Klausur zur Vorlesung
Verkehrsdynamik und -simulation, SS 2016
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Gegeben ist eine zweistreifige Richtungsfahrbahn mit zwei im Wesentlichen geraden Abschnitten I und III sowie dem kurvigen Abschnitt II. Der Verkehrsfluss auf dieser Strecke soll mit dem LWR-Modell mit dreieckigem Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \min\left[V_0\rho, \frac{1}{T}(1 - \rho l_{\text{eff}})\right]$$

modelliert werden. Flüsse und Dichten sind dabei als effektive Spurmittelwerte zu verstehen. Auf den geraden Abschnitten gelten die Modellparameter $V_0 = 120\,\text{km/h}$, $T = 1.2\,\text{s}$ und $l_{\text{eff}} = 10\,\text{m}$, während die Kurvenstrecke II mit $V_0 = 90\,\text{km/h}$, $T = 1.6\,\text{s}$ und $l_{\text{eff}} = 10\,\text{m}$ parametrisiert wird.

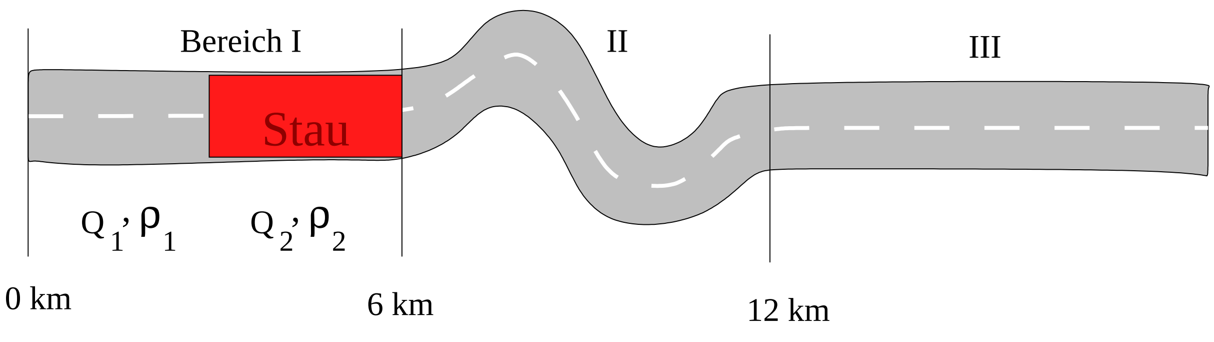
(a) Die Reduktion von V_0 bedeutet, dass auf der Kurvenstrecke auch bei freiem Verkehr die mittlere Geschwindigkeit geringer ist. Die erhöhte Folgezeit T entspricht einer im Mittel erhöhten Zeitlücke, was vorsichtigeres Fahren repräsentiert. Schließlich bleibt die (effektive) Länge $l_{\text{eff}} = 1/\rho_{\max}$ unverändert.

(b) Wenn ein Stau entstünde, dann am Beginn der durch die Kurvenstrecke verursachten Kapazitätsreduktion. Pro Fahrstreifen beträgt dort die Kapazität

$$Q_{\max}^{\text{II}} = V_0^{\text{II}}\rho_c = \frac{V_0^{\text{II}}}{V_0^{\text{II}}T^{\text{II}} + l_{\text{eff}}} = 0.5\,\text{Fz/s} = 1\,800\,\text{Fz/h},$$

also insgesamt $K^{\text{II}} = 2Q_{\max}^{\text{II}} = 3\,600\,\text{Fz/h}$. Da dies oberhalb der anfänglichen Nachfrage von $3\,000\,\text{Fz/h}$ ist, entsteht kein Stau.

(c) Die Abschnitte I und III (Kapazität $K^{\text{I}} = 2Q_{\max}^{\text{I}} = 4\,800\,\text{Fz/h}$) können die erhöhte Nachfrage von $4\,000\,\text{Fz/h}$ aufnehmen, nicht jedoch die Engstelle II, so dass es dort zum Stau kommt, der sich stromaufwärts in den Bereich I fortplanzt (siehe Bild):



Ort der Stauentstehung: Beginn des Abschnitts II, also bei $x = 6\,\text{km}$

Zeit der Stauentstehung: Der "Nachfrageschwall" breitet sich im Abschnitt I mit $V_0 = 120\,\text{km/h}$ aus, bis er auf den Abschnitt II trifft und dort den Stau verursacht. Zeit zum Durchlaufen des Abschnitts I: $\tau = 6\,\text{km}/120\,\text{km/h} = 3\,\text{min} = 180\,\text{s}$. Der Zusammenbruch findet also um $16:00 + \tau = 16:03$ statt.

