Verkehrsökonometrie für Bachelor-Studierende

Sommersemester 2024, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 6

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.1: Zufallsmodell

(a) Verkehrsstrommatrix im *Zufallsmodell* $V_{ij} = V q_i z_j = Q_i Z_j / V$:

V_{ij}	1	2	3	Q_i
1	625	625	3750	5000
2	250	250	1500	2000
3	125	125	750	1000
Z_j	1000	1000	6000	8000

Die Randsummenbedingungen (RSB) sind im Zufallsmodell immer exakt erfüllt (das Zufallsmodell ist das einzige, für das dies für alle Arten von RSB immer analytisch ausrechenbar ist). Die allgemeinen RSB für die Quellsummen lauten

$$Q_i = \sum_j V_{ij} = \sum_j \left(\frac{Q_i Z_j}{V} \right) = Q_i \frac{\sum_j Z_j}{V} = \underline{\underline{Q_i}}.$$

Das gleiche lässt sich analog für die zweite allgemeine RSB der Zielsummen, $Z_j = \sum_i V_{ij}$, zeigen.

(b) Das Zufallsmodell entspricht einer Bewertungsfunktion $B_{ij} = 1$, es ignoriert also die unterschiedlichen Aufwände der Ortswechsel. Allenfalls in sehr kleinen Untersuchungsgebieten, wo die Aufwände kaum eine Rolle spielen, kann dies gerechtfertigt werden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.2: Modelle mit Bewertung

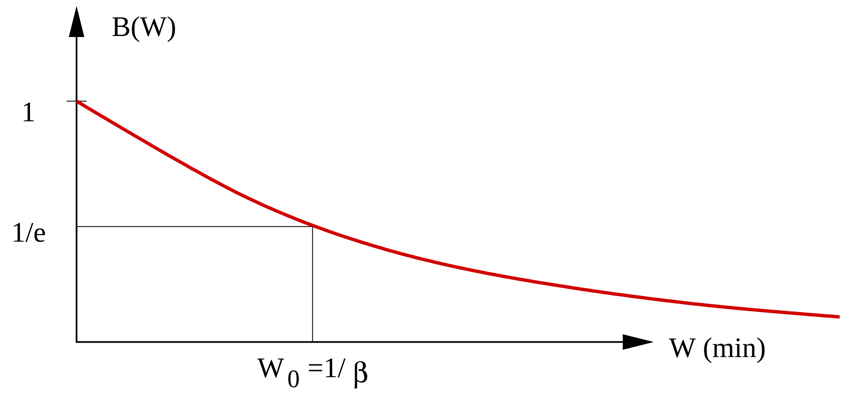
(a)
- *konstant:* Bewertet alle Aufwände gleich und entspricht dem *Zufallsmodell*. Allenfalls für Netze mit sehr kurzen Wegen realistisch. Die Bewertungsfunktion entspricht nicht den allgemeinen *Plausibilitätsbedingungen*

$$B(0) = 1, \quad \lim_{W \to \infty} B(W) = 0, \quad B'(W) \le 0. \tag{1}$$

- *e-Funktion:*

$$B(W) = e^{-\beta W}$$

Dies entspricht dem *Logit-* bzw. dem *Wilson-Modell*. Es gibt eine Abhängigkeit von den Aufwänden, je größer der Aufwand, desto geringer wird der entsprechende Weg bewertet. Insbesondere entspricht die e-Funktion den *Plausibilitätsbedingungen* (1).



Das Inverse des Parameters β entspricht einer typischen Reisezeit: $W_0 = 1/\beta$. (der exakte Mittelwert der Reisezeit, also die von den Mobilitätsuntersuchungen gefundenen 20 min, hängt vom Untersuchungsgebiet ab und kann etas größer oder kleiner als W_0 sein, aber W_0 gibt einen Anhaltspunkt).

Zwei Wegen mit unterschiedlichen Widerständen W_1 und W_2 wird folgender *relativer Bewertungsunterschied* zugeordnet:

$$\frac{B(W_1)}{B(W_2)} = e^{-\beta(W_1 - W_2)}$$

Die relative Attraktivität zweier Wege hängt also von der *Differenz* der Widersände ab. Dies bedeutet, eine 5 min lange Differenz wird bei Weglängen von 100 min und 10 min gleich negativ empfunden. Dies ist für die meisten Menschen bei sehr langen Wegen unrealistisch, so dass das Wilson-Modell bei kleinen und mittleren Untersuchungsgebieten angewendet werden kann.

