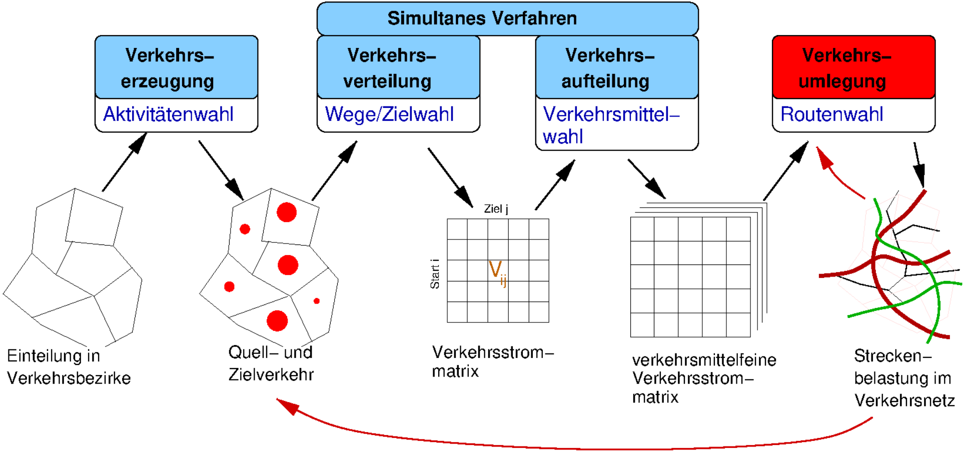
8. Routenwahl bzw. Umlegung



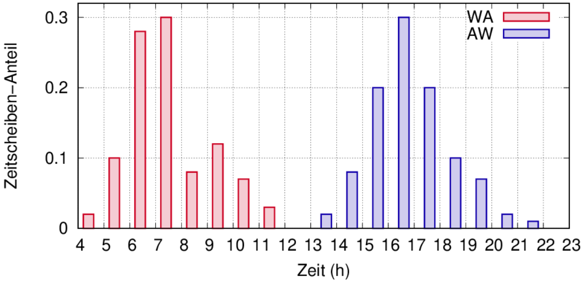
8.1 Allgemeines zur Umlegung

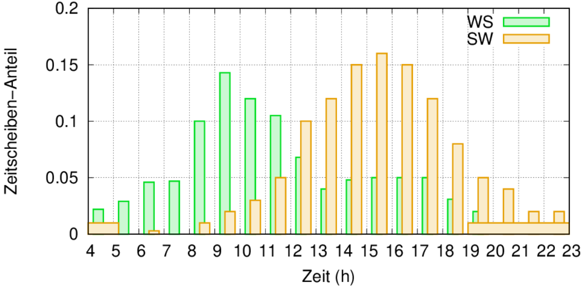
In der **Umlegung** werden die einzelnen Elemente der Verkehrsnachfrage auf die Routenalternativen des *konkreten Verkehrsnetzes* aufgeteilt ("umgelegt")

- Die drei vorhergehenden Schritte Verkehrserzeugung, -verteilung und -aufteilung beinhalten die **Nachfragemodellierung**, die Umlegung die **Angebotsmodellierung** sowie das **Matchen von Nachfrage und Angebot**
- Nachfrage: Verkehrsstrommatrizen V_{ijk} $\Rightarrow$ Aggregierung und Disaggregierung $\Rightarrow$ **Fahrtenmatrizen**
- Angebot: das aus Straßen, Wegen und ÖV-Linien bestehende **Strecken-Netzwerk**
- Kopplung der Nachfrage an das Angebot über **Anbindungsknoten**

Umlegung $\hat{=}$ Findung des "Marktgleichgewichts". Der mit der Nachfrage steigende "Preis" wird in Form von Reiszeit durch **Capacity-Restraint-Funktionen** modelliert

8.2 Aufbereitung der Nachfrageseite: Tagesganglinien und Fahrtenmatrizen

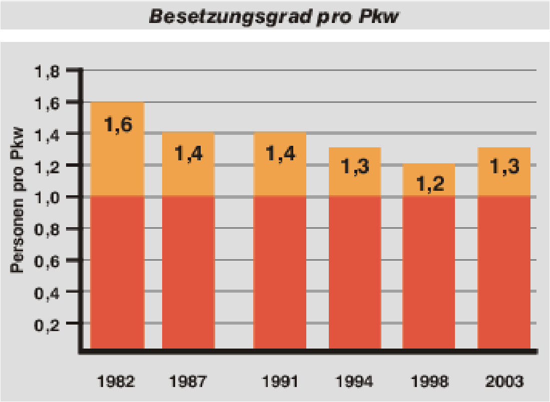




- Interesse an Rush-Hours $\Rightarrow$ Disaggregierung der Verkehrsstrommatrizen durch die **Tagesganglinien** $f^g_{\text{TGL}}(t)$: $V^g_{ijk}(t) = V^g_{ijk} f^g_{\text{TGL}}(t)$
- Fahrten, nicht Wege sind für den Stau relevant (nur MIV): **Fahrtenmatrizen** $F^g_{ijk}(t) = V^g_{ijk}(t)/b^g_k$ (b^g_k : mittlere Fahrzeugbelegung QZG g)
- Sowohl der Tourist als auch der Manager stehen im Stau: Aggregierung über die QZG $F_{ijk}(t) = \sum_g F^g_{ijk}(t)$
- Alles zusammen:

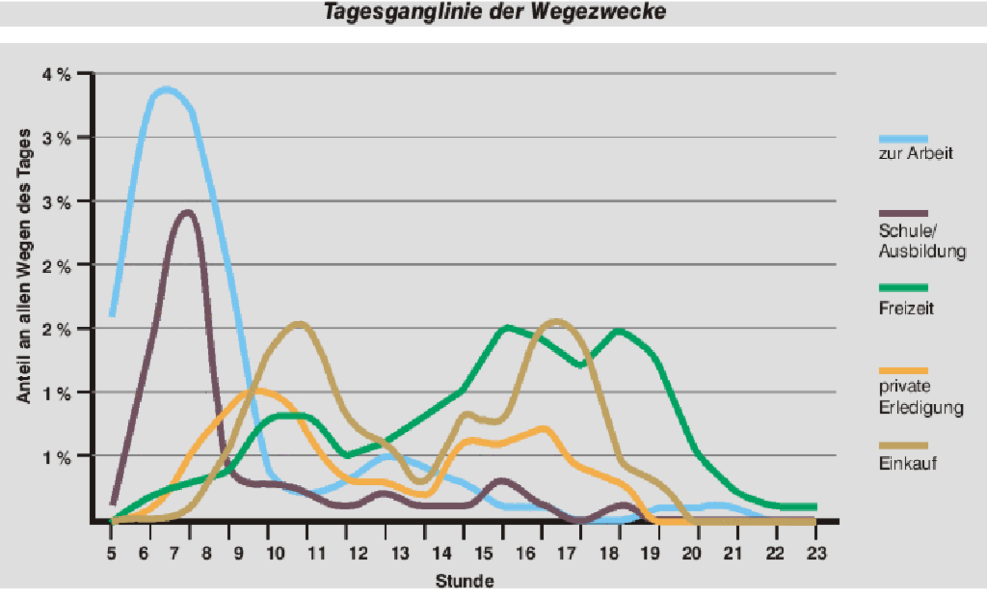
$$F_{ijk}(t) = \sum_g V^g_{ijk}(t)/b^g_k \, f^g_{\text{TGL}}(t)$$

8.2 Nachfrageseite: Herleitung der Fahrtenmatrizen

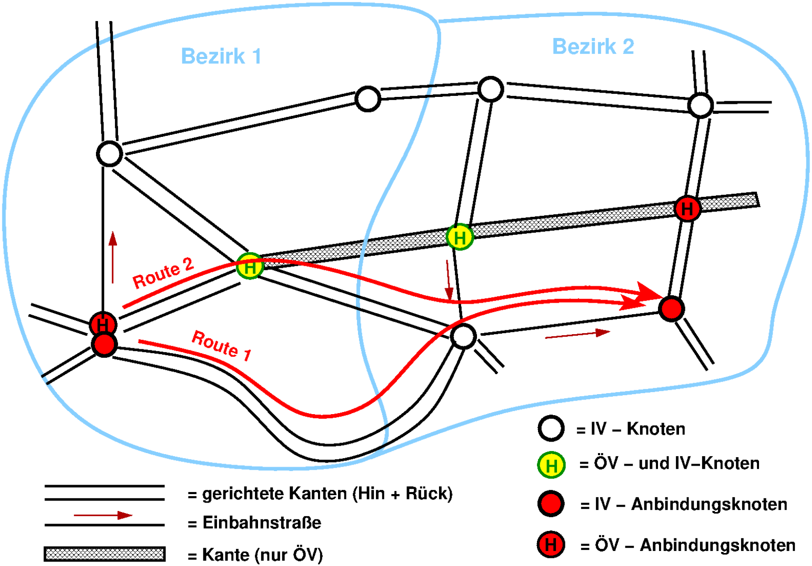


- ? Welche Größenordnung hat b^g_{Rad}? $=1$
- ? Warum muss man zuerst disaggregieren und dann aggregieren? Um die QZG-Abhängigkeit bei den TGL und bestezungszahlen zu berücksichtigen
- ? Warum ist die Aggregierung verschiedener IV-Modi wie Fuß, Rad und MIV zum System "IV" (im Modal Split werden also nur zwei Modi unterschieden) problematisch bzw. inkonsistent? Unterschiedliche Entfernungen und Geschwindigkeiten

8.2 Nachfrageseite: Mobilitätsbezogene Tagesganglinien

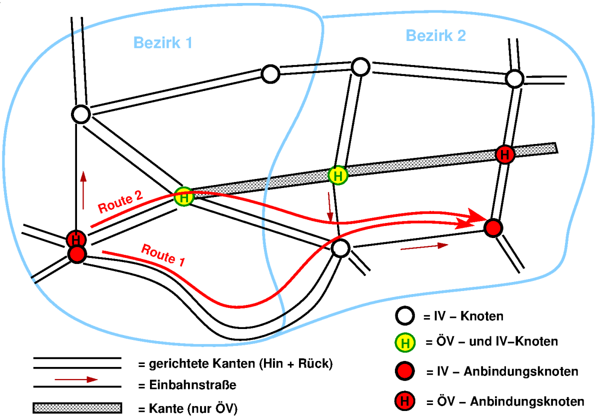


8.3 Netzmodellierung



Netz $\hat{=}$ **gerichteter Graph** aus Kanten (*links* l) und Knoten (*nodes* n)
Kopplung an die Nachfrage durch **Anbindeknoten**

Attribute der Netzelemente



- Separate Netze für IV und ÖV: Knoten sind Kreuzungen bzw Haltestellen und Kanten Straßenabschnitte bzw. die Strecke zwischen benachbarten Haltestellen
- Attribute Knoten: Abbiegebeziehungen und Status **Anbindungsknoten** oder nicht
- Attribute der Kanten l: Länge L_l, Max-Geschwindigkeit v_{0l} bzw. Minimumszeit T_{0l}, Kapazität K_l

8.4 Capacity-Restraint Funktionen

Die **Capacity-Restraint Funktion** bzw **CR Funktion** (deutsch: Kapazitätsbeschränkungsfunktion) $T_l(Q)$ gibt summarisch-makroskopisch die Verlängerung der Reisezeit auf einer Kante mit der Verkehrsbelastung an

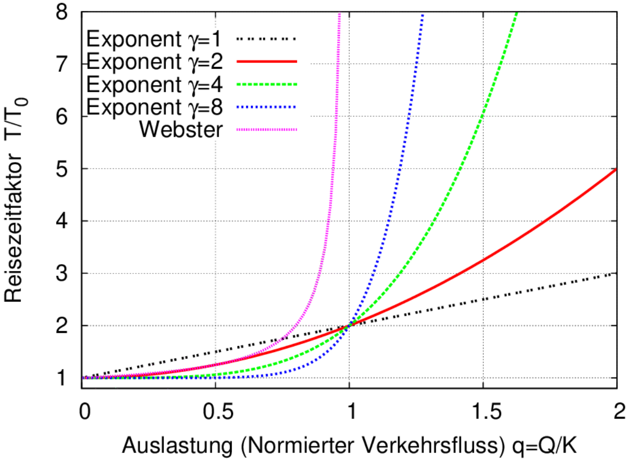
- Plausibilitätsbedingungen:

$$T_l(0) = T_{l0}, \quad T_l'(Q) \geq 0, \quad \lim_{Q \to \infty} T_l(Q) \to \infty, \quad T_l''(Q) \geq 0 \text{ (optional)}$$

