark kolin-ear, so sind β_1 und β_2 nur sehr ungenau zu bestimmen. Den Anstiegsparameter β_3 kann man jedoch mit normaler Genauigkeit bestimmen. Dasselbe gilt für die *Summe* $\beta_1 + \beta_2$.

¹²Man beachte, dass sowohl der Parameter geschätzt wird (Dach über β_j), als auch dessen Varianz (Dach über V). Die “echte” Varianz des Schätzers ergibt sich (bei Gültigkeit der Gauß=Markow-Annahmen) durch den gleichen Ausdruck, aber ohne “Dach” über der Residualvarianz σ_ϵ .

10. Stetige ökonomische Modelle

10.6.2. Eine erklärende Variable

Mit $x_1 = x$, $\beta_0 = a$ und $\beta_1 = b$ reduziert sich das allgemeine lineare Modell (10.7) auf

$$Y(x; a, b) = a + bx + \epsilon. \quad (10.34)$$

reduzieren. Die durch die lineare Regression geschätzten Parameterwerte sind mit $s_{11} = s_{xx}$, $s_{1y} = s_{xy}$ etc. (vgl. auch die Grundvorlesung [Statistik 1](#))

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad \hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = \frac{1}{ns_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (10.35)$$

und die Varianzen der Schätzer zu

$$V(\hat{a}) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{n} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}} \right), \quad V(\hat{b}) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{ns_{xx}} \quad (10.36)$$

bzw. die *geschätzte* Varianz zu

$$\hat{V}(\hat{a}) = \frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{n} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}} \right), \quad \hat{V}(\hat{b}) = \frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{ns_{xx}} \quad (10.37)$$

mit der geschätzten Residualvarianz

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2. \quad (10.38)$$

Konfidenzintervalle der linearen Regressionsfunktion selbst

Mit den bei jeder neuen Stichprobe unterschiedlichen Werten \hat{a} und \hat{b} der geschätzten Parameter sind die Schätzer \hat{A} und \hat{B} *selbst* stochastische Variable. Damit ist auch die gesamte Regressionsfunktion eine stochastische Größe, und zwar für jeden Wert von x :

$$\hat{Y}(x) = \hat{A} + \hat{B}x$$

eine stochastische Größe mit Erwartungswert und Varianz. Es gilt

$$E(\hat{Y}(x)) = a + bx = E(Y(x)), \quad (10.39)$$

also ist die gesamte Regressionsfunktion für alle Werte von x erwartungstreu. Für die Varianz ergibt sich (vgl. Abb. 10.6.2) die sogenannte "Hyperbelformel"

$$V(\hat{Y}(x)) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{n} \left(1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{s_{xx}} \right). \quad (10.40)$$

Schlussfolgerungen:

10. Stetige ökonomische Modelle

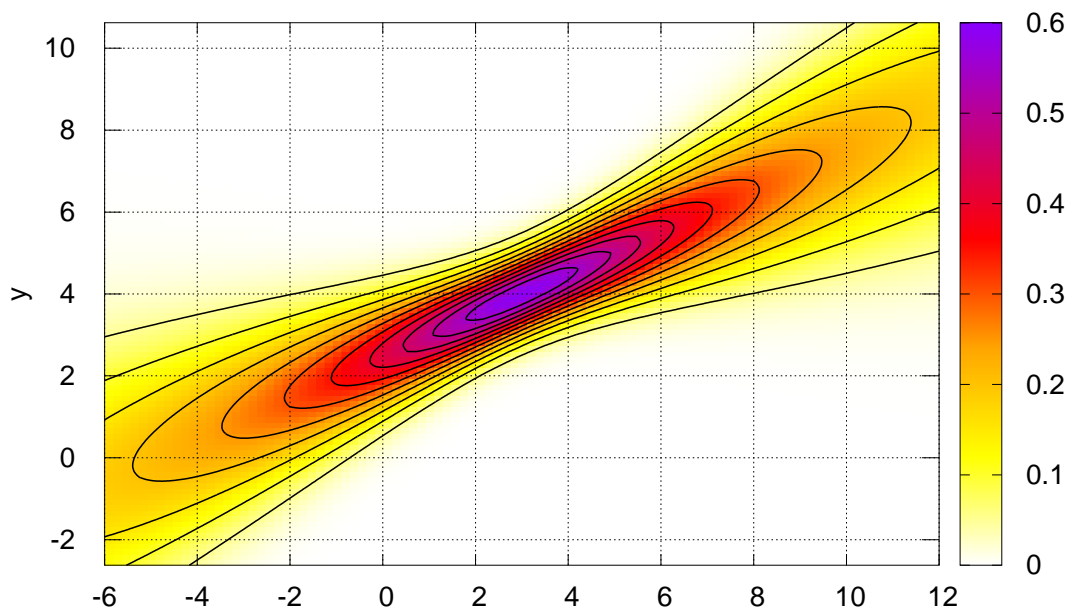


Figure 10.4.: Wahrscheinlichkeitsdichte einer durch (10.39) und (10.40) beschriebenen Normalverteilung um den Erwartungswert $a + bx$ des geschätzten linearen Modells.

- Nicht nur die Parameter, sondern die Regressionsfunktion selbst ist für alle x erwartungstreu,
- Die Varianz ist am kleinsten für $x = \bar{x}$, und zwar gleich $1/n$ mal der Residualvarianz,
- Für $(x - \bar{x})^2 \gg s_{xx}$ wächst die Standardabweichung $\sqrt{V(\hat{Y}(x))}$ der geschätzten Regressionsfunktion linear mit dem Abstand $x - \bar{x}$, und zwar mit einer durch die Standardabweichung des Parameterschätzers für a gegebenen Anstiegsrate,
- Nur für $\bar{x} = 0$ sind die durch \hat{a} und \hat{b} beschriebenen Anteile des Regressionschätzers unabhängig voneinander, da nur dann gilt $V(\hat{A} + \hat{B}x) = V(\hat{A}) + x^2V(\hat{B})$.
- Für den mehrdimensionalen Fall gelten naheliegende Verallgemeinerungen.

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz ist außerdem für hinreichend großen Stichprobenumfang die Dichtefunktion des Regressions-Schätzers als Funktion von y gaußverteilt (siehe Abbildung).

10.7. Einige Herleitungen



Wir betrachten nun mehrere Sätze von je n unabhängigen Messungen der Form (10.11), also nur für eine unabhängige Variable. Jeder Mess-Satz hat also das Ergebnis

$$y_i = \hat{y}_i + \epsilon_i = \hat{a} + \hat{b}x_i + \epsilon_i, \quad (10.41)$$

Da in diesem Modell die Y_i Zufallsvariablen mit stets variierenden Realisierungen y_i darstellen (auch bei demselben Index $i!$), erhält man bei jedem Satz von Messungen andere Werte der mit (10.35) berechneten kalibrierten Parameter a und b . Genaugenommen berechnen die Kalibrierungsformeln also nicht die wahren kalibrierten Werte a und b , sondern Instanzen \hat{a} und \hat{b} der *Schätzer* \hat{A} und \hat{B} dieser Parameter. Schreibt man in (10.35) die y_i nicht als Realisierungen, sondern als Zufallsgrößen, erhält man die Schätzer als Zufallsvariablen:

$$\hat{A} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{x}, \quad \hat{B} = \frac{\hat{s}_{xy}}{s_{xx}} = \frac{1}{ns_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}), \quad (10.42)$$

Damit ist auch die geschätzte lineare Regressionsfunktion *selbst* eine von x abhängige **stochastischen Funktion**:

$$\hat{Y}(x) = \hat{A} + \hat{B}x. \quad (10.43)$$

Schätzer des linearen Anstiegsparameters b

Aus (10.42) sieht man, dass \hat{B} eine Linearkombination der Zufallsvariablen Y_i darstellt. Mit der aus den Messgleichungen (10.41) gewonnenen Beziehung $\bar{Y} = a + b\bar{x} + \bar{\epsilon}$ kann man den Schätzer weiter umformen zu

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \frac{1}{ns_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})[b(x_i - \bar{x}) + (\epsilon_i - \bar{\epsilon})] \\ &= \frac{1}{ns_{xx}} \left[b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\epsilon_i - \bar{\epsilon} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \right] \end{aligned}$$

und mit $\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0$ sowie $\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = ns_{xx}$ schließlich zu

$$\hat{B} = b + \frac{1}{ns_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\epsilon_i. \quad (10.44)$$