- Die *Potenzfunktion*, entsprechend dem *klassischen Gravitationsmodell*,

$$B(W) = \min \left[\left(\frac{W}{W_0} \right)^{-E}, 1 \right],$$

hat zwei Parameter: Die Grenze W_0 des *Indifferenzbereichs* (etwa 10 min) und der Exponent E (Werte zwischen 1 und 5). Die Minimum-Funktion ist notwendig, um die *Plausibilitätsbedingungen* (1) zu erfüllen. Der resultierende Knick ist aber eher willkürlich: Für Widerstände kleiner als W_0 (etwa 10 min beginnt der *Indifferenzbereich*, d.h. die Weglänge ist dann egal. Dies ist meist nicht realistisch: Ob der Bäcker 100 m oder 200 m entfernt ist (also "Reisezeiten" 1 min bzw. 2 min) ist für die meisten Leute sehr wohl relevant (sofern es zwei Bäcker in diesen Entfernungen gibt). Jenseits des Indifferenzbereichs gilt für die relative Attraktivität

$$\frac{B(W_1)}{B(W_2)} = \left(\frac{W_1}{W_2} \right)^{-E}$$

Die relative Bewertung hängt also von Widerstands*quotienten*, nicht Differenzen, ab. Dies ist für lange Wege (nicht aber für kurze) plausibel.

Anwendung also eher für *große* Untersuchungsgebiete.

- *EVA-Funktion:* Diese Funktion mit den drei Parametern E,F und G bzw. E,F und W_0 kann so eingestellt werden, dass sie für alle Weglängen bzw. Widerstände realistische Bewertungen ergibt. Insbesondere ist die Asymptotik für große Widerstände die einer Potemzfunktion (mit Exponent E). Für sehr kleine Widerstände kann sowohl eine Indifferenz als auch, wie bei der e-Funktion, ein Abfall eingestellt werden.
  - Vorteil: Anwendbar für den gesamten Bereich der Widerstände
  - Nachteile: Funktion komplex, Parameter, im Gegensatz zur e-Funktion, unanschaulich, sowie 3 statt ein oder 2 Parameter wie bei der e-Funktion bzw. Potenzfunktion.

  Da für jede QZG eine eigene Parametrisierung gilt, erhält man beispielsweise bei der 13er-Einteilung 39 Modellparameter. Dies beinhaltet die Gefahr einer Überanpassung (damit "kann man schon fast einen Elefanten fitten") und damit mangelnde Aussage- bzw. Prognosekraft.

Zusammenfassung

$B(W)$	Parameterzahl	Konsistenzbedingungen $B(0)=1$, $B'(W)\le 0$, $B(-\infty)=0$	plausibel bei kleinen W	plausibel bei großen W
Zufallsmodell	0	nein	halb-halb	nein
Wilson-Model	1	✓	✓	nein
Gravitationsmodell	2	✓	nein	✓
EFG-Modell	3	✓	✓	✓

(b) Die Widerstandsmatrix wird aus den jeweils kürzesten Reisezeiten [Minuten] und der Annahme keiner nennenswerten Reisezeit innerhalb von Bezirken berechnet:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 10 \\ 7 & 0 & 6 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Die Matrix B_{ij} der Bewertungswahrscheinlichkeit nach dem *Wilson-Modell*,

$$B_{ij} = B(W_{ij} = e^{-\beta W_{ij}}, \qquad (2)$$

mit dem Parameter $\beta = 0.1\,\mathrm{min}^{-1}$ berechnet sich zu

$$\mathbf{B} = (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.497 & 0.368 \\ 0.497 & 1.000 & 0.549 \\ 0.368 & 0.549 & 1.000 \end{pmatrix}$$

Dabei wurde $e^{-0.7} = 0.497$, $e^{-1} = 0.368$ und $e^{-0.6} = 0.549$ verwendet.