- Die CR-Funktionen modellieren *keine* Dynamik und auch kein Fließgleichgewicht
- Oft gilt $T_l(K_l) = 2T_{l0}$

? Warum wäre im Fließgleichgewicht $T_l(Q)$ für $Q > K_l$ nicht definiert? Da sich dann der Stau immer weiter ausbreiten würde

BPR (Bureauf of Public Roads) CR-Funktion



$$T_l(Q) = T_{l0}\left[1 + \left(\frac{Q}{K_l}\right)^\gamma\right] = T_{l0}(1 + q^\gamma)$$

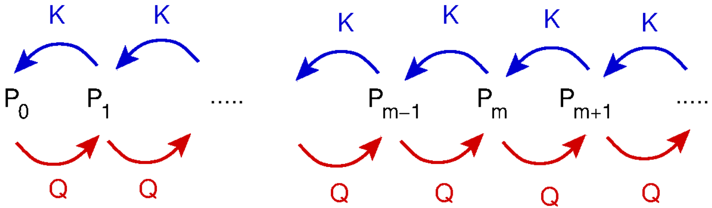
? Erläutern Sie die Parameter der BPR CR-Funktion

T_{l0} Mindestzeit (freies Netz), K_l: Kapazität (max. Durchfluss ohne starke Staus), γ: Wie stark die Reisezeit bei Überlastung ansteigt

? Eine 1 km lange Kante mit einem Tempolimit von 30 km/h habe einen mit der Belastung linearen Anstieg der Reisezeit. Geben Sie die Parameterwerte an

$T_{l0} = 2$ [Minuten], $\gamma = 1$, K: unbestimmt

Mögliche CR-Funktion im Fließgleichgewicht: Webster-Formel



Annahmen:

- Neuankommende Fahrzeuge kommen zufällig gemäß einer **Poisson-Verteilung** mit der mittleren Ankunftsrate Q an die Engstelle.
- Die Zahl der pro Zeiteinheit "abgefertigten" (durch die Engstelle fahrenden) Fahrzeuge ist ebenfalls poissonverteilt mit der "Abfertigungsrate" K.
- Kommen mehr Fahrzeuge an als abgefertigt werden, bildet sich eine "Warteschlange". Dies kann durchaus auch temporär für $Q < K$ passieren.
- Da Poissonverteilungen konstanten Ankunfts- und Abfertigungsraten entsprechen, ändert sich die Wahrscheinlichkeit P_m dafür, dass die Warteschlange genau m Fahrzeuge lang ist, durch die "Zuflüsse" QP_{m-1} (neues Fahrzeug trifft auf Schlange mit $m-1$ Fahrzeugen) und KP_{m+1} (ein Fahrzeug einer $m+1$-Schlange wird abgefertigt). Die "Abflüsse" sind die Neuankunft und Abfertigung bei Schlangenlänge m: $-(Q+K)P_m$

Webster-Formel II: Herleitung

Fließgleichgewicht, also Bilanz der zu- und abgehenen “Wahrscheinlichkeitsströme”:

$$QP_{m-1} + KP_{m+1} - (Q+K)P_m = 0, \quad \text{“Anfangsbedingung”} \quad KP_1 - QP_0 = 0$$

Daraus (geometrische Reihe nutzen) Schlangenlängenverteilung

$$P_m = (1-q)q^m, \quad q = \frac{Q}{K}$$

Rechnung (wieder geometrische Reihe nutzen)

mittlere Schlangenlänge $$E(m) = \frac{q}{1-q}$$

mittlere Wartezeit $$T_w = \frac{E(m)}{K} = \frac{q}{K(1-q)}$$

Link-Reisezeit $$T(q) = T_0 + T_w = T_0 + \frac{q}{K(1-q)}$$

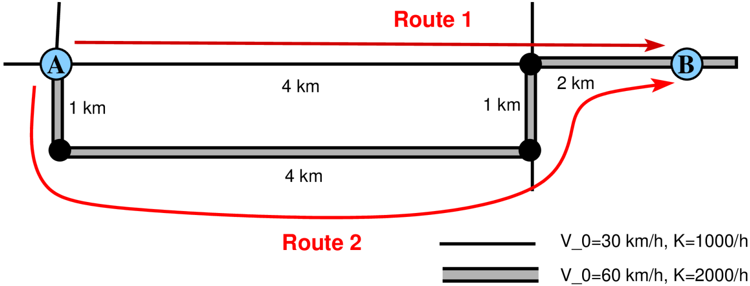
8.5 Erstes Wardrop'sches Prinzip: Nutzergleichgewicht

Erstes Wardrop'sches Prinzip: Unter schwachen Bedingungen (monoton steigende CR-Funktionen und Link-Additivität) gibt es ein eindeutiges und stabiles **Nutzergleichgewicht** (*user equilibrium*, UE), in welchem die Reisezeiten aller befahrenen Routen gleich und minimal sind.

$$T_r^{(\mathrm{m})} = \begin{cases} T_{\mathrm{min}}^{(m)} & \text{falls } F_{m,r} = F_m w_r > 0, \\ > T_{\mathrm{min}}^{(m)} & \text{falls } F_{m,r} = w_r = 0 \end{cases}$$

- $m = \{ijkt\}$: betrachtetes Fahrtenmatrixelement
- r: Route, Folge von Links vom Start- zum Zielanbindungsknoten
- T_r: Reisezeit (allgemein: Disutility bzw Widerstand) der Route r (link-additiv)
- T_{min}: Mindestreisezeit bzw. -widerstand aller Routen
- w_r: Anteil des Fahrtenmatrixelements, welcher auf die Route r umgelegt wurde

Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip



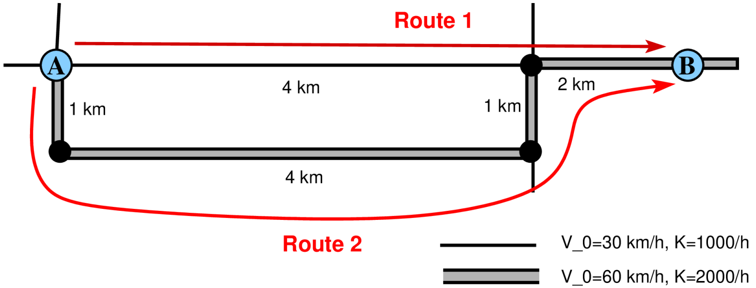
Zwei Routen von A nach B (entspricht $m = \{ijkt\}$) mit 2 bzw. 4 Kanten

? Bestimme für lineare CR-Funktionen die Reisezeiten als Funktion der Nachfragen Q_1 und Q_2 auf beiden Routen

! Beachte, dass beide Routen die letzten Kante gemeinsam haben $\Rightarrow$ Koppelung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{4\,\mathrm{km}}{V_{01}}\left(1+\frac{Q_1}{K_1}\right)+\frac{2\,\mathrm{km}}{V_{02}}\left(1+\frac{Q_1+Q_2}{K_2}\right), \\ T_2 &= \frac{6\,\mathrm{km}}{V_{02}}\left(1+\frac{Q_2}{K_2}\right)+\frac{2\,\mathrm{km}}{V_{02}}\left(1+\frac{Q_1+Q_2}{K_2}\right) \end{aligned}$$

Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip



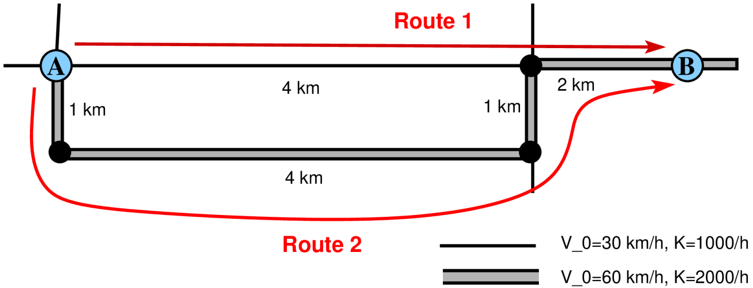
? Nutze die Summenbedingung $Q_1 + Q_2 = Q_{\text{AB}}$ und drücke T_1 und T_2 in Minuten als Funktion von $q = Q_{\text{AB}}/K_1$ und den Routenanteil w_1 aus

! Ersetze $Q_1 = Q_{\text{AB}} w_1 = qK_1 w_1$ sowie $Q_2 = Q_{\text{AB}}(1-w_1) = qK_1(1-w_1)w$ und berechne (in Minuten): $\frac{4\,\text{km}}{V_{01}} = 8$, $\frac{2\,\text{km}}{V_{02}} = 2$ und $\frac{6\,\text{km}}{V_{02}} = 6$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
T_1(q, w_1) &= \frac{4\,\text{km}}{V_{01}}(1 + qw_1) + \frac{2\,\text{km}}{V_{02}}(1 + q/2) &&= 10 + 8qw_1 + q, \\
T_2(q, w_1) &= \frac{6\,\text{km}}{V_{02}}(1 + q(1-w_1)/2) + \frac{2\,\text{km}}{V_{02}}(1 + q/2) &&= 8 - 3qw_1 + 4q
\end{aligned}$$

Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip



? Aufteilung im Nutzergleichgewicht?

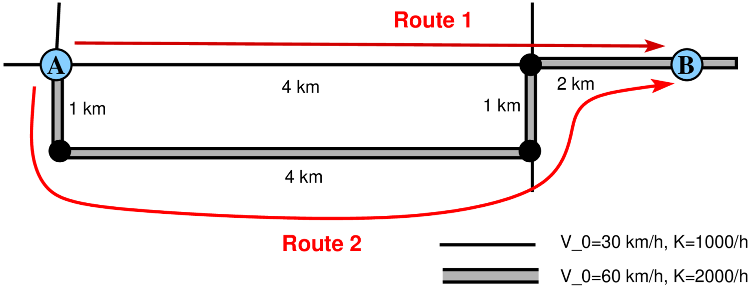
! Gehe zunächst von $0 < w_1 < 1$ aus und wende die *Gleichheitsbedingung* ("alle befahrenen Routen haben dieselbe Reisezeit") an:

$$T_1(q, w_1) = T_2(q, w_1) \quad \rightarrow \quad w_1(q) = \frac{3q - 2}{11q}$$

! Teste nun, wann $0 < w_1 < 1$ verletzt ist: Falls $q < 2/3$, ist $w_1 < 0$ bzw. (Ungleichheitsbedingung) $w_1 = 0$ und $T_1 > T_2 \Rightarrow$ Zusammen:

$$w_1^{\text{UE}}(q) = \begin{cases} \frac{3q-2}{11q} & \text{falls } q \geq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}, \quad w_2^{\text{UE}}(q) = 1 - w_1^{\text{UE}}(q),$$

Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip



? Geben Sie schließlich die Reisezeiten im UE an

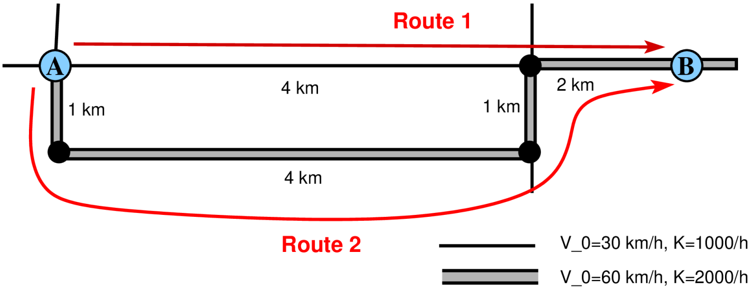
! Die Reisezeiten sind nur für befahrene Routen relevant, dann gilt

