

Verkehrsökonomie Bachelor-Kurs

Vorlesung 02: Mathematische Modelle

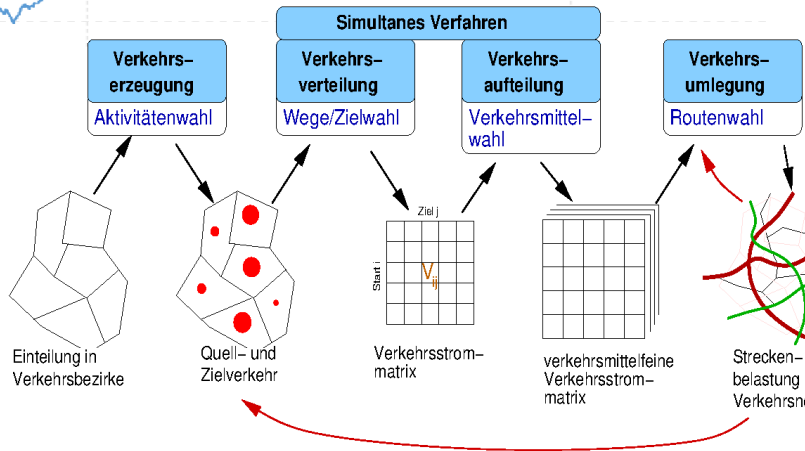
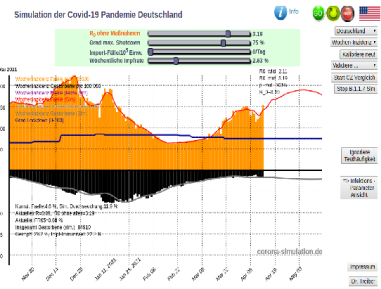
10,000

1,000

100



Simulation der Covid-19 Pandemie Deutschland



2. Mathematische Modelle

Zur Erinnerung: Mathematische Modell \Rightarrow **Modellfunktion**

$$f(\tilde{x}, \beta) + \epsilon$$

- ▶ Die Modellfunktion selbst (f , ggf ϵ) bestimmt die qualitativen Aspekte
- ▶ \tilde{x} sind die exogenen Variablen, die meist in Faktoren x zusammengefasst werden (s.u.)
- ▶ β sind die Modellparameter, die das Modell quantitativ einstellen
- ▶ ϵ die unbestimmten bzw. Zufallsanteile

Hier geht es nun um die Modellfunktion und mögliche Arten:

- ▶ Ein- oder Mehrgleichungsmodelle (Komponentenzahl von f gleich #endogener Variablen)
- ▶ linear vs. nichtlinear
- ▶ deterministisch ($\epsilon = 0$) vs. stochastisch
- ▶ interne Abhängigkeitsstrukturen: Modell besteht aus mehreren verketteten, gekoppelten oder rückgekoppelten Teilmodellen

Mach es so einfach wie möglich, aber nicht einfacher (Einstein)

2.1 Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle

Die Zahl der Gleichungen ist gleich der Zahl der (wesentlichen) endogenen Variablen

- ▶ Hat man nur eine endogene Variable Y wie bei Regressionsmodellen, reduziert sich im resultierenden **Eingleichungsmodell** die Funktion $f(\cdot)$ auf eine gewöhnliche skalare Funktion $f(\cdot)$
- ▶ **Lineares** Modell oder Modell ohne **Kopplung** der endogenen Variablen \Rightarrow ein Modell für $K > 1$ endogene Variable zerfällt in K Eingleichungsmodelle
- ▶ Beispiel Eingleichungsmodell: Verkehrsstärke als Funktion der Tageszeit, Verbrauch als Funktion der Geschwindigkeit, Beschleunigung und Steigung
- ▶ Beispiel **Mehrgleichungsmodell**: diskrete Wahlentscheidungen.
 - ▶ Die mikroskopischen endogenen Variablen $Y_k \in \{0, 1\}$ sind über die Bedingung $\sum_k Y_k = 1$ gekoppelt bzw. aggregiert
 - ▶ Die makroskopischen Wahrscheinlichkeiten $P_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$ sind ebenfalls durch $\sum_k P_k = 1$ gekoppelt

2.2 Linear vs. nichtlinear

Es gibt vier Stufen von Linearität zu Nichtlinearität:

1. Wahrhaft lineare Modelle:

$$Y = \hat{y}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\beta}) + \epsilon = \sum_{j=0}^J \beta_j \tilde{x}_j + \epsilon = \boldsymbol{\beta}' \tilde{\mathbf{x}} + \epsilon$$

Linearität \Rightarrow keine Kopplung der endogenen Variablen \Rightarrow man kann jede Komponente separat betrachten

2. Parameterlineare (quasilineare) Modelle

$$Y = \hat{y}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\beta}) + \epsilon = \sum_{j=0}^J \beta_j g_j(\tilde{\mathbf{x}}) + \epsilon = \sum_{j=0}^J \beta_j x_j + \epsilon = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x} + \epsilon$$

Linearisierung mit *aufgrund des Sachverhalts* festen Funktionen $x_j = g_j(\tilde{\mathbf{x}})$

- ▶ Die **linearen Faktoren** x_j werden die neuen exogenen Variablen des nun linearen Modells
- ▶ I.A. ist die Zahl der Faktoren \neq der Zahl der ursprünglichen exogenen Variablen \Rightarrow Beispiele

2.2.2 Beispiel 1: Jährliche Kilometerleistung mit dem Kfz

- ▶ y : Kilometerleistung (deterministisch, da “mittlere”),
 \tilde{x}_1 : Einkommen [€/Jahr], \tilde{x}_2 : Spritkosten [€/Liter]

$$x_0 = g_0(\tilde{\mathbf{x}}) = 1,$$

$$x_1 = g_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_1,$$

$$x_2 = g_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_2,$$

$$x_3 = g_3(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_1\tilde{x}_2$$

- ▶ Zwei exogene Variable \Rightarrow vier Faktoren:

$$\Rightarrow \text{Modell: } y = \beta_0 + \beta_1\tilde{x}_1 + \beta_2\tilde{x}_2 + \beta_3\tilde{x}_1\tilde{x}_2 = \sum_{j=0}^3 \beta_j x_j$$

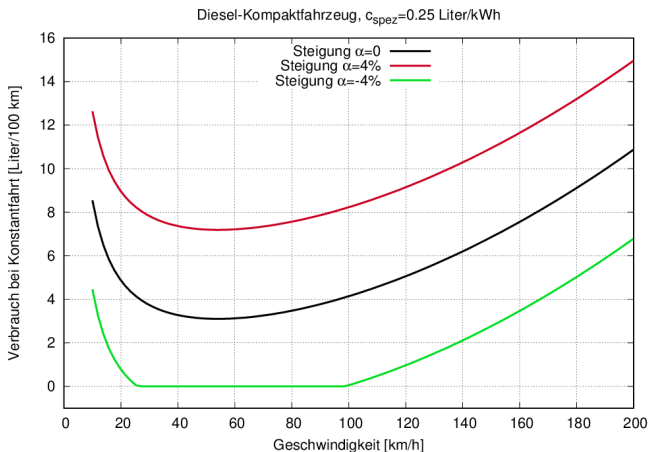
? Diskutiere die Elastizität $\epsilon_2 = \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} \frac{dy}{dx_2} = \frac{\beta_2 \bar{x}_2}{y} = -0.15$

! 0.15 % Reduzierung der Kilometerleistung um 0.15 % pro Preisanstieg um 1 %

? Diskutiere die Bedeutung der Faktoren, insbesondere das Produkt $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$

! $x_0 = 1$: Konstante (Achsenabschnitt); $x_1 = \tilde{x}_1$: Erhöhung der Kilometerleistung mit dem Einkommen ($\beta_1 > 0$ erwartet); $x_2 = \tilde{x}_2$: Preissensitivität ($\beta_2 < 0$); $x_3 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2$: Erhöhung der Preissensitivität (im Sinne weniger negativer Werte) mit dem Einkommen: Sensitivität $\beta_2 + \beta_3\tilde{x}_1$ ($\beta_3 > 0$ erwartet)

