| Name: | Vorname: | Matrikel-Nr.: |
|---|---|---|
| | | |

# Klausur zur Vorlesung Verkehrsdynamik und -simulation

# SS 2019

# Lösungsvorschlag

## Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) Beim Dieselfahrzeug ist der Verbrauch auf der $L = 100\,\mathrm{km}$ langen Strecke direkt durch den spezifischen Verbrauch $c_{\mathrm{spez}}$ in Liter pro kWh multipliziert mit der benötigten Energie $W$ in kWh gegeben. Die benötigte Energie beträgt bei $v = 40\,\mathrm{m/s}$:[1]

$$W = L\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = L\left(\frac{P_0}{v} + mg\mu + c_L v^2\right) = 111 * 10^6\mathrm{Ws} = 30.7\,\mathrm{kWh}$$

Der Dieselverbrauch $C$ ergibt sich durch Multiplikation mit dem spezifischen Verbrauch $c_{\mathrm{spez}}$ und die $CO_2$-Emissionen $E_{\mathrm{CO2}}$ in kg durch eine weitere Multiplikation mit der angegebenen Emissionsrate 2.6 kg/l:

$$C = c_{\mathrm{spez}}W = 7.67\,\mathrm{l}, \quad E_{\mathrm{CO2,\,D}} = 2.6\,\mathrm{kg/l}\;C = 20.0\,\mathrm{kg},$$

also 200 g $CO_2$ pro Kilometer.

Beim E-Fahrzeug muss die mechanische Energie zunächst durch den Wirkungsgrad $\eta$ geteilt werden, um die benötigte elektrische Energie zu erhalten (man beachte die größere Fahrzeugmasse!)

$$W_{\mathrm{el}} = W/\eta = L/\eta\left(\frac{P_0}{v} + m_{\mathrm{el}}g\mu + c_L v^2\right) = 114 * 10^6\mathrm{Ws} = 39.7\,\mathrm{kWh}$$

Die $CO_2$-Emissionen ergeben sich dann direkt aus dem angegebenen Energiemix:

$$E_{\mathrm{CO2,\,el}} = 0.5\,\mathrm{kg/kWh}\;W_{\mathrm{el}} = 19.9\,\mathrm{kg}$$

also 199 g $CO_2$ pro Kilometer: Das Elektroauto hat unter diesen Bedingungen keine wesentlichen Emissionsvorteile.

(b) Die zum Zurücklegen der $L = 500\,\mathrm{m}$ langen Strecke von Stopp zu Stopp benötigte mechanische Energie lässt sich in drei Teile zerlegen (der Luftwiderstand wird ja vernachlässigt):

[1] *Hinweis:* man beachte, dass die in SI-Einheiten berechnete rechte Seite, also $P_0 = 2\,000\,\mathrm{W}$, $v = 40\,\mathrm{m/s}$, $L = 100\,000\,\mathrm{m}$ durch $3.6\,10^6$ geteilt werden muss, um von den SI-Einheiten Ws auf den Zahlenwert in kWh zu kommen!

– Kinetische Energie: Beim Dieselfahrzeug ist keine Rückgewinnung möglich, vielmehr wird die gesamte kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ mit $v = 15\,\mathrm{m/s}$ beim Bremsen in Wärme umgesetzt. Beim E-fahrzeug gibt es eine 50 %-ige Rekuperation, so dass nur für die Hälfte $\frac{1}{4}m_{\mathrm{el}}v^2$ der kinetischen Energie "frischer" Strom benötigt wird.

– Energie zur Überwindung der Rollreibung. In der $L_b = 100\,\mathrm{m}$ langen Bremsphase bewirkt die Rollreibung einen Teil der Verzögerung und ist deshalb nicht relevant. Für die restliche Strecke $L - L_b = 400\,\mathrm{m}$ ist hingegen die Energie gemäß "Kraft mal Weg" nötig, also $mg\mu(L - L_b)$ (Dieselfahrzeug) bzw. $m_{\mathrm{el}}g\mu(L - L_b)$ (E-Fahrzeug).