Erwartungswert: Wegen $E(\epsilon_i) = 0$ (Man beachte, dass die x_i nur *Zahlenwerte* sind!) gilt

$$E(\hat{B}) = b, \quad (10.45)$$

10. Stetige ökonomische Modelle

der Schätzer für den linearen Anstieg ist also erwartungstreu.¹³

Varianz: Mit der Definition der Varianz und (10.44) ergibt sich

$$\begin{aligned} V(\hat{B}) &= E\left((\hat{B} - b)^2\right) \\ &= E\left(\frac{1}{n^2 s_{xx}^2} \sum_{i=1}^n \sum_j (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x}) \epsilon_i \epsilon_j\right) \end{aligned}$$

und mit $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ für $i \neq j$ und $E(\epsilon_i^2) = \sigma_\epsilon^2$ (vgl. Gl. (10.2)) schließlich

$$V(\hat{B}) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{n s_{xx}}. \quad (10.46)$$

Schätzer des konstanten Regressionsparameters a

Das Vorgehen ist analog zu dem für den linearen Anstiegparameter: Man betrachtet die Y_i in (10.35) als Zufallsvariable:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \bar{Y} - \hat{B}\bar{x} \\ &= a + b\bar{x} + \bar{\epsilon} - b\bar{x} - \frac{1}{n s_{xx}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\bar{x}\epsilon_i \end{aligned}$$

und damit

$$\hat{A} = a + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{(x_i - \bar{x})\bar{x}}{s_{xx}}\right) \epsilon_i. \quad (10.47)$$

Erwartungswert: Wegen $E(\epsilon_i) = 0$ gilt

$$E(\hat{A}) = a. \quad (10.48)$$

Der Schätzer für den konstanten Parameter ist also ebenfalls erwartungstreu.

Varianz: Die Rechnung geht analog wie bei der Herleitung der Varianz des kalibrierten Anstiegparameters: Mit (10.2) und (10.47) erhält man

$$\begin{aligned} V(\hat{A}) &= E((\hat{A} - a)^2) \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{(x_i - \bar{x})\bar{x}}{s_{xx}}\right)^2 \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{n^2} \left(n + \frac{n\bar{x}^2}{s_{xx}}\right), \end{aligned}$$

¹³Man beachte aber, dass diese und die folgenden Aussagen dieses Kapitels voraussetzen, dass das lineare Modell den zu untersuchenden Sachverhalt *korrekt beschreibt*.

10. Stetige ökonometrische Modelle

(In der letzten Umformung wurde $\sum_i (x_i - \bar{x})\bar{x} = 0$ verwendet) und damit

$$V(\hat{A}) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{n} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}} \right). \quad (10.49)$$

Konfidenzintervalle der linearen Regressionsfunktion selbst

Mit (10.43), (10.47) und (10.44) erhält man für die stochastische Regressionsfunktion die Beziehung

$$\hat{Y}(x) = \hat{A} + \hat{B}x = a + bx + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{(x_i - \bar{x})(x - \bar{x})}{s_{xx}} \right) \epsilon_i$$

und damit

$$E(\hat{Y}(x)) = a + bx. \quad (10.50)$$

Es ist also auch die gesamte Regressionsfunktion für alle Werte von x erwartungstreu. Die Herleitung der Varianz ("Hyperbelformel" (10.40) geht analog wie die der Varianzen $V(\hat{A})$ und $V(\hat{B})$. Man muss nur immer beachten, dass sowohl die Messerte x_i als auch x als Argument der Funktion $Y(x)$ *nichtstochastische* Größen darstellen.

10.8. Nichtlineare univariate Modelle

Hier verläuft die Regression genau wie in den Grundvorlesungen [Statistik 1](#) und [Statistik 2](#) vorgestellt, auf die hier verwiesen wird. Prinzipiell kann man drei Fälle unterscheiden:

- **Quasilineare Modelle:** Hier ist die das ökonometrische Modell zwar nicht-linear in der exogenen Variablen, aber linear in den Koeffizienten, z.B.

$$\hat{y}(x) = \frac{a}{x} + b + c\sqrt{x} + dx + ex^2.$$

Ableiten und Nullsetzen der Fehlerquadratsumme führt auf ein lineares Gleichungssystem.