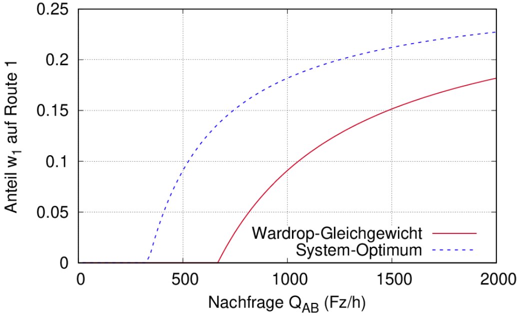
$$T^{\mathsf{UE}}(q) = T_r(w_r^{\mathsf{UE}}(q)) \mid 0 < w_r^{\mathsf{UE}}(q) \leq 1$$

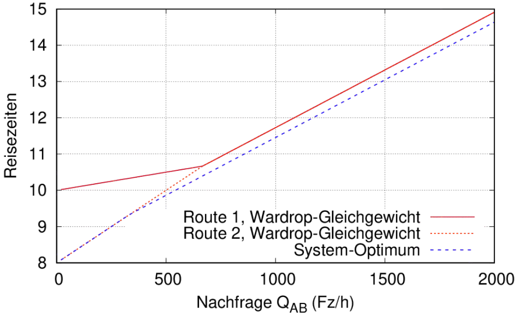
also

$$T^{\mathsf{UE}}(q) = \begin{cases} \frac{94+35q}{11} & q \geq \frac{2}{3} \\ 8 + 4q & \text{sonst.} \end{cases}$$

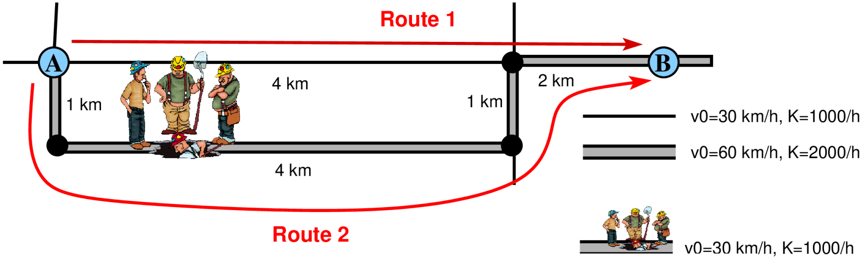
Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip: Ergebnisse

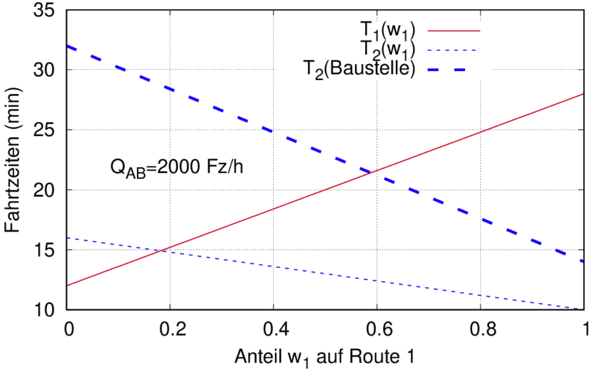






Verschiebung des UE durch eine Baustelle auf Route 2





8.6 Zweites Wardrop'sches Prinzip: Systemoptimum

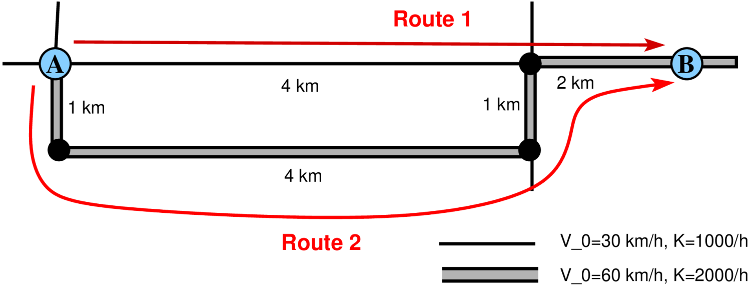
Zweites Wardrop'sches Prinzip: Unter schwachen Bedingungen (monoton steigende CR-Funktionen, Link-Additivität) gibt es einen eindeutiges **Systemoptimum** (*system optimum*, SO), welcher den Gesamtnutzen aller Verkehrsteilnehmer maximiert.

Spezialfall: Umlegung des Fahrtenmatrixelements F_{AB} wird zur Minimierungsaufgabe für $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ...)'$:

$$
\begin{array}{ll}
T_{\text{sys}}(\boldsymbol{w}) = & \sum_r w_r T_r(F_{\text{AB}}\boldsymbol{w}) = \min_{\boldsymbol{w}}! \\
\text{s.t. (subject to)} & \sum_r w_r = 1, \quad \text{sowie} \quad 0 \le w_r \le 1 \quad \text{für alle } r.
\end{array}
$$

- Das Systemoptimum (SO) entspricht i.A. nicht dem UE. Insbesondere ist es kein Gleichgewichtszustand, nicht einmal ein instabiler.
- Das Dilemma am Systemoptimum ist, dass es nicht für alle *individuellen* Verkehrsteilnehmer vorteilhaft ist. Es muss vielmehr extern erzwungen werden

Beispiel zum zweiten Wardrop'sches Prinzip



$$\begin{aligned} T_1(q, w_1) &= 10 + 8qw_1 + q, \\ T_2(q, w_1) &= 8 - 3qw_1 + 4q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{sys}}(\boldsymbol{w}) &= w_1 T_1(q, w_1) + w_2 T_2(q, w_1) \\ &= w_1 T_1(q, w_1) + (1 - w_1) T_2(q, w_1) \\ &= 11qw_1^2 + (2 - 6q)w_1 + 8 + 4q \stackrel{!}{=} \min_{w_1} \\ T'_{\text{sys}}(w_1) &= 22qw_1 + 2 - 6q \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \\ w_1^{\text{SO}} &= \begin{cases} \frac{3q-1}{11q} & q \geq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

8.7 Zusammenhang zwischen Nutzergleichgewicht und Systemoptimum

- Wir haben das UE lokal (Gleichsetzung der Reisezeiten befahrener Routen) und das SO global (Minimierung einer Zielfunktion: Totale Reisezeit) formuliert

- **Beckmann et. al.** zeigten, dass für beliebig viele Nachfrageelemente (=Fahrtenmatrixelemente) sowohl UE als auch SO
  - lokal (paarweiser Vergleich von Routenalternativen)
  - und global (Extremalprinzip)

  formuliert werden können, *indem man die CR-Funktionen verändert*.