– Energie zur Bereitstellung der Grundleistung. Während der $\tau_b = 10\,\mathrm{s}$ langen Bremsphase wird diese durch den Abbau der kinetischen Energie bereitsgestellt, effektiv wird "frische" Energie nur für die Restzeit $T - \tau_b = 50\,\mathrm{s}$ benötigt, also summa summarum $P_0(T - \tau_b)$.

Damit für das Dieselfahrzeug:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv^2 + mg\mu(L - L_b) + P_0(T - \tau_b) = 348\,000\,\mathrm{Ws} = 0.0967\,\mathrm{kWh}, \\ C &= c_{\mathrm{spez}}W = 0.0242\,\mathrm{l}, \\ E_{\mathrm{CO2,\,D}} &= 2.6\,\mathrm{kg/l}\ C = 0.0629\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

und für das Elektrofahrzeug:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4}m_{\mathrm{el}}v^2 + m_{\mathrm{el}}g\mu(L - L_b) + P_0(T - \tau_b) = 302\,000\,\mathrm{Ws} = 0.0839\,\mathrm{kWh}, \\ W_{\mathrm{el}} &= W/\eta = 0.1049\,\mathrm{kWh}, \\ E_{\mathrm{CO2,\,el}} &= 0.5\,\mathrm{kg/kWh}\ W_{\mathrm{el}} = 0.0524\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

Hochgerechnet auf einen Kilometer wird also beim Dieselfahrzeug 126 $\mathrm{gCO_2}$ und beim E-Fahrzeug 104 $\mathrm{gCO_2}$ emittiert. Hier ist also das E-Fahrzeug deutlich günstiger. Bemerkenswert ist, dass trotz des Start- und Stoppvorgangs beim Dieselfahrzeug pro Kilometer *weniger* Diesel verbraucht bzw bei beiden Antriebstypen weniger $CO_2$ emittiert wird (beim E-Fahrzeug deutlicher als beim Verbrenner) als bei der gleichmäßigen, aber schnellen Autobahnfahrt!

**Hinweise:**

- Gerade bei Verbrauchsberechnungen auf die Einheiten achten, grundsätzlich SI verwenden und erst zum Schluss beispielsweise WS in kWh umrechnen, wenn der spezifische Verbrauch pro kWh angegeben ist. Ausnahme: Kraftstoffmenge in Liter, nicht $\mathrm{m}^3$.

- Aufgabenstellung richtig lesen (i): Der Luftwiderstandsanteil ist dort durch $c_L v^2$, nicht $\frac{1}{2}c_L v^2$ definiert.

- Aufgabenstellung richtig lesen (ii): Die Hinweise sollten beachtet werden. Beispielsweise dienen die Hinweise bei (b) gerade dem Ziel, umständliche bzw nicht zielführende Berechnungen mit Beschleunigungen etc. zu vermeiden. Eigentlich steht dort schon fast die Lösung für die Energieanteile: Rollreibung: Kraft mal Weg, Luftwiderstand: 0, Grundleistung: Leistung mal Zeit, Beschleunigen/Bremsen: kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$.

- Ein Wirkungsgrad $< 1$ verschlechtert ja immer die Situation: Also führt er zu mehr Verbrauch, steht dort also immer im Nenner (hier für die E-Autos relevant, beim Verbrenner ist er ja implizit durch den spezifischen Verbrauch gegeben).

**Aufgabe 2 (30 Punkte)**

*Gegeben sei das Lighthill-Whitham-Richards-Modell mit dem dreieckigen, auf einen Fahrstreifen bezogenen Fundamentaldiagramm*

$$Q(\rho) = \min\left(V_0\rho, \frac{1}{T}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)\right).$$

(a) Bei der kritische Dichte beim Flussmaximum schneiden sich beide Zweige des Fundamentaldiagramms

$$V_0\rho_c = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_{\max}}\right) = \frac{1}{T}(1 - \rho_c l_{\text{eff}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_c = \frac{1}{V_0T + l_{\text{eff}}}$$