- **Nichtlineares, reduzierbare Modelle** lassen sich durch Variablentransformation der exogenen Variablen, der endogenen Variablen, oder beiden, in ein lineares Modell überführen, z.B.

$$\hat{y}(x) = ae^{bx}.$$

10. Stetige ökonometrische Modelle

- **Nichtlineare irreduzible Modelle**, die sich nicht linearisieren lassen. Hier hilft im Allgemeinen nur eine numerische Lösung des resultierenden nichtlinearen Gleichungssystems weiter. Eines der wichtigsten Beispiele sind Multinomial-Logit-Modelle der Form

$$\hat{y}_k = \frac{e^{\beta U(x_k)}}{\sum_l e^{\beta U(x_l)}},$$

aber auch das univariate logistische Modell

$$\hat{y}(x) = \frac{y_s}{1 + e^{\beta(x-x_0)}},$$

welches begrenztes Wachstum (anfängliche Wachstumsrate β , Sättigungswert y_s) beschreibt.

10. Stetige ökonometrische Modelle

10.9. Verwendete Symbole

Y	Abhängige bzw. erklärte Variable. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird nur eine Variable betrachtet.
$x_m,$ $m = 1, \dots, M$	Unabhängige bzw. erklärende Variablen
$y_i, x_{mi},$ $i = 1, \dots, n$	Wert der abhängigen bzw. der m -ten unabhängigen Variablen bei der i -ten Messung bzw. dem i -ten Element der Stichprobe.
β_0	Achsenabschnitt (engl. <i>intercept</i>)
$\beta_j,$ $j = 1, \dots, J$	Lineare Anstiegsparameter
ϵ	Ein additiver i.i.d. Zufallsterm mit Erwartungswert 0 und der Residualvarianz σ_ϵ^2
B	Bestimmtheitsmaß
n	Zahl der Stichprobenelemente bzw. Messungen
$\sigma_\epsilon^2, \hat{\sigma}_\epsilon^2$	Residualvarianz und ihr Schätzer
s_{jm}, r_{jm}	Elemente der deskriptiven Kovarianzmatrix $\underline{\underline{S}}$ bzw. der Korrelationsmatrix $\underline{\underline{R}}$ zwischen den erklärenden Variablen
s_{jy}	Deskriptive Kovarianz zwischen den erklärenden und der erklärten Variable
T_{β_j}	Test-Statistik für den Schätzer $\hat{\beta}_j$ des Anstiegsparameters β_j
β_{j0}	Nullhypothese für den entsprechenden Test.
$T(n)$	Student-t-Verteilung mit n "Freiheitsgraden"
$t_q^{(n)}$	q -Quantil der Student-t-Verteilung
α	Fehlerwahrscheinlichkeit bei Konfidenzintervallen und statistischen Tests

A. Appendix

A.1. Zu Abschnitt 9.2: “Quadratwurzelgesetz” im Europaparlament

Vereinfacht geht die Abstimmung im Europaparlament zweistufig vorstatten:

- Die Vertreter jedes der 25 Länder (Einwohnerzahl N_i , $i=1, \dots, 25$) stimmen mit “Nein” ($Y_i = 0$) oder “Ja” ($Y_i = 1$) ab; die letztendliche Entscheidung Z im Parlament hängt nach folgender Regel von den Ländergewichten w_i und dem Quorum R ab:

$$Z = \begin{cases} 1(\text{“Ja”}) & \text{falls } \sum_{i=1}^{25} w_i Y_i \geq R, \\ 0(\text{“Nein”}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Die Vertreter selbst werden direkt (Referendum) oder indirekt (über die Parteien) vom Volk gewählt.

die Befürworter der “Quadratwurzelregel” schlagen folgende Formel für die Ländergewichte vor und behaupten, dass sie im statistischen Mittel für größtmögliche Gleichheit der Wahl-Einflussmöglichkeiten (“Voting power”) der einzelnen Bürger sorgt:

$$w_i = \frac{\sqrt{N_i}}{\sum_{j=1}^{25} \sqrt{N_j}}.$$

Die “Voting Power” ist dabei gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine individuelle Stimme bei der Wahlentscheidung genau die entscheidende ist.

A. Appendix



Aufgabe zum Quadratwurzelgesetz

Prüfen Sie unter Verwendung von (9.8), den Definitionen von Verteilungs- und Dichtefunktionen (siehe Statistik I) sowie dem Zentralen Grenzwertsatz (Statistik II), ob die “Quadratwurzelregel” zu einer gleichen “Voting Power” für alle Bürger zumindest unter folgenden Annahmen führt:

- Alle Bürger und alle Länder entscheiden unabhängig voneinander.
- In jedem Land gibt es nur zwei relevante Parteien oder Koalitionen.
- Die mittlere Zustimmungquote in allen Ländern liegt bei 0.5.
- Die Voting Power eines Landes (also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gerade die Stimme Y_i dieses Landes wahlentscheidend ist) wächst proportional mit dem Ländergewicht w_i .

