Verkehrsökonometrie für Bachelor-Studierende

Sommersemester 2024, Übung Nr. 3

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.1: Ausbreitung einer neuen Technologie

(a) Falls $x \ll \beta_2$, gilt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta_1 x$, d.h. die Änderungsrate von x ist proportional zu x selbst: "Wer hat, dem wird gegeben". Dies ist unbeschränktes Wachstum und β_1 die Wachstumsrate bzw. $1/\beta_1$ die Wachstumszeit

(b)
- β_2: Falls $x = \beta_2$, gibt es kein Wachstum mehr, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$. Damit ist β_2 der Sättigungswert bzw. die Grenze des Wachstums
- R: Maximaler Wachstumsfaktor bzw Wachstumsfaktor des unbeschränkten Wachstums

(c) Hierzu vergleicht man für $x \ll \beta_2$ die Lösung $x = x_0 e^{\beta_1 t}$ mit der Definition von R:

$$x(\tau) = Rx(0) = x(0)e^{\beta_1 \tau} \quad \Rightarrow \quad R = e^{\beta_1 \tau}$$

(d) Zwischen Jahr 1 und Jahr 2 war der Gesamt-Wachstumsfaktor 4, in der folgenden Jahresspanne 3.5. Also gilt in der ersten Spanne für alle Zeiten auf jeden Fall $x < \beta_2/3.5$. Wenn man davon ausgeht, dass das Wachstum nicht abrupt sättigt, ist x noch deutlich kleiner, also $x \ll \beta_2$ Damit kann man in der ersten Spanne ungesättigtes Wachstum annehmen und damit $R = 4$ schätzen. Daraus dann $\beta_1 = \ln(R)/1 = 1.38$.

(e) Die effektive Wachstumsrate ist gegeben durch

$$r = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta_1 \left(1 - \frac{x(t)}{\beta_2}\right)$$

Diese hat sich auf $\beta_1/2$ halbiert, falls

$$1 - \frac{x}{\beta_2} = 1/2 \ \Rightarrow x = \frac{\beta_2}{2}$$

Damit ist $\beta_2 = 8\,\text{Fahrten/Person/Jahr}$

(f) Ähnlich wie in der Vorlesung mit der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\beta_2 - x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\frac{1}{\beta_2 - x} + \frac{x}{(\beta_2 - x)^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\frac{\beta_2 - x + x}{(\beta_2 - x)^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{(\beta_2 - x)^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\frac{\beta_2}{(\beta_2 - x)^2}\right)\beta_1 x\left(1 - \frac{x}{\beta_2}\right) \\
&= \beta_1\left(\frac{x}{\beta_2 - x}\right) \\
&= \beta_1 y
\end{aligned}
$$

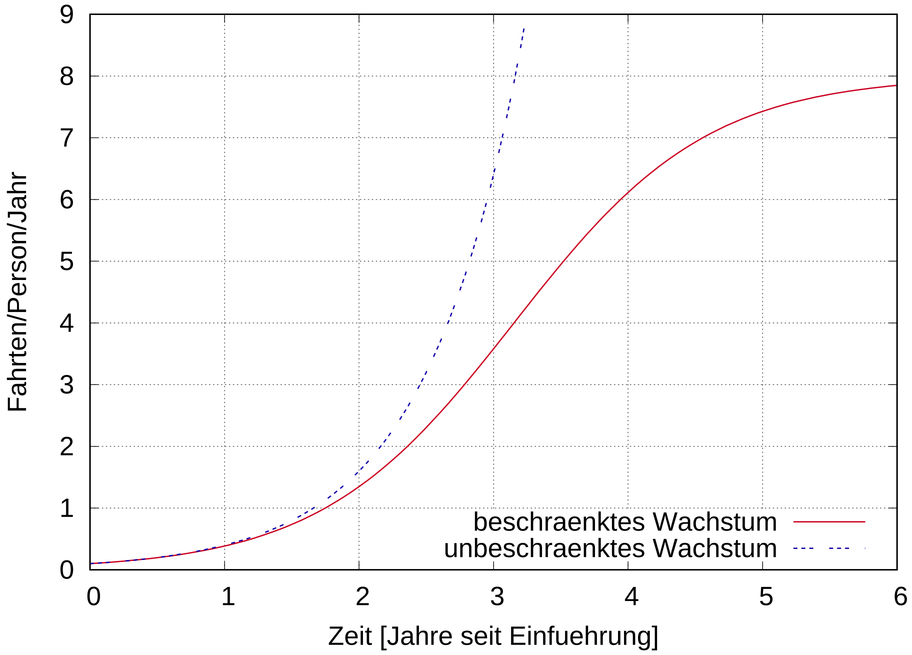
Für $y = x/(\beta_2 - x)$ hat man also *immer* eine Gleichung unbeschränkten Wachstums mit der Lösung $y(t) = y_0 e^{\beta_1 t}$