Kapazität:

$$Q_{\max} = V_0\rho_c = \frac{V_0}{V_0T + l_{\text{eff}}}$$

Stauwellengeschwindigkeit:

$$c = Q'(\rho)|_{\rho>\rho_c} = -\frac{l_{\text{eff}}}{T} = -\frac{1}{\rho_{\max}T}$$

(b) Mit $T = -l_{\text{eff}}/c = -1/(\rho_{\max}c)$ kann man den Ausddruck der Kapazität umformen zu

$$Q_{\max} = \frac{\rho_{\max}V_0}{1 - V_0/c}$$

und damit

$$\rho_{\max} = \frac{Q_{\max}(1 - V_0/c)}{V_0} = Q_{\max}\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{c}\right)$$

sowie

$$T = -\frac{1}{\rho_{\max}c} = -\frac{V_0}{cQ_{\max}(1 - V_0/c)} = \frac{V_0}{Q_{\max}(V_0 - c)}$$

Damit wird das Fundamentaldiagramm zu

$$Q(\rho) = \begin{cases} V_0\rho & \rho \leq \frac{Q_{\max}}{V_0} \\ Q_{\max}\left(1 - \frac{c}{V_0}\right) + c\rho & \rho > \frac{Q_{\max}}{V_0} \end{cases}$$

(c) Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$:

(i) aus den Fluss-Dichte-Daten anhand der dargestellten Fitgerade:

$$c = Q'(\rho)|_{\rho>\rho_c} = -\frac{1\,200\,\text{Fz/h}}{20\,\text{Fz/km}} = -60\,\text{km/h} = -16.7\,\text{m/s},$$

(ii) anhand des Zeitversatzes der Stauwellen (Pfeile rechts):

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2\,\text{km}}{8 * 60\,\text{s}} = -15\,\text{km/h} = -4.17\,\text{m/s}$$

(d) Abschätzung der Kapazität $Q_{\max}$ durch den Schnittpunkt der beiden Fitgerasden:

$$Q_{\max} = 2\,100\,\mathrm{Fz/h}$$

Folgezeit und maximale Dichte:

(i) aus der Fitgeraden der Fluss-Dichte-Daten:

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= 55\,\mathrm{Fz/h}\ \text{(Schnitt der Staugeraden mit der Abszisse)}, \\ T &= -\frac{1}{\rho_{\max} c} = 1.09\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

(ii) aus der durch die Zeitreihen bestimmte Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = -15\,\mathrm{km/h}$:

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= Q_{\max}\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{c}\right) = 158\,\mathrm{Fz/h}, \\ T &= -\frac{1}{\rho_{\max} c} = 1.52\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

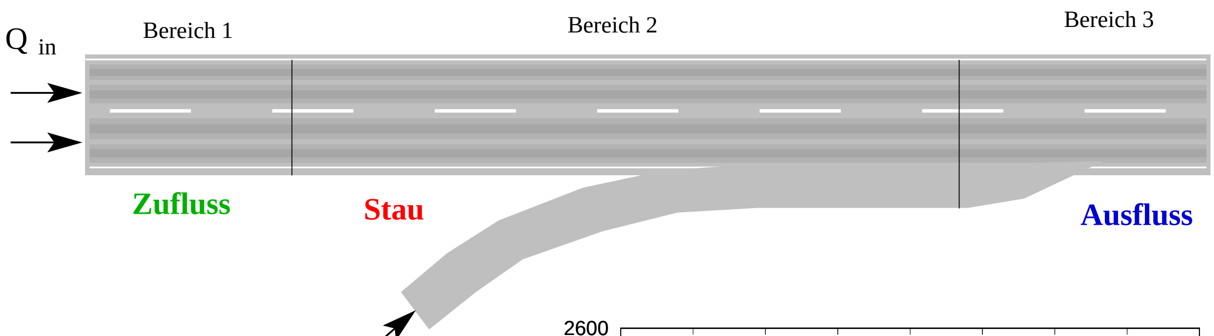
Speziell die maximale Dichte wird durch die alleinige Betrachtung des Fundamentaldiagramms als Fitgeraden der Punktewolke des freien und gestauten verkehrs grob verzerrt geschätzt bzw. massiv unterschätzt.