(d) Die Verkehrsstrommatrix wird berechnet nach der Formel aus der Vorlesung bzw Aufgabenstellung:

$$V_{ij} = \frac{B_{ij} Q_i \tilde{Z}_j}{\sum_k B_{ik} \tilde{Z}_k} \,. \tag{3}$$

Dabei ergibt zuerst der Nenner für die drei Indizes $i = 1{,}2$ und 3:

$i = 1$: $1.000 * 1\,000 \quad +0.497 * 1\,000 \quad +0.368 * 6\,000 = 3703.86$
$i = 2$: $0.497 * 1\,000 \quad +1.000 * 1\,000 \quad +0.549 * 6\,000 = 4789.46$
$i = 3$: $0.368 * 1\,000 \quad +0.549 * 1\,000 \quad +1.000 * 6\,000 = 6916.69$

und damit die Verkehrsstrommatrix

V_{ij}	1	2	3	Q_i
1	1349.94	670.36	2979.70	5000
2	207.37	417.58	1375.05	2000
3	53.19	79.34	867.47	1000
$\tilde{Z}_j$	1610.5	1167.28	5222.22	8 000

Nach Voraussetzung sind die Quellsummen exakt erfüllt. Die *Zielsummen* hingegen hängen von der relativen *Lagegunst* der Strukturmerkmale in den drei Bezirken ab:

- Bezirk 3 hat eine schlechte Lagegunst, deshalb $\sum_i V_{ij} < Z_j$.
- Bezirke 1 und 2 haben eine vergleichsweise gute Lagegunst mit $\sum_i V_{ij} > Z_j$. Bei Bezirk 2 ist dies durch die zentrale Lage verursacht, während in Bezirk 1 die meisten Kunden (5 000!) ebenfalls aus diesen Bezirk stammen und damit Widerstände von 0 haben.

Die *Summe* der Zielsummen $\sum_j (\sum_i V_{ij}) = V = 8\,000$ stimmt natürlich wieder exakt.

(e) Allgemein gilt für die Quellsummenbedingungen der Formel (3) für quellseitig harte, zielseitig freie Randsummenbedingungen Folgendes:

$$\begin{aligned}
\sum_j V_{ij} = \sum_j \left(\frac{B_{ij} Q_i \tilde{Z}_j}{\sum_k B_{ik} \tilde{Z}_k} \right) &= \frac{\sum_j B_{ij} Q_i \tilde{Z}_j}{\sum_k B_{ik} \tilde{Z}_k} \\
&= Q_i \frac{\sum_j B_{ij} \tilde{Z}_j}{\sum_k B_{ik} \tilde{Z}_k} \\
&= Q_i
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung beruht auf der Tatsache, dass die formalen Summationsindices beliebig gewählt werden können, solange sie nicht Indices von nicht-summierten Variablen (hier i) entsprechen. (Wenn Sie daran zweifeln, schreiben Sie die Summen für $I = 2$ oder 3 Bezirke einfach ausgeschrieben hin.)

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.3: Kopplung von Gleichungen

Im Grundmodell

$$\frac{V_{ij}}{V} := v_{ij} = B_{ij} f_i g_j \tag{4}$$

ergeben sich nach Einsetzen der harten RSB gekoppelte Gleichungen für die Unbekannten f_i und g_j:

$$f_i = \frac{q_i}{\sum_j B_{ij} g_j}, \quad g_j = \frac{z_j}{\sum_i B_{ij} f_i} \qquad \text{mit} \qquad q_i := \frac{Q_i}{V}, \quad z_j := \frac{Z_i}{V}. \tag{5}$$

Kopplung, da die f_i und g_j auch auf den rechten Seiten der Gleichungen auftauchen! damit sind die endogenen Variablen interdependent, das Modell ist also bezüglich der Matrixelemente (aber nicht bezüglich der Quelle-Ziel-Gruppen!) ein *Mehrgleichungsmodell*.

