Klausur zur Vorlesung
Verkehrsdynamik und -simulation, SS 2018
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Ein Fußgängerstrom auf einem $b = 2\,\mathrm{m}$ breiten Weg wird makroskopisch durch die Dichte ρ^* (Fußgänger pro m^2) und die Flussdichte Q^* (Fußgänger pro Sekunde und pro m Querschnitt) beschrieben. Das Fundamentaldiagramm sei durch

$$Q^*(\rho^*) = V_0 \rho^* \left(1 - \frac{\rho^*}{\rho^*_{\mathrm{max}}}\right)$$

mit $V_0 = 1.4\,\mathrm{m/s}$ und $\rho^*_{\mathrm{max}} = 4/\mathrm{m}^2$ gegeben.

(a) Multilikation beider Seiten der angegebenen Gleichung mit b liefert

$$Q(\rho) = V_0 \rho \left(1 - \frac{\rho}{b\rho^*_{\mathrm{max}}}\right) = V_0 \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{max}}}\right).$$

Die Parameterwerte sind die unveränderte Wunschgeschwindigkeit $V_0 = 1.4\,\mathrm{m/s}$ und die maximale 1d-Dichte $\rho_{\mathrm{max}} = b\rho^*_{\mathrm{max}} = 8\,\mathrm{Fussg/m}^2$.

(b) Kapazität durch Maximieren des Fundamentaldiagramms bezüglich ρ:

$$\frac{\mathrm{d}Q(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = V_0 - \frac{2V_0\rho}{\rho_{\mathrm{max}}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_c = \frac{\rho_{\mathrm{max}}}{2} = 4\,\mathrm{Fussg/m}.$$

Damit ist die Kapazität

$$Q_{\mathrm{max}} = V_0 \rho_c \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_{\mathrm{max}}}\right) = \frac{V_0 \rho_{\mathrm{max}}}{4} = 2.8\,\mathrm{Fussg/s}.$$

Die zugehörigen 2d-Parameter sind

$$\rho^*_c = \rho_c/b = 2\,\mathrm{Fussg/m}^2, \quad Q^*_{\mathrm{max}} = Q_{\mathrm{max}}/b = 1.4\,\mathrm{Fussg/(ms)}.$$

Geschwindigkeit beim Flussmaximum:

$$V_c = Q(\rho_c)/\rho_c = V_0/2 = 0.7\,\mathrm{m/s}.$$

(c) Geschwindigkeits-Dichte-Relation:

$$V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho} = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{max}}}\right).$$

(d) Eine 1d-Fußgängerschlange auf einer Rolltreppe im *mit der Rolltreppe mitbewegten* System hat die Geschwindigkeit (relativ zur Rolltreppe)

$$V_{\mathrm{rel}}(\rho) = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{max}}}\right), \quad V_0 = 0.5\,\mathrm{m/s}, \quad \rho_{\mathrm{max}} = 2/\mathrm{m}$$

Im *ortsfesten* System muss man dazu die Rolltreppen-Geschwindigkeit V_r hinzuaddieren, während die Dichte unverändert bleibt:[1]:

$$V(\rho) = V_r + V_{\text{rel}}(\rho) = V_r + V_0\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}}\right)$$

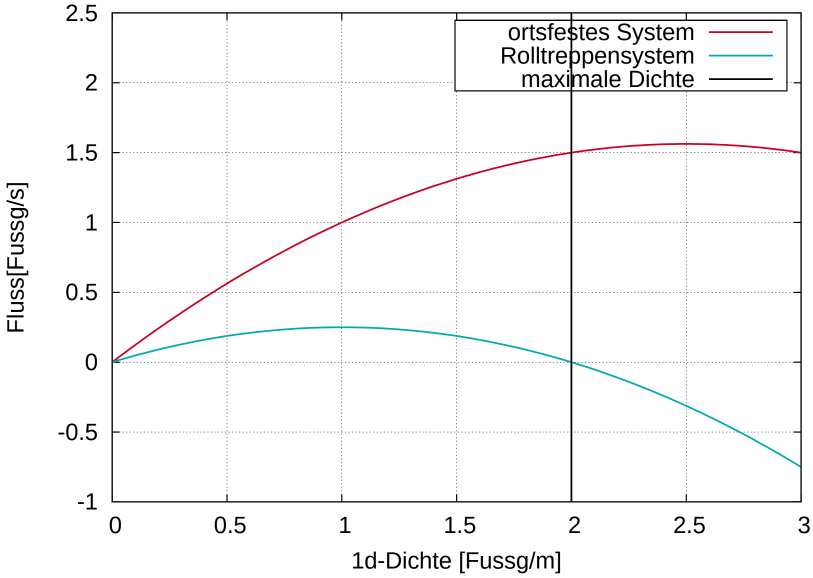
Das Fundamentaldiagramm im ortsfesten System lautet damit

