Verkehrsökonometrie für Bachelor-Studierende

Sommersemester 2024, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 1

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.1: Mikro- vs. Makromodelle

Allgemeine Unterscheidung Allgemein beschreiben mikroskopische Modelle bzw. Mikromodelle die Dynamik der kleinsten Entitäten (Bestandteile) eines Systems:

- Beim Verkehr die einzelnen Verkehrsteilnehmer bzw. Fahrzeuge („Agenten“)
- in der Wirtschaft das einzelne Unternehmen („Mikroökonomie“)
- in der Physik die einzelnen Atome/Moleküle.

Im Gegensatz dazu beschreiben Makromodelle bzw. makroskopische Modelle die Dynamik *aggregierter* Bestandteile bzw. *kollektive Phänomene* des Untersuchungsgegenstandes/Systems:

- Beim Verkehr:
  - die Verkehrsdichte, -flussstärke und kollektive Phänomene wie z.B. Stop-and-Go-Wellen) → Themen der *Verkehrsflussdynamik*
  - oder, noch makroskopischer, die generelle Verkehrsstärke von A nach B mit Verkehrsmittel k → *Verkehrsstrommatrix*, Gegenstand der *Verkehrsplanung*.
- In der Wirtschaft: Volkswirtschaftliche Sachverhalte und Entwicklungen wie das BIP, die Arbeitslosenquote: "Makroökonomie" Hingegen sind die einzelnen Agenten wie individuelle Umsätze der Betriebe oder Arbeitslose mikroskopische Einheiten ("Mikroökonomie").
- in der Physik: „makroskopische“ Phänomene wie das Fließverhalten von Flüssigkeiten und Gasen, das Verhalten fester Körper („starre Körper“ sowie Elastizität) sowie Thermodynamik ganz allgemein.
- Generell sind Größen wie "Dichte", "Fluss", "Temperatur" oder "Druck", aber auch volkswirtschaftliche Durchschnitte, immer makroskopische Größen.

Anwendungen der Modellkategorien im Verkehrskontext Makroskopische Verkehrsmodelle eignen sich zur Abbildung großer Untersuchungsregionen, beispielsweise Verkehrmodelle von Städten und Regionen. Sie dienen zur Untersuchung des Verkehrsablaufes. Dazu wird ein Verkehrsmodell mit Kreuzungen, Straßen, Abbiegebeziehungen usw. als Netzmodell abgebildet. Die Verkehrsnachfragedaten werden in Form von Quelle-Ziel-Matrizen in das Netz über Verkehrsbezirke (Quelle und Ziel von Ortsveränderungen) eingespeist. Unter Verwendung verschiedener

Umlegungsverfahren, wird die Nachfrage derart auf das Netz umgelegt, das günstige Verbindungen zwischen Quelle und Ziel gefunden werden und sich unterschiedliche Belastungen auf den Straßen des Streckennetzes ergeben.

Mikroskopische Modelle hingegen können das Fahrverhalten der Verkehrsteilnehmer bzw. die Steuerlogik von Lichtsignalanlagen abbilden, makroskopische Modelle nur die Belastungen auf den Strecken. Sie verlangen allerdings nach einem höheren Grad von Netzinformationen (verschiedene Typen von Verkehrsteilnehmern, Steuerungsroutinen von LSA oder Haltebuchten für den Öffentlichen Verkehr) und finden daher meist für kleinere Untersuchungen Anwendung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.2: Modell- und Systemgleichungen der linearen Regression

(i) Modellgleichung:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_m x_m + ... + \beta_M x_M + \epsilon = \sum_{m=0}^{M} \beta_m x_m + \epsilon \tag{1}$$

Lineare Regressionsmodelle sind i.A. Eingleichungsmodelle, haben also nur eine abhängige bzw. endogene Variable (hat man mehrere, stellt man für jede Variable ein Modell der Art (1) auf). Die endogenen Variablen von Regressionsmodellen müssen *immer* metrisch skaliert sein! (überlegen Sie warum). Es gibt $M + 1$ unabhängige bzw. exogene Variable x_0 bis x_M, wobei formal $x_0 = 1$ gesetzt wird und $J = M + 1$ Modellparameter β_0 bis β_M.

(ii) Systemgleichungen: Setzt man gemessene Daten in die Modellgleichung ein, erhält man für jeden Satz i an Messdaten (Messung jeweils aller unabhängigen und der abhängigen Variable) jeweils eine Systemgleichung, zusammen also das System

$$y_i = \beta_0 + \sum_{m=1}^{M} \beta_m x_{im} + \epsilon_i = \sum_{m=0}^{M} x_{im}\beta_m + \epsilon_i = (\mathbf{X}\,\boldsymbol{\beta})_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2}$$

Jede (abstrakte) Modellgleichung führt also zu n (konkreten) Systemgleichungen. x_{im} bedeutet den Wert der m-ten unabhängigen Variablen bei der i-ten Messung.