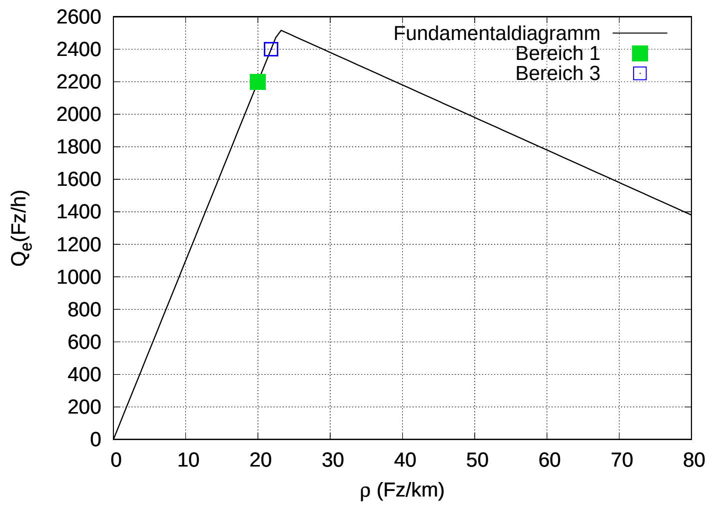
(e) Sowohl bei maximaler Dichte (Stillstand) als auch bei einer leeren Fahrbahn fahren keinerlei Fahrzeuge über die Detektorschleifen, es gibt also keinerlei Signal und damit keinerlei Unterscheidungsmöglichkeit zwischen leerer Straße und maximaler Dichte.[2]

[2] Bei Induktionsschleifen wird evtl. eine statische Belegung angezeigt, dies ist aber nicht Teil der Aufgabe.

## Aufgabe 3 (40 Punkte)

*Der Verkehr auf einer zweistreifigen Richtungsfahrbahn mit Rampe wird mit dem LWR-Modell und den in der Abbildung angegebenen Fundamentaldiagramm (pro Streifen) modelliert.*




(a) Ablesen: Maximalen Fluss pro Streifen: $Q_{\max} = 2\,500\,\mathrm{Fz/h}$.

Kritische Dichte: $\rho_c = 23\,\mathrm{Fz/km}$

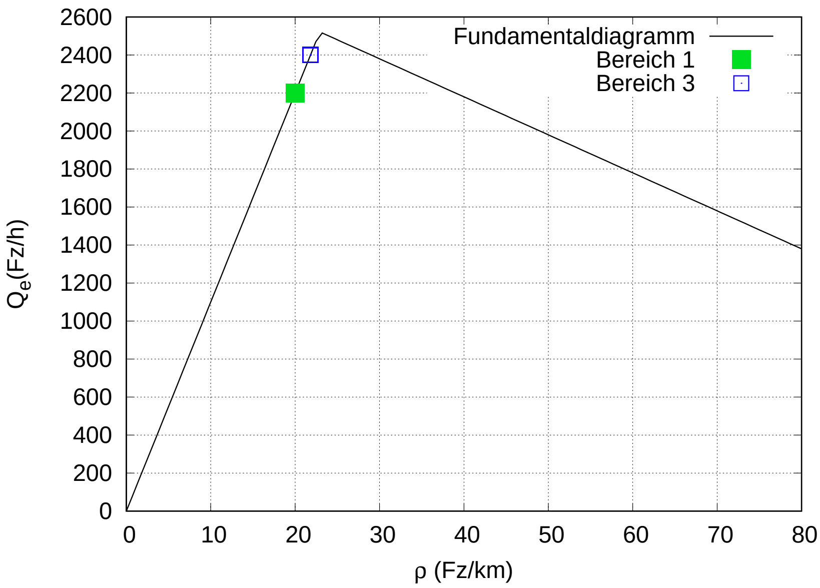
Wunschgeschwindigkeit: $V_0 = 2\,200\,\mathrm{Fz/h}/20\,\mathrm{Fz/km} = 110\,\mathrm{km/h}$.