$$Q(\rho) = (V_r + V_0)\rho - \frac{V_0\rho^2}{\rho_{\text{max}}}$$

und die Ableitung des Flusses nach der Dichte,

$$Q'(\rho) = V_r + V_0 - \frac{2V_0\rho}{\rho_{\text{max}}}$$

ist wegen $V_0 < V_r$ für alle zulässigen Dichten $\rho \in [0, \rho_{\text{max}}]$ positiv, also findet der maximale Fluss bei der größtmöglichen zulässigen Dichte $\rho = \rho_{\text{max}}$ statt (das formale Maximum des nicht restringierten Problems läge bei der Dichte $\rho_c = \rho_{\text{max}}(V_r + V_0)/(2V_0) > \rho_{\text{max}}$, vgl die Abbildung).



(e) Die Fußgänger stehen auf der Rolltreppe, $\rho = \rho_{\text{max}} = 2\,\text{Fussg/m}$. Im ortsfesten System ist der Fluss

$$Q_{\text{roll}} = V_r\rho_{\text{max}} = 1.5\,\text{Fussg/s}.$$

Außerhalb der Rolltreppe gilt eine erhöhte Wunschgeschwindigkeit $V_0 = 1.4\,\text{m/s}$ und erhöhte maximale Dichte $\rho_{\text{max}} = 4\,\text{Fussg/m}$ und damit die Kapazität

$$Q_{\text{max}} = \frac{V_0\rho_{\text{max}}}{4} = 1.4\,\text{Fussg/s}.$$

Die Rolltreppe stellt also (zumindest bei stehenden Fußgängern) *nicht* den Flaschenhals (*bottleneck*) dar, sondern die Bereiche davor und danach. In der Praxis wirkt der Bereich davor beschränkend und die maximale Dichte auf der Rolltreppe kann nicht realisiert werden.

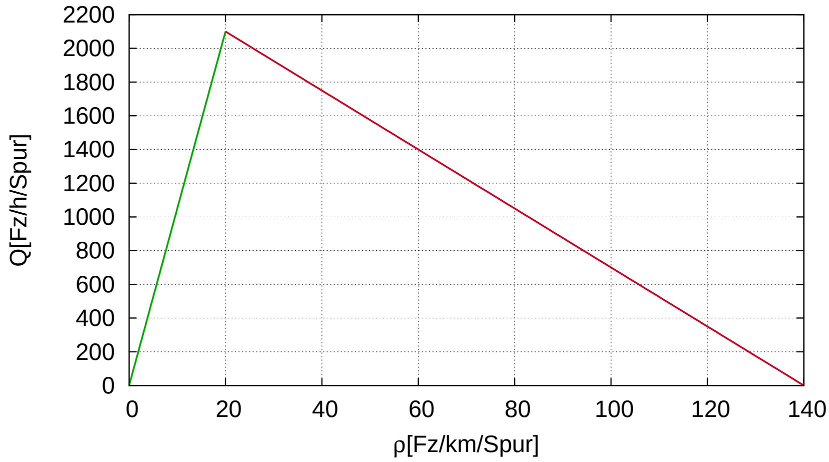
[1] Dies ist die Galilei-Transformation: eine relativistische Längenkontraktion und damit eine Veränderung der Dichte ist bei den vorliegenden Geschwindigkeiten vernachlässigbar; der Name der angesprochenen Sendung passt dazu perfekt...