- Anwendungsmöglichkeiten:
  1. Mathematische Beweise (**Kuhn-Tucker-Theorem**) und numerische Lösungsmethoden (**Frank-Wolfe-Algorithmus**): Diese funktionieren global besser
  2. Veranschaulichung des SO: Reformuliert man das die Reisezeitsumme minimierende globale SO lokal mit modifizierten CR-Funktionen $\tilde{T}_l(Q)$, entspricht das einem UE für $\tilde{T}_l(Q)$, also UE$(\{\tilde{T}_l\})$ = SO$(\{T_l\})$

  $\Rightarrow$ Die Differenz $\tilde{T}_l(Q) - T_l(Q)$ entspricht also direkt politischen Steuerungsmaßnahmen, die aus einem UE bezüglich T_l ein stabiles SO bezüglich dieser Größe machen.

Beckmann'sche Umformulierungen

Formulierung	UE bezüglich T_l	SO bezüglich T_l
Lokale Formulierung	$\left(T_{ijr} - T_{ij}^{\text{UE}}\right) F_{ijr} = 0$	$\left(\tilde{T}_{ijr} - \tilde{T}_{ij}^{\text{UE}}\right) F_{ijr} = 0$
Globale Formulierung	$\sum_{l \in \text{Netz}} Q_l T_l^*(Q_l) = \min!$	$\sum_{l \in \text{Netz}} Q_l T_l(Q_l) = \min!$

- Gesamtzeit für die Route r der Relation $i \to j$: $T_{ijr} = \sum_{l \in (r,i,j)} T_l(Q_l)$
- Verkehrsaufkommen auf Route r der Relation $i \to j$: $F_{ijr} = F_{ij} w_r$
- Gesamtfluss auf Link l (nur $k =$ MIV betrachtet):

$$Q_l = \sum_{ij} \sum_{r=1}^{n_{ij}} F_{ijr} \begin{cases} 1 & \text{Link } l \text{ in } (r,i,j) \\ 0 & \text{Link } l \text{ nicht in } (r,i,j) \end{cases}$$

- Modifizierte CR-Funktionen:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_l(Q) &= T_l(Q) + Q \frac{\mathrm{d}T_l}{\mathrm{d}Q}, \\ T_l^*(Q) &= \frac{1}{Q} \int_0^Q \mathrm{d}Q' \; T_l(Q') \end{aligned}$$

Streckenmaut

? Wie viel verkehrs- und streckenabhängige Maut muss ich erheben, um bei einem gewissen wahrgenommenen Zeitwert β_T [€/Minute] ein Systemoptimum bezüglich der Reisezeiten in ein stabiles UE bezüglich der aus Maut und Reisezeiten bestehenden Kosten umzuwandeln? Nehmen Sie BPR CR-Funktionen $T_l(Q) = T_{l0}\left[1 + (Q/K_l)^\gamma\right]$ an

! Die Streckenmaut ist die Summe der Mautgebühren auf jedem Link l der gewählten Route. Die Link-Maut [€] wird gemäß der Tabelle

$$\begin{aligned} M_l &= \beta_T\left[\tilde{T}_l(Q) - T_l(Q)\right] \\ &= \beta_T\left[T_l(Q) + Q\frac{\mathrm{d}T_l}{\mathrm{d}Q} - T_l(Q)\right] = \beta_T Q\frac{\mathrm{d}T_l}{\mathrm{d}Q} \\ &= \beta_T\gamma T_{l0}\left(\frac{Q}{K_l}\right)^\gamma = \beta_T\gamma(T_l(Q) - T_{l0}) \end{aligned}$$

Da die Mautkosten und Routen-Reisezeiten link-additiv sind, gilt dies nicht nur für Links, sondern auch für jede Route:

> Die Streckenmaut, um ein UE bezüglich der Reisezeit in ein SO bezüglich dieser Zeit umzuwandeln, ist gleich dem subjektiven Zeitwert multipliziert mit dem γ-fache der verkehrsbedingten Zeitverzögerung auf dieser Route bzw allgemein der Grenzzeitverzögerung

Bemerkungen zur Streckenmautformel

- Allgemein ist die Maut proportional zu den zeitlichen Grenzkosten: Summierte Zeiterhöhung für aller Verkehrsteilnehmer, wenn ich diese Route jetzt befahre, verglichen mit dem Verzicht. Bei der BPR-CR ist dies gleich dem γ-fachen der Zeiterhöhung für mich durch alle anderen Verkehrsteilnehmer
- Jedes Navi mit verkehrsabhängiger Reisezeitberechnung könnte also auch die Maut berechnen
- Bei einigen ändert sich durch die Linkbewertung mit $\tilde{T}_l$ anstelle T_l nichts.
- In Praxi könnte man für die anderen Verkehrsteilnehmer zwischen schnellsten Weg (Maut M_r) und systemoptimalen Umweg (keine Maut) wählen lassen und jeden Monat die eingenommene Maut an alle Kfz-Besitzer gleichmäßig verteilen (Kostenneutralität)
- Der Zeitwert β_T pegelt sich dann auf den des Teilnehmers ein, der die Maut gerade noch bezahlt, um Zeit zu sparen
- Pssst!