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Stauwellen: $c = 200\,\mathrm{Fz/h}/10\,\mathrm{Fz/km} = 20\,\mathrm{km/h}$.

Maximale Dichte: $\rho_{\max} = \rho_c + Q_{\max}/|c| = 148\,\mathrm{Fz/km}$

*Hinweis:* Aufgrund von Ablesefehlern ergeben alle Schätzungen zwischen 145 Fz/km und 150 Fz/km volle Punktzahl

(b) Bei einem gesamten Zufluss von 4 400 Fz/h und einen Rampenfluss von 400 Fz/h beträgt die Verkehrsbelastung stromabwärts der Rampe $Q_{\text{tot}} = 4\,800\,\mathrm{Fz/h}$. Dies ist kleiner als die Kapazität $K = 2Q_{\max} = 5\,000\,\mathrm{Fz/h}$. Also kommt es (im Rahmen des LWR Modells) nicht zum Verkehrsazusammenbruch. Charakterisierung des Verkehrs im Fundamentaldiagramm:

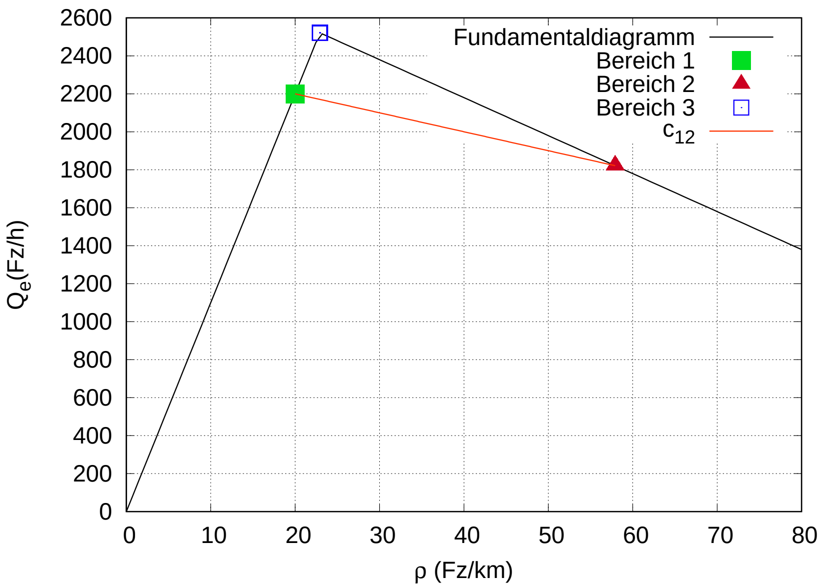



(c) Nun beträgt der Rampenfluss $Q_{\text{rmp}} = 1\,400\,\text{Fz/h}$. Damit beträgt stromabwärts der Rampe die Nachfrage (=*potenzieller* Gesamtfluss)

$$Q_3^{\text{tot}} = Q_{\text{in}} + Q_{\text{rmp}} = 5\,800\,\text{Fz/h} > K = 5\,000\,\text{Fz/h}.$$

Die Nachfrage ist also größer als das "Angebot" von $5\,000\,\text{Fz/h}$, so dass es im Bereich 3 zum Maximalflusszustand und im Bereich 2 zum Stau kommt.

Charakteristische Punkte im Fundamentaldiagramm und Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_{12}$ siehe folgendes Diagramm:




Die Punkte wurden durch

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_{\text{in}}/2 = 2\,200\,\text{Fz/h}, \quad \rho_1 = Q_1/V_0 = 20\,\text{Fz/km}, \\
Q_3 &= Q_{\max} = 2\,500\,\text{Fz/h}, \quad \rho_3 = Q_3/V_0 = \rho_c = 23\,\text{Fz/km}, \\
Q_2 &= Q_3 - Q_{\text{rmp}}/2 = 1\,800\,\text{Fz/h}, \quad \rho_2 = \rho_{\max}(1 - Q_2 T) = 58\,\text{Fz/km}
\end{aligned}$$