Ausbreitungsgeschwindigkeit: Die stromaufwärtigen Staufront breitet sich gemäß der Schockwellenformel:

$$c_{12} = \frac{Q_1 - Q_2}{\rho_1 - \rho_2}$$

aus. Die Größen in dieser Formel sind wie folgt gegeben:

- Der Fluss $Q_1 = 2\,000\,\mathrm{Fz/h/Spur}$ im Bereich freien Verkehrs des Abschnittes I ist gleich der spurbezogenen Nachfrage $Q_{\mathrm{in}}/2$ (während des Nachfragepeaks),
- der Fluss $Q_2 = Q_{\max}^{\mathrm{II}} = 1\,800\,\mathrm{Fz/h/Spur}$ im Bereich des Staus von Abschnitt I ist gleich der spurbezogenen Engstellenkapazität,
- die Dichte $\rho_1 = Q_1/V_0^{\mathrm{I}} = 16.\overline{6}\,\mathrm{Fz/km}$ ist gleich der Dichte im freien Zweig des FD bei gegebenen Fluss Q_1,
- die Dichte $\rho_2 = \rho_{\max}^{\mathrm{I}}(1 - Q_2 T^{\mathrm{I}}) = 40\,\mathrm{Fz/km}$ ist gleich der Dichte im gestautem Zweig des FD bei gegebenen Fluss Q_2 (man beachte, dass sich alles im Bereich I abspielt, also $T = T^{\mathrm{I}} = 1.2\,\mathrm{s}$ usw).

Damit ergibt sich

$$c_{12} = \frac{Q_1 - Q_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{(2\,000 - 1\,800)\,\mathrm{Fz/h}}{(16.67 - 40)\,\mathrm{Fz/km}} = -8.57\,\mathrm{km/h} = -2.38\,\mathrm{m/s}.$$

Geschwindigkeit der Fahrzeuge im Stau:

$$V_2 = \frac{Q_2}{\rho_2} = 12.5\,\mathrm{m/s} = 45\,\mathrm{km/h}.$$

(d) Die Staulänge ist maximal zu der Zeit, in welcher die verminderte Nachfrage (Ausbreitungsgeschwindigkeit $V_0 = 120/3.6\,\mathrm{m/s}$ auf die Staufront (Ausbreitungsgeschwindigkeit $c < 0$) trifft. Dies ist deshalb der Fall, da die verringerten Nachfrage geringer als die Engstellenkapazität und damit der Verkehrsfluss im gestauten bereich ist und bei der verringerten Nachfrage der Stau der Stau deshalb schrumpfen wird. Es sei t die Zeit in Sekunden seit 16:00, t_1 und x_1 der Zeitpunkt bzw. Ort der Stauentstehung sowie $t_3 = 3\,600\,\mathrm{s}$ die Zeit, bei der die reduzierte Nachfrage den Ort $x = 0$ passiert (bzw. bei freiem Verkehr passieren würde). Dann gilt:

- Bewegungsgleichung der Staufront zur Zeit der verstärkten Nachfrage: $x_{12}(t) = x_1 + c_{12}(t - t_1)$,
- Bewegungsgleichung des Übergangs von der verstärkten Nachfrage (Index 1) zur reduzierten Nachfrage (Index 3): $x_{13}(t) = 0 + V_0(t - t_3)$.

Gleichsetzen $x_{12}(t) = x_{23}(t)$ ergibt den Zeitpunkt der maximaler Stauausdehnung:

$$t_{\max} = \frac{x_1 - ct_1 + V_0 t_3}{V_0 - c} = \frac{6\,000\,\mathrm{m} + 2.38\,\mathrm{m/s} * 180\,\mathrm{s} + \frac{120}{3.6}\,\mathrm{m/s} * 3\,600\,\mathrm{s}}{\frac{120}{3.6}\,\mathrm{m/s} + 2.38\,\mathrm{m/s}} = 3\,540\,\mathrm{s}$$

Der Ort der stromaufwärtigen Staufront bei maximaler Stauausdehnung ergibt sich aus einer der beiden Gleichungen für x_{12} oder x_{23}, z.B.

$$x_{\max} = V_0(t_{\max} - t_3) = -2\,000\,\mathrm{m}.$$

Der Stau ist also maximal 8 km lang.[1]

[1] Die reduzierte Nachfrage erreicht also gar nicht die Position $x = 0$ zur Zeit $t = 17:00$ bzw. $t = 3\,600\,\mathrm{s}$, da sie bereits 2 km vorher vom Stau "abgefangen" wird. Für die Arithmetik ist dies aber egal.