2.2.2 Beispiel 2: Treibstoffverbrauch



- ▶ y : Verbrauch [l/100 km]
- ▶ \tilde{x}_1 : Geschwindigkeit v [m/s]
- ▶ \tilde{x}_2 : Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ [m/s²]
- ▶ \tilde{x}_3 : Steigung α [rad] (1% entspricht 0.01)
- ▶ Modell aus der Physik: Verbrauch $y = c_{\text{spez}}P(v, \alpha)/v = c_{\text{spez}}(P_0/v + F)$, mit konstantem spezifischen Verbrauch c_{spez} [kWh/l], Fahrwiderstand $F = mg\mu + m\left(\frac{dv}{dt} + g\alpha\right) + \frac{1}{2}c_w\rho Av^2$
- ▶ Damit Modell mit physikbestimmten nichtlin. Funktionen $g_j(\tilde{\mathbf{x}})$:
$$y(\tilde{\mathbf{x}}) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\tilde{x}_1} + \beta_2 \tilde{x}_1^2 + \beta_3 (\tilde{x}_2 + g\tilde{x}_3)$$

? Wie hängen die Modellparameter mit den physikalischen Parametern zusammen?

! $\beta_0 = c_{\text{spez}}mg\mu$, $\beta_1 = c_{\text{spez}}P_0$, $\beta_2 = c_{\text{spez}}/2c_w\rho A$, $\beta_3 = c_{\text{spez}}m$

? Was ist mit der grünen Kurve in der Mitte los?

2.2.2 Beispiel 2: Treibstoffverbrauch II: Value of Time

Die gefahrene Geschwindigkeit gibt Aufschluss über die **Value of Time (VoT)**

Gegeben: Ebene Strecke der Länge L , Konstantfahrt mit v ist möglich

- ▶ Treibstoffkosten

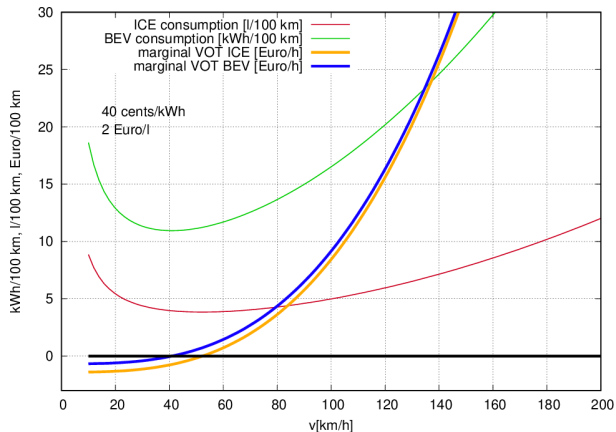
$$C = Lc_{\text{fuel}}y = Lc_{\text{fuel}} \left(\frac{\beta_1}{v} + \beta_0 + \beta_2 v^2 \right)$$

- ▶ Zeitbedarf

$$T(v) = \frac{L}{v}$$

- ▶ Zeitbewertung (Grenzbetrachtung!)

$$\text{VoT}(v) = -\frac{dC}{dT} = -\frac{C'(v)}{T'(v)} = c_{\text{fuel}} (-\beta_1 + 2\beta_2 v^2)$$