Allgemeine Hinweise:

- Gerade bei zweidimensionalen Flüssen ist es wichtig, penibel auf die Einheiten zu achten und sich die Bedeutung der verschiedenen Größen ρ^*[Fussg/m^2], ρ[Fussg/m], Q^*[Fussg/(ms)] und Q[Fussg/s] klarzumachen. Sonst sind Fehler vorprogrammiert!

Aufgabe 2 (50 Punkte)

Der Verkehr auf einer dreistreifigen Richtungsfahrbahn wird mit dem LWR-Modell und den in der Abbildung angegebenen Fundamentaldiagramm (pro Spur) modelliert.



(a) Ablesen der spurbezogenen Größen:

$$Q_{\max} = 2\,100\,\mathrm{Fz/h}, \quad \rho_c = 20\,\mathrm{Fz/km}, \quad \rho_{\max} = 140\,\mathrm{Fz/km}$$

bzw (optional) die Kapazität und die Dichten der ganzen Richtungsfahrbahn:

$$K = 3Q_{\max} = 6\,300\,\mathrm{Fz/h}, \quad \rho_c^{\mathrm{tot}} = 3\rho_c = 60\,\mathrm{Fz/km}, \quad \rho_{\max}^{\mathrm{tot}} = 3\rho_{\max} = 420\,\mathrm{Fz/km}.$$

Die abgeleiteten Größen ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{Q_{\max}}{\rho_c} = 105\,\mathrm{km/h} = 29.2\,\mathrm{m/s}, \\
c &= \frac{Q_{\max} - 0}{\rho_c - \rho_{\max}} = -17.5\,\mathrm{km/h} = -4.86\,\mathrm{m/s}, \\
l_{\mathrm{eff}} &= \frac{1}{\rho_{\max}} = 7.14\,\mathrm{m}, \\
T &= -\frac{l_{\mathrm{eff}}}{c} = 1.47\,\mathrm{s}, \\
\text{bzw. auch } T &= \frac{1}{Q_{\max}}\left(1 - \frac{Q_{\max} l_{\mathrm{eff}}}{V_0}\right) = 1.47\,\mathrm{s}.
\end{aligned}$$

(b) Durch die unfallverursachte Engstelle fließen insgesamt auf der einzigen noch freien Spur $1 * Q_{\max} = 2\,100\,\mathrm{Fz/h}$. Stromaufwärts im Stau (Bereich 2) verteilt sich dieser Fluss auf die drei Streifen, so dass dort

$$Q_2 = 700\,\mathrm{Fz/h}$$

gilt. Ablesen aus der Grafik (oder Ausrechnen mit $\rho_{\mathrm{cong}} = \rho_{\max}(1 - QT)$) liefert direkt

$$\rho_2 = 100\,\mathrm{Fz/km}$$

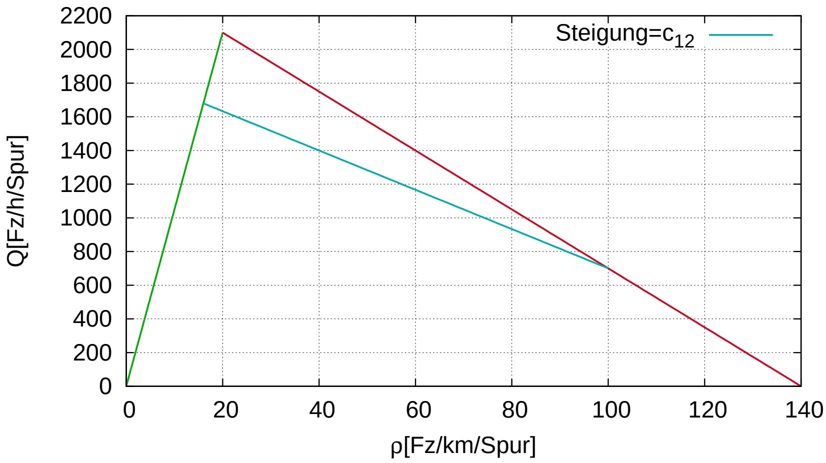
und die zugehörige Geschwindigkeit $V_2 = Q_2/\rho_2 = 7\,\mathrm{km/h}$. Damit benötigt man insgesamt zum Durchfahren des $L = 7\,\mathrm{km}$ langen Staus eine Stunde, davon muss man aber die Zeit $\tau_{\mathrm{frei}} = L/V_0 = 4\,\mathrm{min}$ abziehen, also