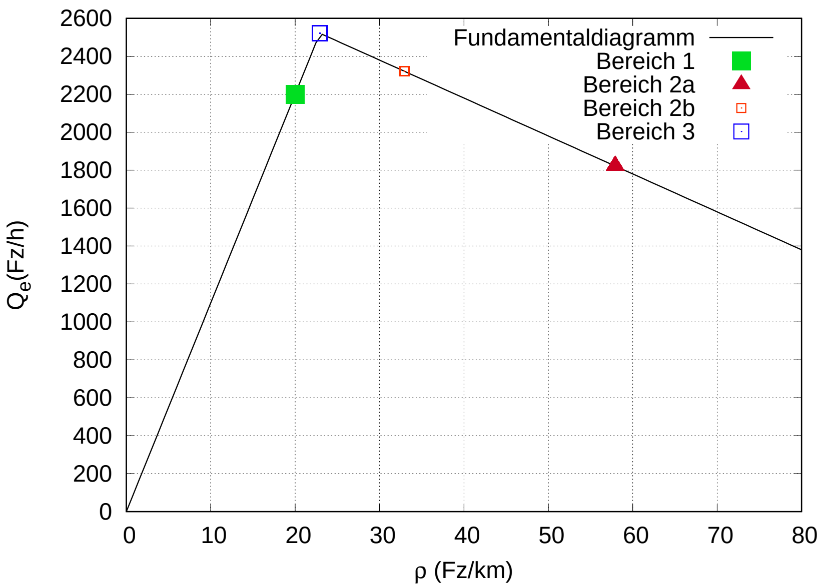
ermittelt (bzw. die Dichtewerte durch die Flusswerte und der Bedingung, dass sie auf dem Fundamentaldiagramm liegen). Aus der Graphik ließt man eine Staufront-Ausbreitungsgeschwindigkeit von etwa

$$c_{12} = \frac{400\,\mathrm{Fz/h}}{-38\,\mathrm{Fz/km}} = -10.5\,\mathrm{km/h}$$

ab. *Hinweis:* Alle Schätzungen zwischen -11.5 km/h und -9.5 km/h ergeben volle Punktzahl.

(d) Um 17:00 reduziert sich der Rampenfluss wieder auf 400 Fz/h. Aufgrund des bestehenden Staus bleibt der Ausflussbereich 3 auf dem Maximalflusszustand (das Angebot bzw. die Kapazität begrenzt den Fluss). Im Stau gibt es aber nun zwei Bereiche (vgl. Abbildung):

- Stromaufwärtiger Bereich 2a: Wie bisher, $Q_{2a} = Q_2 = 1\,800\,\mathrm{Fz/h}$, $\rho_{2a} = \rho_2 = 58\,\mathrm{Fz/km}$
- Stromaufwärtiger Bereich 2b als Folge des reduzierten Rampenflusses: $Q_{2b} = Q_{\mathrm{max}} - Q_{\mathrm{rmp}}/2 = 2\,300\,\mathrm{Fz/h}$, $\rho_{2b} = \rho_{\mathrm{max}}(1 - Q_{2b}T) = 33\,\mathrm{Fz/km}$.




Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Übergangs 2a→2b ist gleich der Steigung der Staugeraden, also $c_{2a,2b} = -20\,\mathrm{km/h}$, während sich der Übergang 1→2a mit $c_{1,2a} = -10\,\mathrm{km/h}$ ausbreitet.

