Verkehrsökonometrie für Bachelor-Studierende

Sommersemester 2024, Übung Nr. 3

Allgemeines

Sie müssen in der Klausur keine Differenzialgleichungen Lösen! Sie sollten aber schon, wie in dieser Lösung gezeigt, differenzieren können, einschließlich Produkt- und Kettenregel.

Auf Wunsch einiger Studenten hier ein allgemeiner *Fahrplan* zur Lösung bzw Analyse von **Modellen beschränkten Wachstums**. Dazu bietet sich das Modell der Aufgabe 3.1 bzw 3.2d an, da es allgemeiner ist als das in 3.2a-3.2c (letzteres ist der Spezialfall einer Sättigung bei $\beta_2 = 1$)

1. ***Sachverhalt beschränktes Wachstum:*** Eine Wachstumsgröße (endogene Variable!) $x(t)$ hat eine anfängliche **relative Wachstumsrate** β_1 und eine **Sättigung** beim Wert β_2. Die absolute Wachstumsrate $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, also Änderung von x mit der Zeit, hängt dann vom aktuellen Wert x selbst ab und ist im einfachsten, hier ausschließlich betrachteten Fall gegeben durch
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta_1 x \left(1 - \frac{x}{\beta_2}\right).$$
Die mathematische Form einer **Differenzialgleichung** kommt also direkt aus dem Sachverhalt!

2. ***Transformation:*** Dieses Modell kann immer durch Transformation der endogenen Variablen
$$y = \frac{x}{\beta_2 - x}$$
in ein **Modell unbeschränkten Wachstums** mit *derselben* relativen Wachstumsrate β_1 umgewandelt werden:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta_1 y$$
Ist die Sättigung bekannt und bei $\beta_2 = 1$ (z.B. Infektionsausbreitung), dann nennt man $y = x/(1-x)$ auch das **odds ratio**.

3. Dieses ***Modell unbeschränkten Wachstums*** wird *immer* durch die Exponentialfunktion
$$y(t) = y_0\, e^{\beta_1 t}$$
gelöst bzw *ist zu dieser äquivalent*. Die Lösung solcher Differenzialgleichungen hat immer einen freien Parameter, hier den Anfangswert $y_0 = y(0)$, also $y(t)$ zum Anfangszeitpunkt $t = 0$.

In manchen Problemstellungen ist nicht die **Wachstumsrate** β_1 sondern der **Wachstumsfaktor** R vorgegeben, der den Quotient der Wachstumsgröße y in aufeinanderfolgenden Zeitspannen der Länge τ angibt:

$$R = \frac{y(t+\tau)}{y(t)} = \frac{y_0\ e^{\beta_1 t+\tau}}{y_0\ e^{\beta_1 t}} = e^{\beta_1 \tau}.$$

Ist R vorgegeben, lässt sich umgekehrt $\beta_1 = 1/\tau \ln R$ berechnen.

4. ***Rücktransformation:*** Mit der Lösung des Modells unbeschränkten Wachstums in y ist durch Rücktransformation auch das Modell beschränkten Wachstums in x gelöst:

$$y = \frac{x}{\beta_2 - x} \quad \Rightarrow x = \frac{\beta_2 y}{1+y}, \quad x(t) = \frac{\beta_2 y(t)}{1+y(t)} = \frac{\beta_2 y_0\ e^{\beta_1 t}}{1+y_0\ e^{\beta_1 t}}$$

wobei natürlich auch der Anfangswert für y aus dem für x berechnet werden muss: $y_0 = x_0/(\beta_2 - x_0)$. Voilà!

Aufgabe 3.1: Ausbreitung einer neuen Technologie

Das SI-Modell der Infektionsdynamik ist ein Spezialfall der Prozesse mit beschränkten Wachstum, die beim Aufkommen und der Durchsetzung eines neuen Produkts zum Tragen kommen und durch die Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta_1 x \left(1 - \frac{x}{\beta_2}\right)$$

bzw die Differenzengleichung

$$x(t+\tau) = R x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{\beta_2}\right)$$

beschrieben werden

(a) Unter welchen Bedingungen wird dies angenähert ein Modell des unbeschränkten Wachstums? Was bedeutet also der Parameter β_1?