$$\tau_{\mathrm{verz}} = L/V_2 - L/V_0 = 56\,\mathrm{Minuten}.$$

(c) Bei einem Gesamtfluss $Q_{\text{tot}} = 5\,040\,\text{Fz/h}$ herrscht spurbezogen im Bereich freien Verkehrs stromaufwärts des Staus (Bereich 1) der Fluss $Q_1 = 1\,680\,\text{Fz/h}$ und $\rho_1 = Q_1/V_0 = 16\,\text{Fz/km}$. Die Staugrößen sind aus Teil (b) $Q_2 = Q_{\text{max}}/3 = 700\,\text{Fz/h}$ und $\rho_2 = 100\,\text{Fz/h}$ (direkt aus dem Diagramm ablesbar). Damit breitet sich der Übergang $1 \to 2$ (frei $\to$ gestaut) mit der Schockwellengeschwindigkeit

$$c_{12} = \frac{Q_1 - Q_2}{\rho_1 - \rho_2} = -11.\overline{6}\,\text{km/h} = -3.24\,\text{m/s}$$

aus. Einzeichnen in die Abbildung:



(d) Zunächst gilt es, den Zeitpunkt t_1 der Staueinfahrt für den betrachteten Fahrer zu bestimmen. Die Trajektorie des Fahrers ist durch $x_f(t) = V_0 t$ gegeben und die der Staufront durch $x_{12}(t) = x_{12}(0) + c_{12}t$, wobei $x_{12}(0) = 20 - 7\,\text{km} = 13\,\text{km}$ die Position des Übergangs des dann 7 km langen Staus zur Zeit $t = 0$ ist. Aus der Gleichsetzung $x_f(t) = x_{12}(t)$ ergibt sich

$$V_0 t = x_{12}(0) + c_{12}t \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{x_{12}(0)}{V_0 - c_{12}} = 401\,\text{s}$$

und eine dazugehörige Position $x_1 = V_0 t_1 = 11.7\,\text{km}$. Der zu durchfahrende Stau ist also nun $L_2 = 20\,\text{km} - x_1 = 8.3\,\text{km}$ lang. Damit ergibt sich die gesamt-Durchfahrtzeit durch den 20 km langen Abschnitt als

$$\tau = t_1 + \frac{L_2}{V_2} = 4\,670\,\text{s} = 77.8\,\text{Minuten}$$

(e) Nach der Räumung der Unfallstelle zur Zeit $t = 0$ setzt sich die bisher stehende stromabwärtige Staufront am Unfallort ("Staukopf") mit der Stauwellengeschwindigkeit $c = -4.86\,\text{m/s}$ in Bewegung (vgl. Teil (a) bzw direkt aus der Steigung der abgebildeten Staugeraden ermittelbar). Setzt man wie im Aufgabenteil (d)) wieder $x = 20\,\text{km}$ am Unfallort, ergeben sich für die beiden Fronten $1 \to 2$ (frei $\to$ Stau) und x_{23} (Stau $\to$ frei) folgende Ortsverläufe:

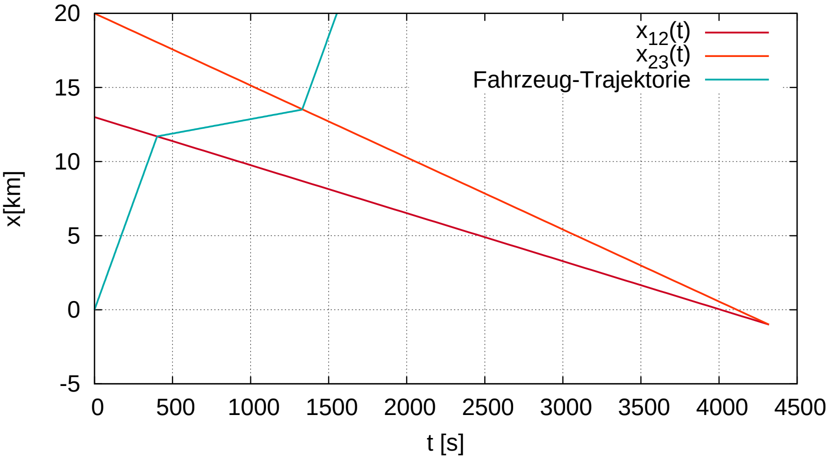
$$x_{12}(t) = x_{12}(0) + c_{12}t, \quad x_{23}(t) = x_{23}(0) + ct$$

mit $x_{12}(0) = 13\,\text{km}$ (20 km abzüglich 7 Kilometer Staulänge) und $x_{23}(0) = 20\,\text{km}$. Damit ergibt sich der Zeitpunkt und der Ort der Stauauflösung zu

$$t_{\text{aufl}} = \frac{x_{23}(0) - x_{12}(0)}{c_{12} - c} = 4\,320\,\text{s}, \quad x_{\text{aufl}} = x_{23}(0) + ct_{\text{aufl}} = -1\,\text{km}$$

Der Stau löst sich also 21 km stromaufwärts des Unfalls und 72 Minuten nach Räumung der Unfallstelle auf.

(f) Skizze:



Allgemeine Hinweise:

- Genau lesen! Beispielsweise sind in Teil (b) keinerlei Ausbreitungsgeschwindigkeiten wie c oder v_g gefragt (die Länge des Staus ist ja vorgegeben) , sondern die Fahrzeuggeschwindigkeit im Stau ist nötig, um die Reisezeit zu ermitteln!

Aufgabe 3 (40 Punkte)

Ein häufig verwendeter linearer Beschleunigungsregler für Adaptive-Cruise Control (ACC) im Bereich des Fahrzeugfolgens (Abstand s, Geschwindigkeit v, Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs v_l) ist definiert durch

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f(s, v, v_l) = k_1 s + k_2 v + k_3 v_l$$

(a) Einsetzen der gegebenen OV-Funktion in das gegebene FVDM:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\tau}\left(\frac{s}{T} - v\right) + \lambda(v_l - v) \\ &= \frac{1}{T\tau}\, s - \left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right)\, v + \lambda\, v_l,\end{aligned}$$

also gilt

$$k_1 = \frac{1}{T\tau}, \quad k_2 = -\left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right), \quad k_3 = \lambda.$$

(b) (i) $\frac{\partial f}{\partial s} = k_1 = \frac{1}{T\tau} > 0$, da sowohl die Folgezeit $T > 0$ als auch die Geschwindigkeitsanpassungszeit $\tau > 0$: OK

(ii) $\frac{\partial f}{\partial v} = k_2 = -(\frac{1}{\tau} + \lambda) < 0$, da auch die Sensitivität λ zur Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs positiv ist: OK

(iii) $\frac{\partial f}{\partial v_l} = \lambda > 0$: OK

(iv) $\lim_{s\to\infty}(\frac{\partial f}{\partial s}) > 0$: nicht OK

(v) $\lim_{s\to\infty}(\frac{\partial f}{\partial v_l}) > 0$: nicht OK

Auch bei beliebig großen Abständen behalten die Führungsfahrzeuge einen konstanten Einfluss, was das Modell für freien Verkehr unbrauchbar macht: es ist unvollständig. Ferner gibt es einen "Mitzieheffekt": Es ist möglich, dass $f(s, v, v_l) > f(s \to \infty, v, v_l)$, also das Fahrzeug bei viel Verkehr stärker beschleunigt als bei freien Verkehr: Dies ist unplausibel.

Hinweis: ein Kriterium, welches die Unvollständigkeit aufzeigt, genügt für volle Punktzahl.