Um 17:00 gibt es nur den Staubereich 2a mit einer Länge von

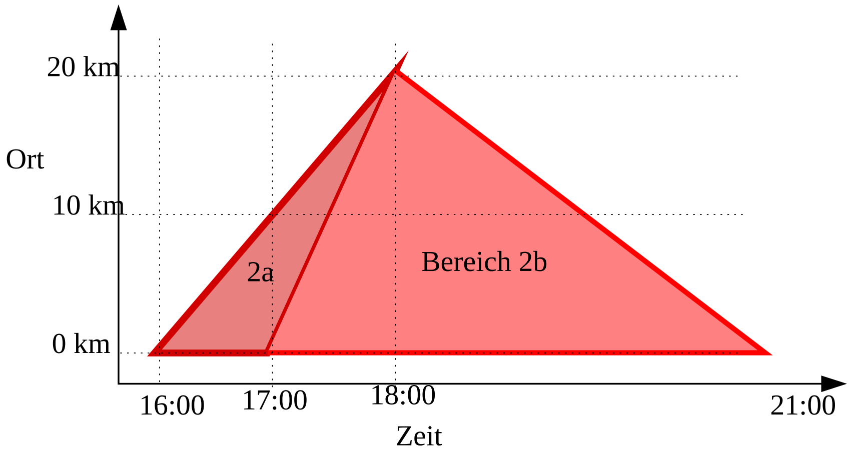
$$L_{\mathrm{stau}} = |c_{1,2a}| 1\,\mathrm{h} = 10\,\mathrm{km}$$

Die Zeitverzögerung ist gegeben durch die Differenz der Durchfahrzeit durch den Stau und der Reisezeit bei freiem Verkehr:

$$\tau_{\mathrm{Verzoeg}} = L_{\mathrm{stau}} \left( \frac{1}{V_{\mathrm{stau}}} - \frac{1}{V_0} \right) = L_{\mathrm{stau}} \left( \frac{\rho_{2a}}{Q_{2a}} - \frac{1}{V_0} \right) = 1\,145\,\mathrm{s} - 327\,\mathrm{s} = 817\,\mathrm{s}$$

Die Geschwindigkeit im Staubereich beträgt dabei $V_{\mathrm{stau}} = Q_{2a}/\rho_{2a} = 8.74\,\mathrm{m/s} = 31.4\,\mathrm{km/h}$. Die Reisezeit wird gegenüber freiem Verkehr um etwa den Faktor 3.5 größer.

Nach 17:00 *wächst der Stau noch weiter*, da der Übergang 1→2a ja nichts vom wieder reduzierten Rampenfluss "weiß", vgl das (nicht verlangte) Bild:




Erst um 18:00 hat der Übergang 2a→2b den Übergang 1→2a "eingeholt" und der Stau ist nun $c_{2a,2b} 1\,\text{h} = 20\,\text{km}$ lang.

Im Gegenatz dazu nimmt die *Zeitverzögerung* bzw die Reisezeit bereits ab 17:00 *ab*: Am Staukopf abzüglich der Rampe passieren insgesamt $2Q_{2b} = 4\,600\,\text{Fz/h}$ passieren, während die Nachfrage nur $Q_{\text{in}} = 4\,400\,\text{Fz/h}$ beträgt. Also verlassen ab 17:00 mehr Hauptstreckenfahrzeuge das Gebiet als neu hineinfahren.[3]

Nach 18:00 schrumpft der nun einzig vorhandene Staubereich 2b mit der Geschwindigkeit $c_{1,2b} = 100\,\text{Fz/h}/13\,\text{Fz/km} \approx 7.7\,\text{km/h}$. Ohne eine (zu erwartende) Reduzierung von $Q_{\text{in}}$ würde sich der Stau erst in nahezu 3 weiteren Stunden, also etwas vor 21:00 auflösen.

[3] Da der Stau sich insgesamt aber noch ausbreitet, kann die Reisezeit im Stau insgesamt noch zunehmen. Gleichzeitig nimmt aber auch die Referenzzeit für freien Verkehr mit wachsender Staulänge zu, so dass die Differenz immer kleiner wird.