(b) Charakterisieren Sie die Parameter β_2 und R

(c) Stellen Sie nun eine Beziehung zwischen β_1 und R im Grenzfall unbeschränkten Wachstums her.

(d) Es sei nun $x(t)$ die Nachfrage (Fahrten pro Person und Jahr) des neue Modus "mietbarer E-Scooter". In den ersten drei Jahren seit Zulassung war die Nachfrage 0.1 bzw. 0.4 bzw 1.4 Fahrten pro Person und Jahr. Begründen Sie, dass sich der E-Scooter im ersten Jahr noch in der unbeschränkten Wachstumsphase befindet und schätzen Sie (ohne Regressionsrechnung) R bzw β_1

(e) In einem anderen vergleichbaren Land sind E-Scooter schon länger zugelassen und die exponentielle Wachstumsrate hat sich bei $x = 4$ Fahrten/Jahr schon halbiert. Schätzen Sie aus dieser Information β_2

(f) Stellen Sie eine Differentialgleichung für das verallgemeinerte *Odds-Ratio* $y = x/(\beta_2 - x)$ auf und zeigen Sie, dass das auf die Gleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta_1 y$ mit der Lösung $y = y_0 e^{\beta_1 t}$ führt.

(g) Geben Sie nun die Lösung für $x(t)$ an und prognostizieren Sie mit dem Modell die Nachfrage nach E-Scootern im Jahr 10, also in 7 Jahren

Aufgabe 3.2: Ausbreitung einer neuen Mutante bzw. Ersetzung einer alten durch eine neue Technologie

Das gesamte Infektionsgeschehen (Zahl x der Neuinfektionen pro Woche) bzw. das gesamte Marktsegment der Kraftfahrzeuge (Zahl x der Neuwagenkäufe pro Jahr) hat gemeinsame Beschränkungen auf eine Zahl $x = \beta_2$ wie in Aufgabe 1 (durch die Herdenimmunität bzw wenn jeder bereits ein Auto hat). Für die Dynamik der *Verdrängung* des Wildtyps bzw der alten Technologie x_1 durch eine Mutante/neue Technologie x_2 kürzt sich diese gemeinsame Beschränkung $x_1 + x_2 \leq \beta_2$ heraus, wenn man sich wieder die Dynamik des Quotienten (**odds ratio**) anschaut:

$$\frac{x_2(t+\tau)}{x_1(t+\tau)} = \frac{R_2 x_2(t)}{R_1 x_1(t)}$$

(a) Stellen Sie die Differenzengleichung für $y(t+\tau) = x_2(t+\tau)/x_1(t+\tau)$ auf und zeigen Sie, dass die umgeformte Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu y$ den Parameter $\mu = 1/\tau \ln(R_2/R_1)$ hat

(b) Um die gemeinsame Beschränkung auf $x_1 + x_2 \leq \beta_2$ zu berücksichtigen, wird das Verhältnis $y = x_2/x_1 = r/(1-r)$ nun in den "Marktanteil" $r = x_2/(x_1 + x_2)$ der neuen Mutation/Technologie umgewandelt. Geben Sie die Zeitentwicklung des Marktanteils $r(t)$ für den Anfangswert $r(0) = r_0$ bzw $y_0 = r_0/(1-r_0)$ an

(c) Am 21. Januar 2022 war der Anteil der Virusmutation Omicron 3.6 % und am 18. Februar 2022 25.9 %. Wie groß ist das Verhältnis R_2/R_1 der Wachstumsfaktoren der britischen Mutation (pro Tag) gegenüber den anderen Virusvarianten? Wie hoch ist gemäß dem Modell der Omicron-Anteil am 18. März und am 15. April 2022?

(d) Der Anteil der Fahrzeuge mit alternativen Antrieben (BEV, Wasserstoff, Power2Liquid etc) an den jährlichen Neukäufen ist zur Zeit bei etwa 7 % (Verkäufe 2020) und wuchs in den letzten Jahren um etwa 60 % jährlich (abgezogen sind Sondereffekte durch die Kaufprämie). Die obere Grenze liegt bei etwa 80 %. Schätzen Sie aus diesen Daten die Parameter für ein Modell beschränkten Wachstums und prognostizieren Sie den Anteil im Jahr 2030.