(c) [Nichts]

(d) Das in Teil (c) vorgestellte Modell im homogenen ($v_l = v$) Fließgleichgewicht ($\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$):

- Fall 1: $v < v_0$: Dann kommt der erste Teil der min-Bedingung nicht in Betracht und wir erhalten

$$0 = \frac{1}{\tau}\left(\frac{s}{T} - v\right) \quad \Rightarrow \quad v = v_e = \frac{s}{T}$$

- Fall 2: $v_e = v_0$: Dann gilt $s > v_0 T$

Zusammen also

$$v_e(s) = \min\left(\frac{s}{T}, v_0\right),$$

also ein dreieckiges Fundamentaldiagramm.

(e) Aufgrund der Min-Bedingung spielt das Vorderfahrzeug keine Rolle, wann immer der Abstand s der Bedingung

$$s > (v_0 + \lambda\tau(v - v_l))\, T$$

genügt.

Hinweis (nicht verlangt): Diese Bedingung kann als "freier Verkehr" interpretiert werden. In einem solchen spielt also, wie es sein soll, das Vorderfahrzeug keine Rolle. Außerdem gibt es aufgrund der Min-Bedingung in keiner Situation einen Mitzieheffekt. Das Modell ist also vollständig.

(f) Wie üblich wird die Haltelinie der roten Ampel durch ein stehendes virtuelles Fahrzeug ($v_l = 0$) repräsentiert. Offensichtlich ist nur der zweite Teil des Min-Ausdrucks relevant:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{T\tau} - \left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right) v$$

Bremsen bedeutet $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} < 0$,[2] also

$$s < T\tau \left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right) v = Tv(1 + \lambda\tau) = 45\,\mathrm{m}.$$

(g) Auch hier ist nur der zweite Teil der "Min"-Bedingung relevant. Mit $v = v_l = 10\,\mathrm{m/s}$ und $s = 4\,\mathrm{m}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{T\tau} - \left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right) v = -3\,\mathrm{m/s}^2.$$

(h) Freie Beschleunigung bedeutet kein behinderndes Vorderfahrzeug, also ist der erste Teil der Min-Bedingung relevant:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 - v}{\tau}.$$

Maximale Beschleunigung bei $v = 0$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{\max} = \frac{v_0}{\tau} = 7.5\,\mathrm{m/s}^2$$

Der streckenbezogene Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit von Geschwindigkeit und Beschleunigung lautet nach dem physikbasierten Verbrauchsmodell auf steigungsfreier Strecke

$$C_x(v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}) = C_{\text{spez}} \left(\frac{P_0}{v} + m\mu g + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + c_L v^2\right)$$

Nun setzten wir für die Beschleunigung $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ das Modell ein:

$$\begin{aligned} [C_x(v)]_{\text{frei}} &= C_{\text{spez}} \left(\frac{P_0}{v} + m\mu g + m\frac{v_0 - v}{\tau} + c_L v^2\right) \\ &= C_{\text{spez}} \left(P_0 \frac{1}{v} + m(g\mu + v_0/\tau) - \frac{m}{\tau}\, v + c_L\, v^2\right) \end{aligned}$$

Zahlenwerte für $v = v_0/2 = 7.5\,\mathrm{m/s}^2$ und $P_0 = 0$ [keine Angabe im Aufgabenblatt] eingesetzt (Achtung: den spezifischen Verbrauch in SI-Einheiten umrechnen, $1\,\mathrm{kWh} = 3.610^6\,\mathrm{Ws}$):

$$100\,000 C_x = 94.5\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$$

Dieser exorbitant hohe Verbrauch rührt von der völlig unrealistischen freien Beschleunigung dieses Modells (bei dieser Parametrisierung) her: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (v_0 - v)/\tau = 3.75\,\mathrm{m/s}^2$ bei $v = v_0/2 = 7.5\,\mathrm{m/s}$.

[2] Streng genommen: Verzögern, was bei leichter Verzögerung auch ohne aktive Zuhilfenahme der Bremse durch den Fahrwiderstand erfolgen kann.

Hinweise:

- In der Verbrauchsformel nicht die Trägheitskraft $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ vergessen und für $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ das Modell einsetzen!