Mit den Angaben vom Aufgabenblatt ($c = -8/3.6\,\text{km/h}$ sowie eine Stauentstehung um $t_1 = 300\,\text{s}$, entspricht nicht der wahren Lösung) ergibt sich

$$t_{\text{max}} = \frac{x_1 - ct_1 + V_0 t_3}{V_0 - c} = 3\,562.5\,\text{s}, \quad x_{\text{max}} = V_0(t_{\text{max}} - t_3) = -1\,250\,\text{m}.$$

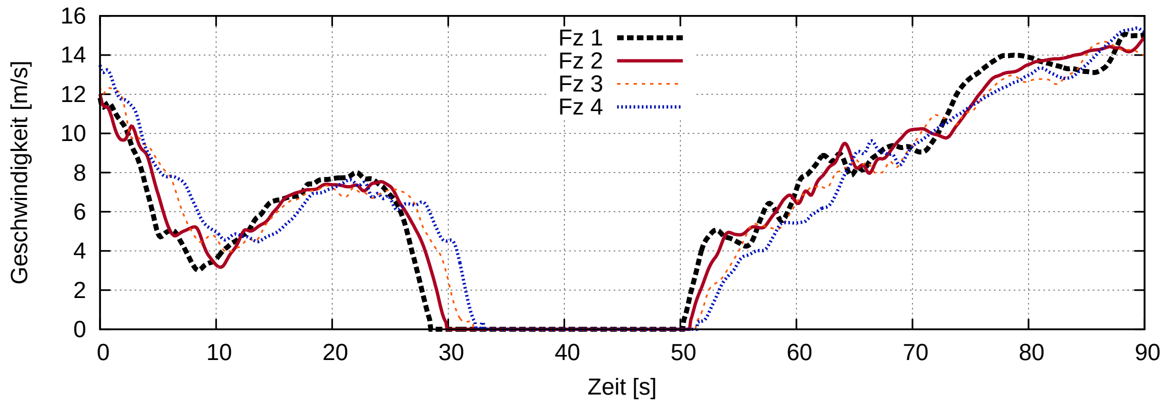
(e) Wieder mit der Schockwellengleichung und der verringerten Nachfrage $Q_3 = 1\,000\,\text{Fz/h}$ (pro Spur!) statt $Q_1 = 2\,000\,\text{Fz/h}$:

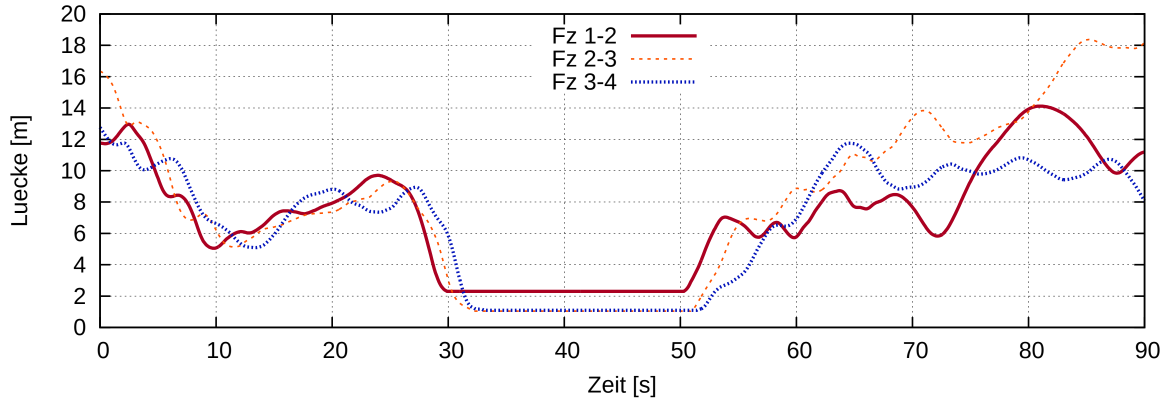
$$c_{32} = \frac{Q_3 - Q_2}{\rho_3 - \rho_2} = \frac{(1\,000 - 1\,800)\,\text{Fz/h}}{(8.3\overline{3} - 40)\,\text{Fz/km}} = 25.3\,\text{km/h} = 7.02\,\text{m/s}.$$

Hierbei wurde $\rho_3 = Q_3/V_0 = 8.3\overline{3}\,\text{Fz/km}$ eingesetzt. Man beachte, dass c_{32} positiv ist, das stromaufwärtige Ende des Staus sich also in Fahrtrichtung bewegt und somit der Stau tatsächlich schrumpft.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Analyse von xFCD-Daten von vier Fahrzeugen in einer Kolonne, von denen folgende Zeitreihen gegeben sind:





(a) Situation: Stopp im Zeitintervall [30 s, 50 s], davor gebundener Verkehr, danach gleichmäßiger Start und Beschleunigung auf etwa 15 m/s=54 km/h. Die Geschwindigkeiten legen Stadtverkehr und einen Ampelstopp nahe.