8.8 Stochastisches Nutzergleichgewicht: Problemstellung

Gegeben: Netzwerk mit zwei Routen mit stochastischer Zeitdifferenz

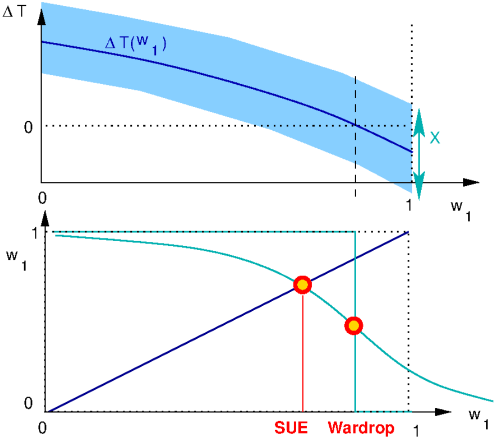
$$\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2 = \Delta T(w_1) + X$$

mit beliebig verteilter Zufallsgröße X, o.E.d.A $E(X) = 0$

Wahrscheinlichkeit, Route 1 zu wählen:

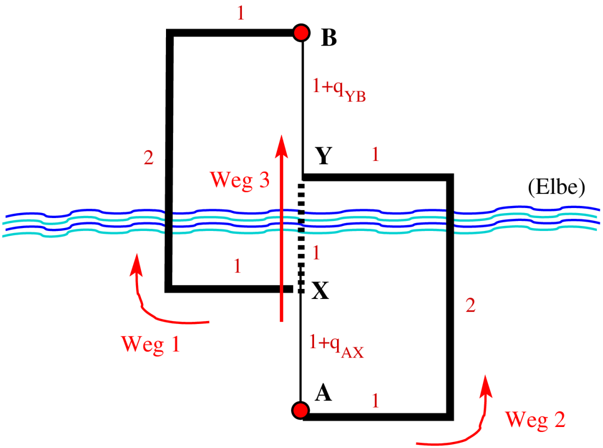
$$\begin{aligned} w_1 &= P(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2 < 0) \\ &= P(\Delta T(w_1) + X < 0) \\ &= P(X < -\Delta T(w_1)) \\ &= F_X(-\Delta T(w_1)) \end{aligned}$$

Implizite Gleichung für den SUE-Wert von w_1:
Der Wert von w_1 ist immer näher an 0.5 als bei einer deterministischen Umlegung



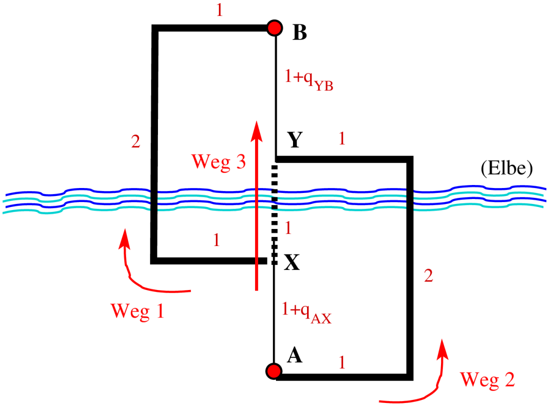
8.9 Fun Fact: Das Braess'sche Paradoxon

Braess Paradoxon: Das Erweitern oder Hinzufügen von Straßen kann die Reisezeit bzw. den Nutzen im UE *für alle* verschlechtern.



- Das Paradox kann auftreten, wenn eine neu eröffnete Strecke (Route 3) (i) sehr kurz ist, (ii) viele Kanten geringer Kapazität hat, (iii) diese Kanten auch von den anderen Routen benutzt werden
- kurz ⇒ viele wählen R3 ⇒ mehr Verkehr auf kleinen Straßen ⇒ Zeitverlust für alle

Das Braess'sche Paradoxon: Rechenbeispiel



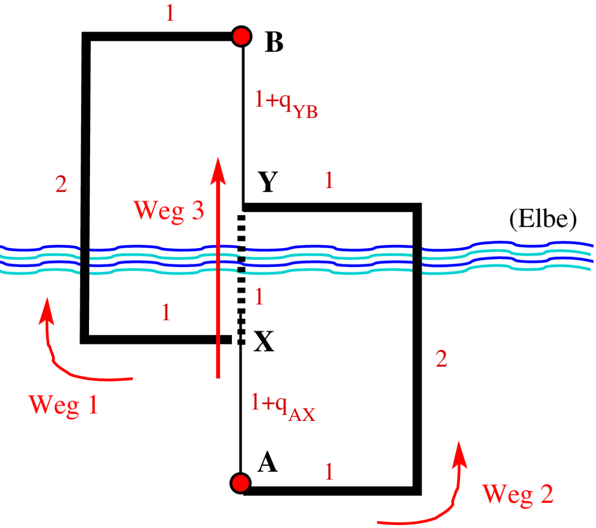
dicke Strecken: Unendliche Kapazität
dünne Strecken: endliche Kapazität K, $q = Q_{\mathsf{AB}}/K$

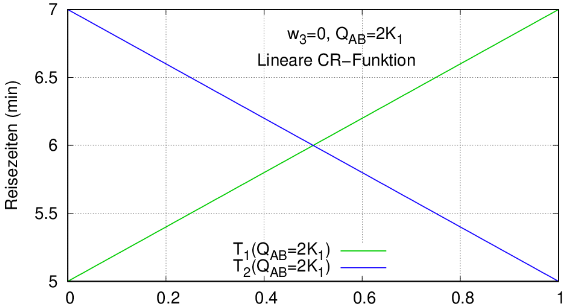
Symmetrie: $w_1 = w_2$ und Summenbedingung: $w_1 + w_2 + w_3 = 1$

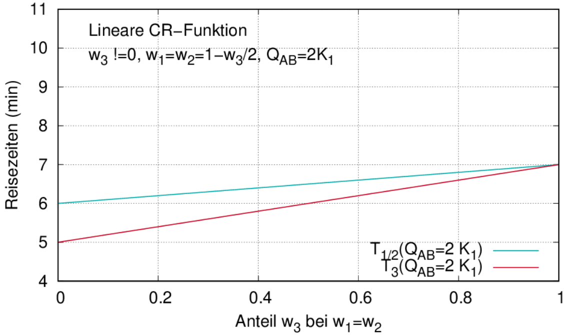
$$\Rightarrow \; w_1 = w_2 = (1 - w_3)/2$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= 5 + (w_1 + w_3)q && = 5 + (1 + w_3)q/2, \\
T_2 &= 5 + (w_2 + w_3)q && = 5 + (1 + w_3)q/2, \\
T_3 &= 3 + (w_1 + w_3 + w_2 + w_3)q && = 3 + (1 + w_3)q
\end{aligned}$$