(iii) Kalibriertes bzw. geschätztes Modell Zur sinnvollen Kalibrierung müssen mehr Messungen vorliegen als es Modellparameter gibt: $n > J = M + 1$. Beispielsweise bei $J = 1$ (univariate Regression) mindestens drei Messpunkte, da man durch zwei Punkte eindeutig eine Gerade legen kann und damit keine Aussage über die Modellqualität möglich ist (Stichwort: „überfitten")[1]

Kalibrierung bedeutet: Anpassung bzw. Schätzung der Modell*parameter* $\boldsymbol{\beta}$ so, dass z.B. die Quadratsumme der Residualfehler

$$F(\boldsymbol{\beta}) = \sum_i \epsilon_i^2 = \sum_i (y_i - \hat{y}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\beta}))^2$$

[1] Man sagt auch: „Mit fünf Modellparametern kann man einen Elefanten fitten und mit sechs das Wackeln seines Schwanzes"". In der Ökonometrie ist das allerdings etwas übertrieben.

minimal wird. Dies führt zu *Schätzungen* $\hat{\beta}_i$ samt Schätzfehlern: Bei jedem neuen "Lern-Datensatz" $\{\boldsymbol{x}_i, y_i\}$ kommen aufgrund der sich verändernden ϵ_i neue Schätzer heraus, sodass nun die Schätzer auch den Zufallsanteil enthalten. Somit ist das geschätzte Modell durch die Funktion (ohne ϵ!)

$$\hat{y}(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=0}^{M} \hat{\beta}_m x_m$$

gegeben.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.3: Modell- und Systemgleichungen bei einer Entscheidung zwischen zwei Alternativen

(a) **Nutzenfunktion**: Die deterministische Nutzendifferenz ΔV zwischen zwei Alternativen (z.B. ÖPNV und Rad) soll von den Zeit- und Geldaufwendungen abhängen und darüberhinaus die (betragsmäßige!) Zeitsensitivität mit dem Einkommen steigen und die betragsmäßige Preissensitivität sinken. Folgende quasilineare Modellierung (linear in den Parametern, nichtlinear in den unabhängigen Variablen) ermöglicht dies:

$$\Delta V(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_3 + \beta_4 x_2 x_3 \tag{3}$$

mit den Variablen

- $x_1 = T_{\text{ÖV}} - T_{\text{alt}}$ die Differenz der komplexen (Haustür-zu-Haustür-) Reisezeiten zwischen dem ÖPNV und der besten Alternative,
- $x_2 = C_{\text{ÖV}} - C_{\text{alt}}$ die entsprechende Kostendifferenz
- x_3 das Einkommen. Im Gegensatz zu den verkehrsmittel- und zielbezogenen *generischen* Variablen x_1 und x_2 bezeichnet man personenbezogene Variablen wie x_3 auch als *sozioökonomische Variable.*

die Parameter beschreiben die geforderten Abhängigkeiten:

- β_0 entspricht einem globalen „Vorschussbonus“ für den ÖPNV (bzw. allgemeiner für Alternative 1)
- $\beta_1 < 0$ beschreibt die Zeitsensitivität, also Abhängigkeit der Wahl von der Zeitdifferenz (sollte negativ sein, da eine positive Zeitdifferenz die Alternative weniger attraktiv macht)
- $\beta_2 < 0$ beschreibt analog die Kostensensitivität, also die Abhängigkeit von der Kostendifferenz (sollte ebenfalls negativ sein, da eine positive Kostendifferenz die Alternative weniger attraktiv macht)
- $\beta_3 < 0$ beschreibt die Erhöhung des Ausmaßes der Zeitsensitivität mit dem Einkommen (sollte negativ sein, da durch β_3 eine negative Größe, die Zeitsensitivität, mit dem Einkommen noch negativer gemacht wird). Dies sieht man, wenn man die Summanden mit β_1 und β_3 zusammenfasst als

$$\beta_1 x_1 + \beta_3 x_1 x_3 = (\beta_1 + \beta_3 x_3) x_1$$

der Term in der Klammer entspricht einer mit dem Einkommen im Betrag steigenden Sensitivität. (Da der Nutzen mit dem Preis abnimmt, ist das Vorzeichen negativ)