2.2.3 Linear vs. nichtlinear: **reduzibel nichtlinear**

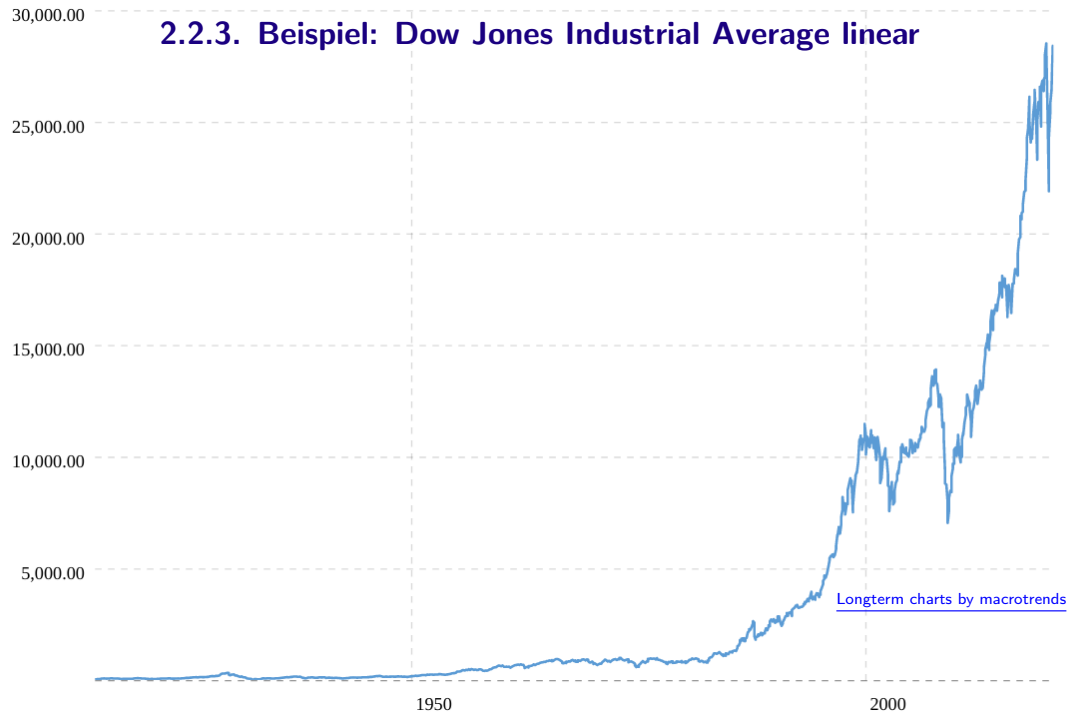
Die Zusammenfassung in Faktoren transformiert die *exogenen* Variablen. Analog kann man manchmal auch die *endogenen* Variablen transformieren, um Linearität zu erreichen. Klassiker ist das

Modell für unbeschränktes Wachstum $G(t) = G_0 e^{rt+\epsilon}$

- ▶ Urprüngliche endogene Variable G : Wachstumsmerkmal, z.B. Umsatz oder Gewinn von Firmen, Aktienkurse, BIP, Infektionszahlen ohne jede Herdenimmunität
- ▶ Exogene Variable: Zeit t
- ▶ Parameter: Anfangswert G_0 und Wachstumsrate r : $\tau = 1/r$ gibt das Zeitintervall für einen Wachstum um den Faktor $e = 2.71\dots$ an
- ▶ Multiplikativer unbestimmter Faktor e^ϵ
- ▶ **Linearisierung:** $Y(t) = \ln G(t) = \ln G_0 + rt + \epsilon = \ln G_0 + \frac{t}{\tau} + \epsilon$
- ▶ **Standardform:** $Y(\mathbf{x}) = \beta' \mathbf{x} + \epsilon = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$
mit $x_0 = 1, x_1 = t, \beta_0 = \ln G_0, \beta_1 = r = 1/\tau$

Merke: Anders als die Transformation der exogenen Variablen beeinflusst die der endogenen Variablen auch den Zufallsanteil, macht hier beispielsweise aus einem multiplikativen Zufallsfaktor einen additiven Anteil

2.2.3. Beispiel: Dow Jones Industrial Average linear



[Longterm charts by macrotrends](#)