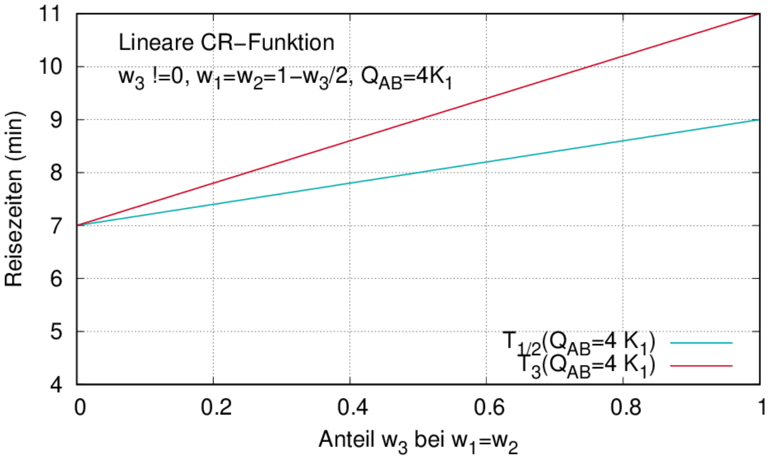
Braess'sche Paradoxon: Reisezeiten bei $Q_{AB} = 2K$



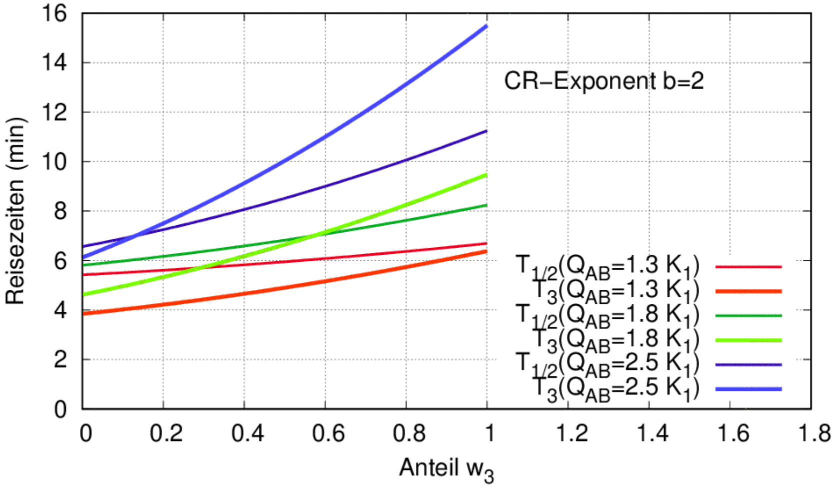




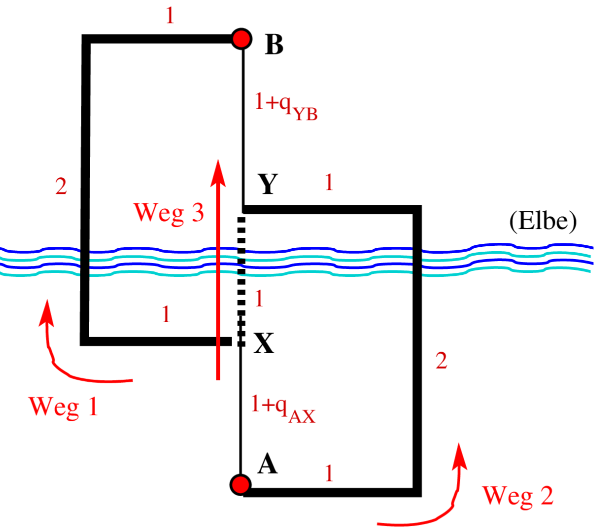
Braess'sche Paradoxon: Reisezeiten bei variabler Nachfrage Q_{AB}

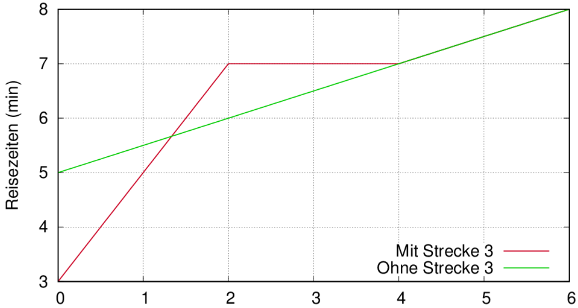


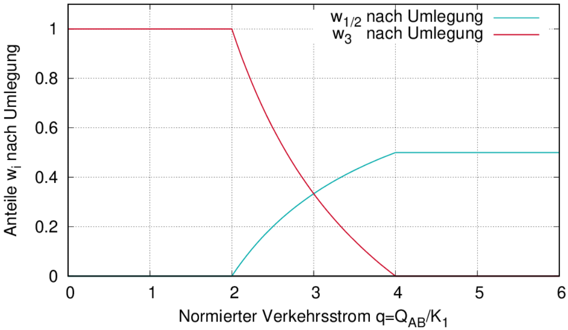
Braess'sche Paradoxon: Nicht auf lineare CR-Funktionen beschränkt



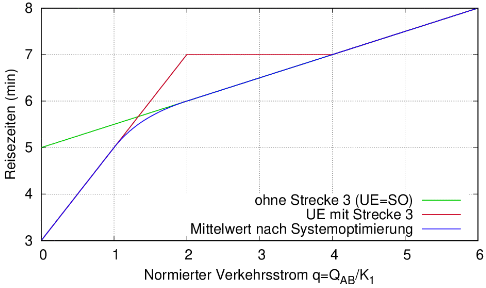
Braess'sche Paradoxon: Ergebnis des Rechenbeispiels

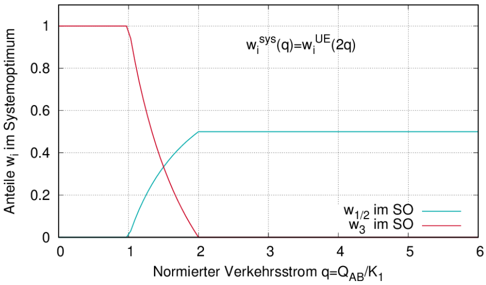






Braess'sche Paradoxon: Systemoptimum





Braess'sche Paradoxon: Stochastische Umlegung