- $\beta_4 > 0$ beschreibt analog eine Erniedrigung des Ausmaßes der Kostensensitivität mit dem Einkommen. Da hier eine negative Größe, die Kostensensitivität, mit dem Einkommen weniger negativ wird, ist β_4 positiv.[2]

Das Erstellen der (abstrakten) Modellgleichungen nennt man auch *Modellspezifikation.* Dabei sollte man zwei Gesichtspunkte beachten:

(a) *Prinzip der größtmöglichen Einfachheit*, auch *Occam's Rasiermesser* genannt,[3] also im Zweifel linear. Hier sind aber veränderliche Sensitivitäten verlangt, also das nächst einfache: Quadratische Funktionen. Englisch nennt man das Ergebnis der Anwendung dieses Prinzips auf Modelle auch *parsimonious models* (von lat. *parsimonia*=Sparsamkeit).

(b) Check der Konsistenz (erst als Ergebnis der Kalibrierung der Systemgleichungen möglich): Hier insbesondere

- $\beta_1 + \beta_3 x_3 < 0$ (vertane Zeit ist immer ein Aufwand, nie ein Nutzen),
- $\beta_2 + \beta_4 x_3 < 0$ (mehr Geld für die gleiche Leistung auszugeben ist immer schlecht).

(b) **Systemgleichungen**

Erstellung von Systemgleichungen aus Modellgleichungen bedeutet, das Modell auf Datensätze anzuwenden. Jeder der N Datensätze $n = 1, ..., N$ muss den kompletten Satz an exogenen und endogenen Variablen enthalten (dies liefert gleichzeitig eine Vorgabe für die in Erhebungen zu erfragenden Merkmale).[4]

Beispielsweise aus einer konkreten Umfrage des verwendeten Verehrsmittels beim letzten Weg Wohnung → Uni. Der bei Person i „gemessene" Wert y_n im Wertebereich 0 bis 1 mit $y_{n1} + y_{n2} = 1$ gibt die gewählte Alternative i ($y_{ni} = 1$ an. Beispiel (Zeit in Minuten, Kosten in €, Einkommen in 1 000€/Jahr):

Entscheidung/Person n	$T_{\text{ÖV}}$	T_{alt}	x_{n1}	$C_{\text{ÖV}}$	C_{alt}	x_{n2}	x_{n3}	y_{n1}	y_{n2}
1	20	30	-10	2	0	2	30	4	1
2	40	25	15	2	3	-1	35	0	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Aus jedem dieser Datensätze ergibt sich eine Systemgleichung:

$$\Delta V_n = \Delta V(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\beta}); \quad P_{\text{ÖV,n}} = \frac{e^{\Delta V_n}}{1 + e^{\Delta V_n}}$$

[2]Die Grenzen der Beschreibung werden bei sehr hohen Einkommen erreicht, da dann die Preisabhängigkeit $\beta_2 + \beta_4 x_3$ positiv wird, was unlogisch ist (keiner liebt höhere Preise *per se*).

[3]Oder frei nach Einstein: „Mach es so einfach wie möglich, aber nicht einfacher"

[4]Der Konvention der meisten Lehrbücher entsprechend werden die Datensätze/Personen/Entscheidungen hier mit n indiziert und nicht mit i wie bei den Regressionsmodellen; der Index i gibt hingegen den Alternativenindex an.

Die Systemgleichungen sind hier übrigens mikroskopisch, da sie einzelne Entscheider betreffen.

(c) **Maximum-Likelihood-Kalibrierung**

Auch hier werden durch „Kalibrierung“ der Modellparameter (bei mindestens 6 Messungen!) die Voraussagefehler minimiert, und zwar nach Aufgabenstellung so, dass die Wahrscheinlichkeit (**Likelihood**) dafür. dass das Modell *alle* Beobachtungen richtig voraussagt, maximal ist: Daher auch der Name dieses Schätzverfahrens.

Man muss also die modellierte ÖV-Wahlwahrscheinlichkeit $P_{\text{ÖV,n}} = P_{\text{ÖV,n}}(\boldsymbol{\beta})$ als Funktion des Parametersatzes auffassen. Dann ist, bei unabhängigen Entscheidungen, die Wahrscheinlichkeit, dass das Modell alle Entscheidungen richtig voraussagt, gegeben durch den Produktausdruck (Unabhängigkeit!)

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{n|y_{n1}=1} P_{\text{ÖV,n}}(\boldsymbol{\beta}) \prod_{n|y_{n2}=1} \Big(1 - P_{\text{ÖV,n}}(\boldsymbol{\beta})\Big)$$

Oft wird zur leichteren Darstellbarkeit und Berechenbarkeit der Logarithmus daraus (**Log-Likelihood**) maximiert, doch dazu später.