Zu Aufgabe 6.3: Numerische Lösung für das Wilson-Modell für das Untersuchungsgebiet von Aufgabe 6.1

Man startet mit $f_i = g_i = 1$ und setzt die *jeweils aktuellsten* Werte von f_i und g_i fortlaufend in (5) ein. Macht man dieses Verfahren für die QZG WA des Gebiets von Aufgabenteil 1 für das Wilson-Modell mit $\beta = 0.1$, erhält man:

Iteration	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	$f_1 = 1$	$f_2 = 1$	$f_3 = 1$
0	$g_1 = 1$	$g_2 = 1$	$g_3 = 1$
1	$f_1 = 0.335216850674456$	$f_2 = 0.122225664429713$	$f_3 = 0.0652165607085398$
1	$g_1 = 0.297686983130508$	$g_2 = 0.385230528498112$	$g_3 = 2.93410223188861$
2	$f_1 = 0.398499679550615$	$f_2 = 0.116641093568765$	$f_3 = 0.0384020548660006$
2	$g_1 = 0.265647002159082$	$g_2 = 0.372460927274144$	$g_3 = 3.01185606679493$
3	$f_1 = 0.400999469910695$	$f_2 = 0.115884578168493$	$f_3 = 0.0377188482080894$
3	$g_1 = 0.264593922734743$	$g_2 = 0.37233900718067$	$g_3 = 3.01401984530525$
4	$f_1 = 0.401081202465227$	$f_2 = 0.115855436378108$	$f_3 = 0.0376994016796445$
4	$g_1 = 0.264560262208473$	$g_2 = 0.372338149950982$	$g_3 = 3.01408491651972$

Damit die Verkehrsstrommatrix für die QZG WA:

V_{ij}	1	2	3	Q_i
1	849	593	3 557	5 000
2	122	345	1 533	2 000
3	29	62	909	1 000
Z_j	1 000	1 000	6 000	8 000

Verglichen mit dem Zufallsmodell sind die Verkehrsströme auf den Diagonalen (innerbezirklich, kürzeste Wege, Widerstand $W_{ii} = 0$) gewachen und vor allem die auf den weitesten Wegen zwischen den Bezirken 1 und 3 gesunken. Bereits nach 4 Iterationen sind die RSB auf sechs signifikante Stellen erfüllt.

Hinweis: Es ist übrigens egal, ob zuerst die f_i oder die g_j aktualisiert werden, obohl die Iterationen gänzlich andere Werte liefern! Wichtig ist nur, dass jeweils die aktuellsten Werte genommen werden und man in jeder Iteration die selbe Reihenfolge anwendet. Berechnet man, wie oben, in jeder Iteration zuerst die f_i und dann die g_j, verwendet man beispielsweise in der ersten Iteration in der Formel für f_i die Ausgangswerte $g_j = 1$, für die Berechnung der g_j hingegen die gerade berechneten Werte von f_i.

Bei umgekehrter Reihenfolge (erst die g_j und dann die f_i) sehen die Iterationen folgendermaßen aus:

Iteration	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	$f_1 = 1$	$f_2 = 1$	$f_3 = 1$
0	$g_1 = 1$	$g_2 = 1$	$g_3 = 1$
1	$f1 = 2.58968497630954$	$f2 = 0.808655253672553$	$f3 = 0.278085108030696$
1	$g1 = 0.0670433701348912$	$g2 = 0.0611128322148567$	$g3 = 0.391299364251239$
2	$f1 = 2.68480024621131$	$f2 = 0.777636263745173$	$f3 = 0.253413076088675$
2	$g1 = 0.0404066122529771$	$g2 = 0.0556230176861094$	$g3 = 0.447874464094307$
3	$f1 = 2.6879467008154$	$f2 = 0.776491255107666$	$f3 = 0.252679368474463$
3	$g1 = 0.0395046003365203$	$g2 = 0.0555569221441063$	$g3 = 0.449674870540357$
4	$f1 = 2.68804705678785$	$f2 = 0.776453606499212$	$f3 = 0.252656706436575$
4	$g1 = 0.0394758068683632$	$g2 = 0.0555565565186054$	$g3 = 0.449730035659135$

was in folgender Verkehrsstrommatrix resultiert:

V_{ij}	1	2	3	Q_i
1	849	593	3 557	5 000
2	122	345	1 533	2 000
3	29	62	909	1 000
Z_j	1 000	1 000	6 000	8 000