**Aufgabe 4 (25 Punkte)**

*Ein zeitkontinuierliches Fahrzeugfolgemodell ist durch folgende Beschleunigung als Funktion des Stoßstange-zu-Stoßstange-Abstands $s$, der Geschwindigkeit $v$, und der Geschwindigkeit $v_l$ des Vorderfahrzeugs definiert:*

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f(s, v, v_l) = \frac{V_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} - \frac{\gamma v(v - v_l)}{s}, \quad V_{\text{opt}}(s) = \min\left(V_0, \frac{s}{T}\right).$$

(a) Ohne den zweiten Term proportional zu $\gamma$ entspräche das Modell dem OVM mit dreieckigem Fundamentaldiagramm. Also ist $V_0$ die Wunschgeschwindigkeit, $\tau$ die Geschwindigkeitsanpassungszeit und $T$ die Folgezeit. Mit dem $\gamma$-Term ergibt sich eine Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsdifferenz. Also gibt $\gamma$ die Sensitivität für Geschwindigkeitsdifferenzen an.[4]

(b) Plausibilitätsbedingungen:

- Reaktion auf Änderung des Abstandes:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{V'_{\text{opt}}(s)}{\tau} + \frac{\gamma v(v - v_l)}{s^2} = \begin{cases} \frac{1}{T\tau} + \frac{\gamma v(v-v_l)}{s^2} & s \le V_0 T \\ \frac{\gamma v(v-v_l)}{s^2} & s > V_0 T \end{cases}$$

  Die Sensitivität ist meist positiv (OK), kann aber für $v_l > v$ negativ werden und wird dies immer für $s > V_0 T$ und $v_l > v$. Dieser "Mitzieheffekt" ist nicht plausibel. Für große Abstände geht die Sensitivität $\to 0$: OK

- Reaktion auf Änderung der eigenen Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{1}{\tau} - \frac{\gamma(2v - v_l)}{s}$$

  Dies ist meist negativ, also OK, wird aber in Extremfällen (falls $v_l - 2v > s/\tau$) positiv und damit nicht plausibel (ebenfalls eine Folge des "Mitzieheffekts").

- Reaktion auf Änderung der Geschwindigkeit des Vorderfahrzeuges:

$$\frac{\partial f}{\partial v_l} = \frac{\gamma v}{s} > 0$$

  sowie $\frac{\partial f}{\partial v_l} \to 0$ für $s \to \infty$: OK.

(c) Im homogenen Fließgleichgewicht gilt die Beschleunigung $f = 0$ und $v_l = v = v_e$. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$0 = f(s, v_e, v_e) = \frac{V_{\text{opt}}(s) - v_e}{\tau}$$

und damit $v_e(s) = v_{\text{opt}}(s)$. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit ist also gleich der optimalen Geschwindigkeit.

[4] Im Gegensatz zum in der Vorlesung vorgestellten FVDM nimmt die Sensitivität mit dem Abstand ab.

(d) Kolonnenstabilität im *gebundenen Verkehr* ($s \le V_0T$) im homogenen Fließgleichgewicht ist gegeben, falls (siehe Aufgabenstellung)

$$\begin{aligned} V_e'(s) = \frac{1}{T} \quad &< \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_l} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ &= \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma v}{s} + \frac{1}{\tau} + \frac{\gamma(2v - v_l)}{s}\right) \\ &= \quad \frac{1}{2\tau} + \frac{\gamma v}{s} \\ &= \quad \frac{1}{2\tau} + \frac{\gamma}{T} \end{aligned} \tag{1}$$

Man beachte dabei, dass alle Größen im Fließgleichgewicht genommen werden, also $v_l = v$ und $s = vT$. Also

$$\frac{1-\gamma}{T} < \frac{1}{2\tau} \quad \text{bzw.} \quad \frac{T}{\tau} > 2(1-\gamma)$$

Die Folgezeit muss also hinreichend groß bzw. die Geschindigkeitsanpassungszeit hinreichend klein sein. Für $\gamma > 1$ ist das Modell unabhängig von den anderen Parametern immer kolonnenstabil.

*Bemerkung:* Im Grenzfall des OVM ($\gamma = 0$) erhalten wir für gebundenen Verkehr die abstandsunabhängige Bedingung

$$\tau_{\mathrm{OVM}} < T/2$$

Im *freien Verkehr*, $s > V_0T$, ist $V_e'(s) = 0$, also gilt anstelle von (1) die Bedingung

$$0 < \frac{1}{2\tau} + \frac{\gamma}{T},$$

die immer erfüllt ist. Also ist der freie Verkehr in diesem Modell immer stabil.