Lösung Die Stimme Y_i des Landes i (mit den Werten 1 für “Ja” und 0 für “Nein”) hängt nach der Aufgabenstellung (bei 100% Wahlbeteiligung) von der Zustimmungquote Y_i der Bürger ab,

$$Y_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij},$$

und damit letztendlich von jeder einzelnen Stimme Y_{ij} der Bürger in diesem Land. Bei zwei Parteien/Koalitionen (Mehrheitsentscheidung) ist der Erwartungswert der Landes-Stimme gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zustimmungquote oberhalb 50% liegt:

$$E(Y_i) = P(Y_i > 0.5)$$

Die Voting Power $P_{ij} = E(Y_i|Y_{ij} = 1) - E(Y_i|Y_{ij} = 0)$ der Stimme Y_{ij} eines Bürgers j bezüglich der Landes-Entscheidung Y_i ist offensichtlich durch die Änderung der bedingten Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P_{ij} = P(Y_i > 0.5|Y_{ij} = 1) - P(Y_i > 0.5|Y_{ij} = 0). \quad (\text{A.1})$$

Da die Stimmen der anderen Bürger $j' \neq j$ nach Voraussetzung unabhängig von j sind, kann man auch schreiben

$$P_{ij} = P\left(\frac{1}{N_i} \sum_{j'} Y_{ij'} > 0.5 - \frac{1}{N_i}\right) - P\left(\frac{1}{N_i} \sum_{j'} Y_{ij'} > 0.5\right).$$

A. Appendix

Mit der allgemeinen Definition von Verteilungsfunktion (Vgl. Statistik-Vorlesung) $F_y(y) = P(Y \leq y)$ und ihrer Dichte $f_y(y) = \frac{dF(y)}{dy}$ erhält man

$$P_{ij} = F_{y_i}(0.5) - F_{y_i}(0.5 - 1/N_i) \approx \frac{f_{y_i}(0.5)}{N_i}. \quad (\text{A.2})$$

Die Zustimmungsqote Y_i der Bürger eines Landes und damit ihre Dichtefunktion $f_{y_i}(y)$ gehorchen der selben statistischen Verteilung wie die Anteilswerte in Abschnitt 9.2.3, also $E(Y_i) = \mu$ und $V(Y_i) = \mu(1 - \mu)/N_i$. Wegen der großen Bevölkerungszahl gilt auf jedem Fall der zentrale Grenzwertsatz, Y_i ist also normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz $\mu(1 - \mu)/N_i$. Setzt man die Dichtefunktion dieser Normalverteilung in Gl. (A.2) ein, erhält man

$$P_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2N_i\pi\mu(1-\mu)}} e^{-\frac{N_i(0.5-\mu)^2}{2\mu(1-\mu)}}. \quad (\text{A.3})$$

Da nun nach Voraussetzung die Voting Power $Q_i = E(Z|Y_i = 1) - E(Z|Y_i = 0)$ eines Landes bei der Europawahl proportional seiner Gewichtung w_i ist, $Q_i = \alpha w_i$, gilt für die Voting-Power Q_{ij} eines Einzelbürgers bezüglich der Europarat-Entscheidung nach (A.1)

$$Q_{ij} = E(Z|Y_{ij} = 1) - E(Z|Y_{ij} = 0) = \alpha w_i P_{ij}. \quad (\text{A.4})$$

Setzt man nun gemäß Aufgabenstellung in allen Ländern denselben Mittelwert $\mu = 0.5$ für die Zustimmungsqote voraus, erhält man nach Einsetzen von (A.3) in (A.4)

$$Q_{ij} = \alpha w_i \sqrt{\frac{2}{N_i\pi}}.$$

Damit haben in Europawahlen alle Bürger denselben Wert der Voting Power, falls

$$w_i \propto \sqrt{N_i},$$

womit der ‘‘Quadratwurzelvorschlag’’ begründet ist.