100,000

2.2.3. Beispiel: Dow Jones Industrial Average logarithmisch

10,000

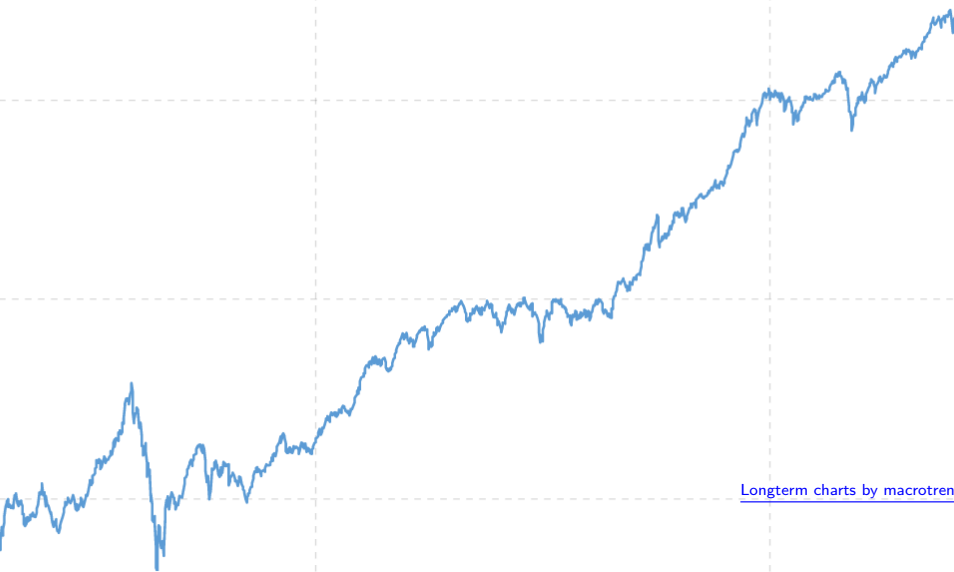
1,000

100

1950

2000

[Longterm charts by macrotrends](#)



2.2.4 Linear vs. nichtlinear: irreduzibel nichtlinear

Klassiker: beschränktes Wachstum

$$y(t) = \frac{y_s}{1 + (y_s/y_0 - 1)e^{-rt}}$$

► Lösung der ODE

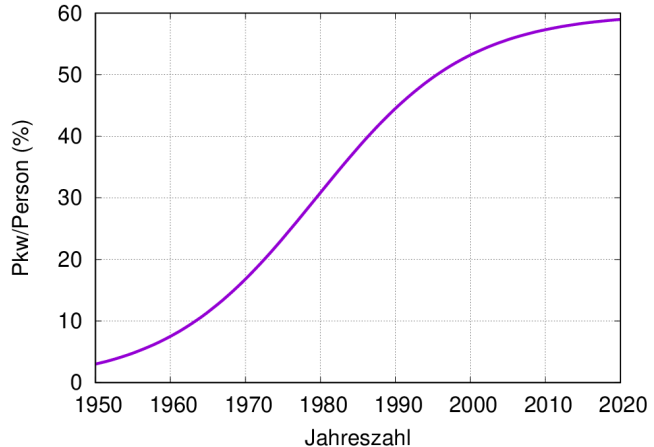
$$\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s} \right)$$

für den Anfangswert $y(t_0) = y_0$

► Plot für $t_0 = 1950$, $y_0 = 3\%$,
 $y_s = 60\%$, und $r = 1/10$ Jahre

? Was könnte dies darstellen?

! z.B. Marktdurchdringung eines neuen Produktes (Smartphone, Autos ...)



2.3 Weitere Kriterien für die Modellfunktion

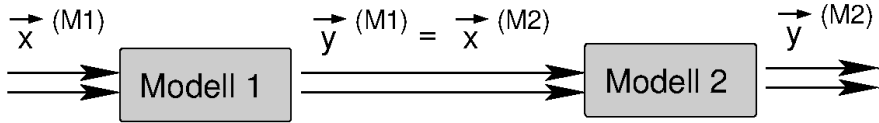
- ▶ **Deterministisch** vs. **stochastisch**
- ▶ Natur des Modells: **mikroskopisch** vs. **makroskopisch**
- ▶ Zahl der endogenen Variablen: Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle (\Rightarrow 2.1)
- ▶ Skalierung der endogenen Variablen: reellwertig (metrisch) \rightarrow z.B. **Regressionsmodelle** vs. diskret (ordinal- oder nominalskaliert) \rightarrow z.B. **diskrete Wahltheorie**
- ▶ Abhängigkeitsstrukturen: Verkettung, Kopplung, Rückkopplung

Beispiele:

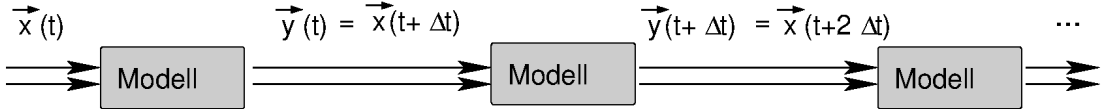
- ▶ Ein Modell für die **zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten** beim Modal-Split ist ein *deterministisches, makroskopisches, kontinuierliches Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle
- ▶ Ein Modell für die **Wahl durch eine einzelne Person** ist ein *stochastisches, mikroskopisches, diskretes Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle

2.4 Abhängigkeitsstrukturen 1: Verkettung

Die endogenen Variablen des Modell 1 dienen als exogene Variable für Modell 2



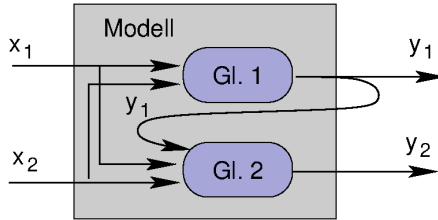
Spezialfall der Verkettung: **dynamische Modelle** für die **Zeitentwicklung**:



- ▶ Die endogenen Variablen zur Zeit t sind die exogenen zur Zeit $t + \Delta t$
- ▶ Das Modell für jeden Schritt ist oft dasselbe (**autonomes Modell**)
- ▶ *Beispiel:* Umwandlung der Differenzialgleichung $\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$ des Modells für beschränkten Wachstums in eine verkettete Differenzengleichung

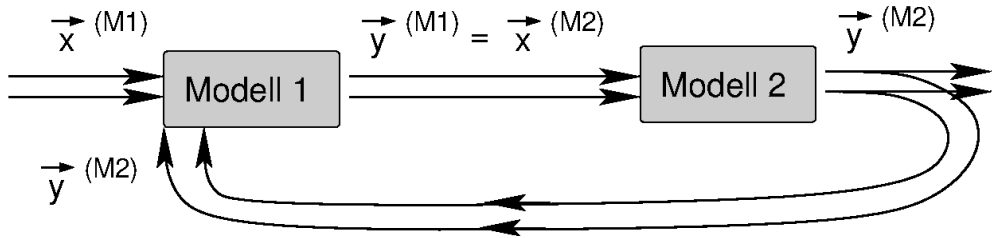
$$y(t + \Delta t) = y(t) + r \Delta t y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$$

2.4 Abhängigkeitsstrukturen 2: Kopplung



Eine oder mehrere der endogenen Variablen der Modellgleichung 1 werden als exogene Variable an Gleichung 2 gekoppelt

2.4 Abhängigkeitsstrukturen 3: Rückkopplung



Kombination von Verkettung und Kopplung

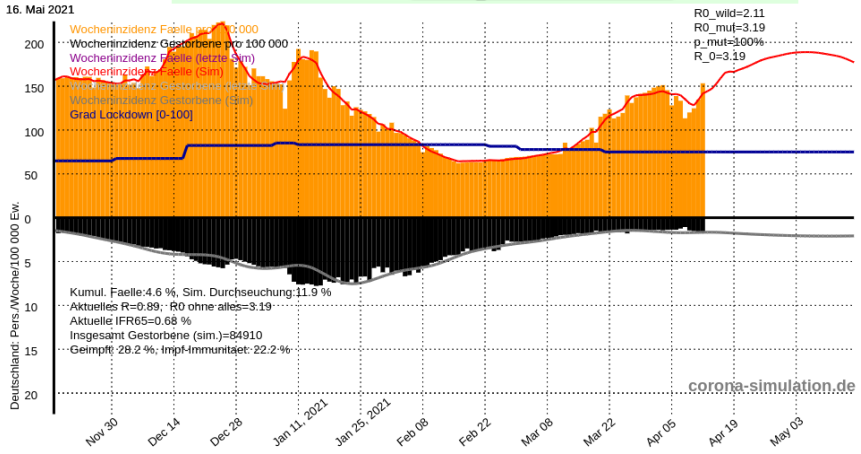
2.5 Modellbeispiel 1: Makromodell der Infektionsausbreitung ⇒ VL 3

Simulation der Covid-19 Pandemie Deutschland



R₀ ohne Maßnahmen	<input type="range" value="3.19"/>	3.19
Grad max. Shutdown	<input type="range" value="75"/>	75 %
Import-Fälle/10⁵ Einw.	<input type="range" value="0"/>	0/Tag
Wöchentliche Impfrate	<input type="range" value="2.63"/>	2.63 %

Deutschland ▾
 Wochen-Inzidenz ▾
 Kalibriere neu!
 Validiere ... ▾
 Start CZ Vergleich
 Stop B.1.1.7 Sim