(g) Mit $y = x/(\beta_2 - x)$ gilt auch $x = \beta_2 y/(1 + y)$ und damit

$$x(t) = \frac{\beta_2 y}{1 + y} = \frac{\beta_2 y_0 e^{\beta_1 t}}{1 + y_0 e^{\beta_1 t}} \tag{1}$$

mit y_0 aus der Anfangsbedingung x_0 für die Wachstumsgröße x gegeben durch $y_0 = x_0/(\beta_2 - x_0)$

Zahlenwerte für die E-Scooter: $\beta_1 = 1.387$, $\beta_2 = 8$, $x_0 = 0.1$ Fahrten/Pers/Jahr, $y_0 = 0.0127$, siehe Plot



Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.2: Ausbreitung einer neuen Mutante bzw. Ersetzung einer alten durch eine neue Technologie

(a) Differenzengleichung für $y = x_2/x_1$:

$$y(t+\tau) = \frac{R_2 x_2(t)}{R_1 x_1(t)} = \frac{R_2}{R_1} y(t)$$

Auch hier ist die Veränderung von y proportional zu y selbst: "Matthäus-Effekt bzw exponentielles Wachstum. Analog zur vorherigen Aufgabe gilt damit

$$y(t+\tau) = \frac{R_2}{R_1} y(t) = e^{\mu\tau} y(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = e^{\mu\tau} \text{ bzw. } \mu = \frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

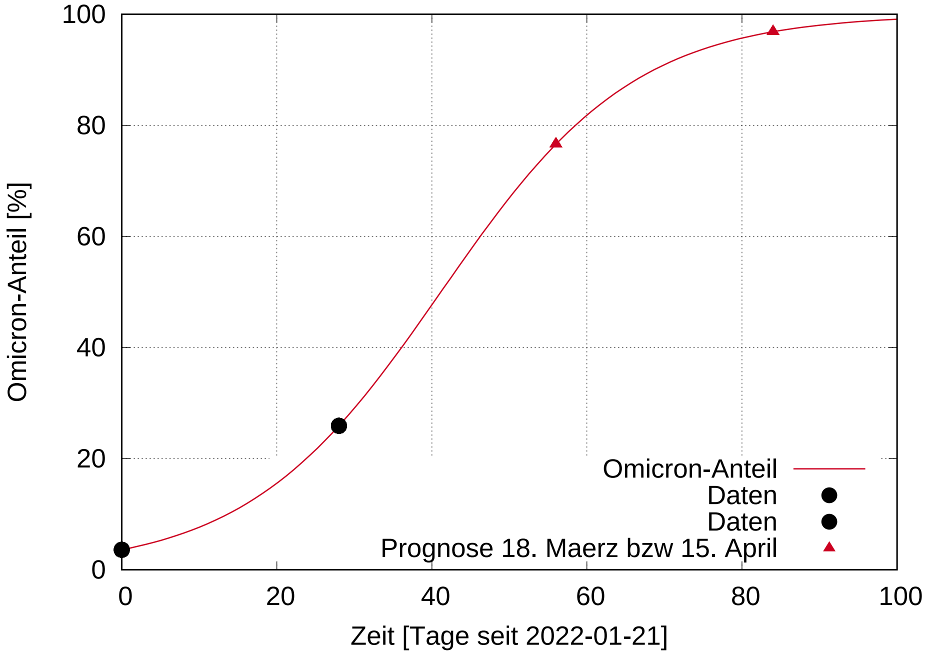
(b) Mit $y(t) = y_0 e^{\mu t} = r/(1-r)$ gilt $r = y/(1+y)$ bzw

$$r(t) = \frac{y_0 e^{\mu t}}{1 + y_0 e^{\mu t}}, \quad y_0 = \frac{r_0}{1 - r_0}$$

(c) Zahlenwerte:

- Omicron-Anteil zum 21. Januar 2022 ($t = 0$): $r_0 = 0.036$, $y_0 = r_0/(1 - r_0) = 0.0373$
- Omicron-Anteil zum 18. Februar 2022 ($t = 28$): $r_2 8 = 0.259$, $y_2 8 = r_2 8/(1 - r_2 8) = 0.350$
- Verhältnis der Wachstumsfaktoren nach 28 Tagen: $R_2/R_1 = 0.350/0.0373 = 9.35$
- Reproduktionszahlverhältnis bei 1 Woche Generationszeit: $(R_2/R_1)^{1/4} = 1.75$
- Wachstumsrate in y: $\mu = 1/28 \ln(R_2/R_1) = 0.0799$

Siehe auch folgende Abbildung.



(d) Dies ist dieselbe Problemstellung wie in Gl. ():

$$x(t) = \frac{\beta_2 y}{1+y} = \frac{\beta_2 y_0 e^{\beta_1 t}}{1 + y_0 e^{\beta_1 t}}, \quad y_0 = x_0/(\beta_2 - x_0)$$

mit $\beta_1 = \ln(1.6)/1\,\text{Jahr} = 0.470\,\text{Jahr}^{-1}$, $\beta_2 = 0.8$, $x_0 = 0.07$, $y_0 = x_0/(\beta_2 - x_0) = 0.0959$ (siehe folgende Abbildung)