Bemerkung Während das Ergebnis (A.3) von den Arbeit von Penrose und Banzhaff schon lange bekannt ist, wurde die Anwendung auf die Europawahl mit den zusätzlichen Annahmen (A.4) und $\mu = 0.5$ erst kürzlich vorgestellt.¹ Die Annahme (A.4) ist durchaus nichttrivial und nur für bestimmte Werte des Quorums (im konkreten Fall $R = 0.62$) hinreichend gut erfüllt.

¹Zwei der vier Autoren der wichtigsten Arbeit zu diesem Thema sind Polen.

A.2. Zu Abschnitt 9: Optimale Aufteilung der Schichten einer Stichprobe



Offensichtlich kann man mit Entzerrungsfaktoren auch eine Stichprobe mit “falschen” Anteilen der verschiedenen Klassen des Quotenmerkmals erwartungstreu schätzen. Dies ermöglicht es, eine Quoten-Stichprobe mit gezielt verzerrten Quoten zu ziehen unter der Zielsetzung das die Varianz (9.21) des entzerrenden Erwartungswertschätzers $\hat{\mu}^{(E)}$ minimal wird, vgl. Abb. 9.3. Konkret wird bei festem Stichprobenumfang $n = \sum_k n_k$ die Varianz (9.21) nur in Abhängigkeit der festen wahren Anteile und der einzelnen absoluten Stichprobenhäufigkeiten n_k ausgedrückt (vgl. zweite Zeile der Herleitung dieser Formel) und unter der Nebenbedingung eines festen Stichprobenumfangs minimiert:

$$V(\hat{\mu}^{(E)}) = V(n_1, n_2, \dots) = \sum_k \vartheta_k^2 \frac{\sigma_k^2}{n_k} \stackrel{!}{=} \min_{n_1, n_2, \dots}, \quad \sum_k n_k = n. \quad (\text{A.5})$$

Dies geschieht mit dem sog. “Lagrange-Verfahren”, bei der nicht die Funktion selbst, sondern die Summe aus der Funktion und der mit sog. “Lagrange-Faktoren” multiplizierten Nebenbedingungen gleich 0 gesetzt wird:

$$\frac{\partial V(n_1, n_2, \dots)}{\partial n_k} + \lambda \frac{\partial}{\partial n_k} \left(\sum_{k'} n_{k'} - n \right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies führt zu

$$\frac{-\vartheta_k^2 \sigma_k^2}{n_k^2} + \lambda = 0,$$

also ist für alle k das Produkt $\vartheta_k \sigma_k / n_k$ konstant, also n_k proportional zu $\vartheta_k \sigma_k$. Aus der Nebenbedingung $\sum_k n_k = n$ ergibt sich damit folgende “optimale” Schichtung, ausgedrückt als relativen Stichprobenhäufigkeiten f_k der Klassen des Schichtungsmerkmals:

$$f_k^{\text{opt}} = \frac{n_k^{\text{opt}}}{n} = \frac{\vartheta_k \sigma_k}{\sum_{k'} \vartheta_{k'} \sigma_{k'}} \quad (\text{A.6})$$

und nach Einsetzen in die Varianzformel die minimierte Varianz selbst:

$$V^{\text{opt}}(\hat{\mu}^{(E)}) = \frac{1}{n} \left(\sum_k \vartheta_k \sigma_k \right)^2. \quad (\text{A.7})$$

A. Appendix

Aufgabe: Studentenstadt

Berechnen Sie in dem bereits bei der Schichtung und Entzerrung verwendeten Beispiel der “Studentenstadt” die optimale Schichtung bezüglich Studierende und Nichtstudierende und die bei einem Stichprobenumfang von 2 500 resultierende Varianz und Standardabweichung des Merkmals “MIV-Bevorzugung”.

Lösung:

$$n_1^{\text{opt}} = 843, \quad n_2^{\text{opt}} = n - n_1^{\text{opt}} = 1\,657$$

$$E_1 = 1.186, \quad E_2 = 0.906, \quad V(\hat{\mu}^{(E)}) = 6.14 * 10^{-5},$$

und damit eine Standardabweichung von $\sqrt{V} = 0.784\%$. Dies ist nur minimal besser als die Entzerrung bei Zufallsauswahl. Allgemein liefert die “optimale Schichtung” nur dann nennenswerte Vorteile, wenn die Varianzen innerhalb der Schichten sich stark unterscheiden. Dann werden die Schichten mit vergleichsweise großer Varianz überproportional berücksichtigt.