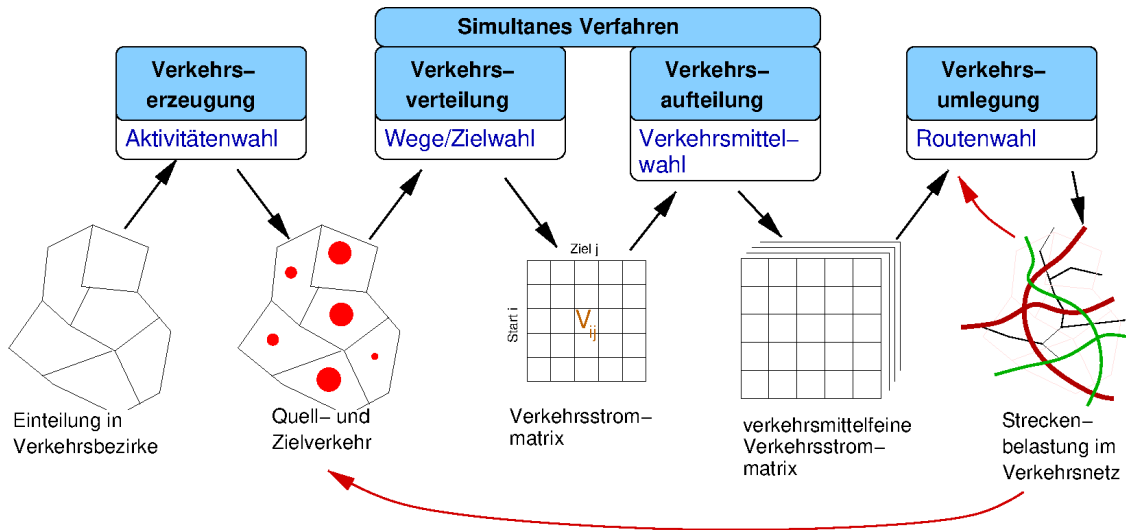
Ignoriere Testhäufigkeit

⇒ Infektions - Parameter Ansicht

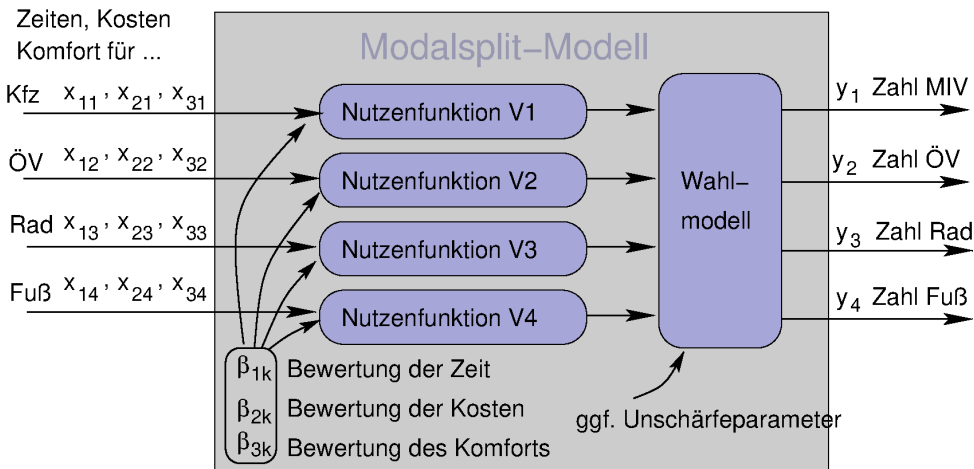
Impressum

Dr. Treiber

2.5 Modellbeispiel 2: Vierstufenmodell der Verkehrsplanung ⇒ VL 4ff



2.5 Modellbeispiel 3: Modal-Split Modell ⇒ VL 6ff



- ▶ Exogene Variablen x_{jk} : Einflussfaktor j für Modus k
- ▶ Endogene Variable y_k : Auswahldummy $\in \{0, 1\}$ oder Auswahlwahrscheinlichkeit für Verkehrsmodus k

2.5 zu Beispiel 3: Inputdaten bei zwei Alternativen

	Alter	Ge- schlecht	Zeit TT Rad	Kosten Rad	Zeit TT ÖV	Kosten ÖV	Wahl Rad	Wahl PT
Variable	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_{1i}	y_{2i}
Person 1	30	w	20 min	0 €	30 min	1.00 €	0	1
Person 2	24	m	11 min	0 €	20 min	2.00 €	1	0
Person 3	27	m	34 min	0 €	15 min	2.00 €	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Daten z.B. von Interviews/Interneterhebungen ⇒ VL 8