Die f_i und g_j sehen hier völlig anders aus und konvergieren insbesondere gegen andere Werte! Wesentlich ist jedoch nur, dass alle *Produkte* $f_i g_j$ gleich sind, denn nur diese tauchen im Grundmodell $V_{ij} = VB_{ij} f_i g_j$ für die Verkehrsströme V_{ij} auf! Dies ist hier erfüllt. In der resultierenden Verkehrsstrommatrix ist meist erst die zweite (!) Nachkommastelle verschieden (hier gerundet nud nicht gezeigt).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.4: Trip-Interchange-Ansatz vs. Trip-End-Ansatz

(a) Bei **Trip-Interchange-Modellen** erfolgt zuerst eine Verteilung der in der Verkehrserzeugung berechneten Quell- und Zielsummen auf die einzelnen Verbindungen zwischen den Bezirken ohne Beachtung der unterschiedlichen Verkehrssysteme. Erst **danach** erfolgt eine Aufteilung auf die Verkehrsmittel. Die Reihenfolge der verketteten und rückgekoppelten Modelle ist also wie folgt (die Variablen zwischen den Schrittne geben jeweils die endogenen Variablen des Vorgänger und die exogenen des Nachfolgermodells an):

Verkehrserzeugung $\Rightarrow$ Q_i, Z_i $\Rightarrow$ Zielwahl $\Rightarrow$ V_{ij} $\Rightarrow$ Modal Spit $\Rightarrow$ $V_{ijk} = V_{ij}A_{ijk}$ $\Rightarrow$ Routenwahl $\Rightarrow$ Linkbelastungen $\Rightarrow$ Zielwahl.

Bei **Trip-End-Modellen** hingegen werden die Quell- und Zielsummen zuerst auf die Verkehrsmittel aufgeteilt und erst danach auf die einzelnen Verbindungen zwischen den Bezirken verteilt. Daher die Reihenfolge:

Verkehrserzeugung $\Rightarrow$ Q_i, Z_i $\Rightarrow$ Modal Spit $\Rightarrow$ $V_{ik}^{\mathrm{Q}} = Q_i A_{ik}^{\mathrm{Q}}, V_{ik}^{\mathrm{Z}} = Z_i A_{ik}^{\mathrm{Z}}$ $\Rightarrow$ Zielwahl $\Rightarrow$ V_{ijk} $\Rightarrow$ Routenwahl $\Rightarrow$ Linkbelastungen $\Rightarrow$ Modal Split.

Verkehrserzeugung (Quell- und Zielverkehre) $\Rightarrow$ Verkehrsaufteilung (Aufteilung der Quell- und Zielverkehre auf die Verkehrsmittel) $\Rightarrow$ Verkehrsverteilung (Verteilung der verkehrsmittelfeinen Quell- und Zielverkehre der Verkehrsbezirke auf die einzelnen Verbindungen zwischen den Bezirken)

(b) Probleme der Ansätze:

- Trip-Interchange-Modelle (Verteilung vor Aufteilung): Bei der Verteilung sind die Hauptbestandteile der Widerstandsfunktionen (die Reisezeiten), also die wichtigsten exogenen Variablen, unbestimmt, da die zu Grunde liegenden Geschwindigkeiten stark vom Modus abhängen und dieser aber erst bestimmt wird. Die Widerstände können nur geschätzt werden.
- Trip-End-Modelle (Aufteilung vor Verteilung): Die Reiseweite beeinflusst i.A. die Verkehrsmittelwahl, da aber die Aufteilung vor der Verteilung erfolgt, bleiben diese Widerstandswerte bei der Aufteilung unberücksichtigt.

Dies wird gelöst, indem man die Schritte Zielwahl und Routenwahl *koppelt*, also beide Entscheidungen *gleichzeitig* in einem gekoppelten Modell betrachtet:

Verkehrserzeugung $\Rightarrow$ Q_i, Z_i $\Rightarrow$ simultane Ziel- und Verkehrsmittelwahl $\Rightarrow$ V_{ijk} $\Rightarrow$ Routenwahl $\Rightarrow$ Linkbelastungen $\Rightarrow$ simultane Ziel- und Verkehrsmittelwahl.