(b) Es handelt sich um menschliche Fahrer, da “Maschinen” wohl nicht die abgebildeten “Zappler” im Beschleunigungsprofil und die daraus resultierenden Schwankungen des Abstandes produzieren würden (dies gilt zumindest für die Folgefahrzeuge; beim ersten könnten die Schwankungen auch durch ein vorausfahrendes konventionelles Fahrzeug verursacht sein, bei den Folgefahrzeugen sollten aber derartige Schwankungen abnehmen).

Hinweis: Jede plausible, auch kürzere Erklärung (“Maschinen produzieren nicht derartige ‘Zappler’ in den Zeitreihen”) ergibt volle Punktzahl.

(c) Die untere Grenze von v_0 liegt bei der maximalen Geschwindigkeit von 14 m/s bis 15 m/s. Es ist eine untere Grenze, da nicht auszuschließen ist, dass bei freier Fahrt, also ohne Behinderung durch das Fahrzeug 1, die Fahrer auf deutlich höhere Geschwindigkeiten beschleunigen würden.

(d) Die Mindestlücke wird bei Stillstand erreicht. Sie liegt bei etwa 2 m für den Fahrer von Fahrzeug 2 und bei etwa 1 m für die Fahrer der Fahrzeuge 3 und 4. Da für das Führungsfahrzeug keine Abstände gegeben sind, ist für den Fahrer dieses Fahrzeugs kein Mindestabstand anhand der Daten ermittelbar.

(e) Nach dem Abstandsmodell der Aufgabenstellung gilt

$$s(v) = s_0 + vT$$

und damit die Folgezeit

$$T = \frac{s - s_0}{v}$$

Für die Fahrer der drei Folgefahrzeuge ergibt dies

$$T_2 = \frac{12 - 2}{14}\,\mathrm{s} = 0.71\,\mathrm{s}, \quad T_3 = \frac{18 - 1}{14}\,\mathrm{s} = 1.21\,\mathrm{s}, \quad T_4 = \frac{10 - 1}{14}\,\mathrm{s} = 0.64\,\mathrm{s}.$$

Hinweis: werden andere plausible mittlere Zeitlücken aus den Daten entnommen, ergibt dies ebenfalls volle Punktzahl.

Der Fahrer des Fahrzeugs 4 wird offensichtlich nicht durch eine konstant-lineare Abstands-Geschwindigkeitsrelation $s(v) = s_0 + vT$ beschrieben, da er zwischen 65 s und 90 s zwar von etwa 8 m/s auf 15 m/s, also auf fast die doppelte Geschwindigkewit beschleunigte, aber seinen Abstand in dieser Zeit kaum ändert, sondern vielmehr konstant bei etwa 10 m lässt.[2]

(f) Wenn das erste Fahrzeug (bzw. dessen Fahrer) frei beschleunigen kann, kann man die Wunschbeschleunigung durch die maximale beobachtete Beschleunigung abschätzen:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{s}} = 2\,\mathrm{m/s^2}$$

Für die Fahrer der Folgefahrzeuge kann man, ebenso wie bei der Wunschgeschwindigkeit, aufgrund der Behinderung durch die Vorderfahrzeuge nur eine untere Grenze der Wunschbeschleunigung angeben.

[2] Formal wird dieser Bereich am besten durch $s_0 = 10\,\mathrm{m}$ und $T = 0$ beschrieben.

Aufgabe 3 (50 Punkte)

Diskussion des Beschleunigungsmodells der Aufgabenstellung:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \min\left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^4, 1 - \left(\frac{s^*}{s}\right)^2\right], \quad s^* = s_0 + vT + \frac{v(v - v_l)}{2\sqrt{ab}}.$$

(a)
- Parameter v_0: Wunschgeschwindigkeit, da dann bei freier Strecke ($s \to \infty$) die Beschleunigung auf null geht,
- Parameter s_0: Mindestabstand = Gleichgewichtsabstand bei Stillstand,
- Parameter T: Folgezeit,
- Parameter a: maximale Beschleunigung (bei $v = 0$ und leerer Strecke voraus),
- Parameter b: komfortable Bremsverzögerung, wie beim IDM.

(b) (i) $\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = 0$: Beschleunigung gleich null, also konstante Geschwindigkeit des betrachteten Fahrzeugs.

(ii) $v_l = v$: Das Führungsfahrzeug hat die gleiche Geschwindigkeit wie das betrachtete Fahrzeug. Diese ist nach (i) dann ebenfalls konstant.

(c) Fließgleichgewicht $\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = 0$ und $v = v_l$ in die Modellgleichung eingesetzt:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 = \min\left[1 - \left(\frac{v_e}{v_0}\right)^4, 1 - \left(\frac{s_0 + v_e T}{s}\right)^2\right]$$

- Der erste Ausdruck der Minimums-Bedingung entscheidet, wenn der zweite Ausdruck bei $v = v_0$ (dann ist der erste Ausdruck =0) größer, also positiv ist. Dies ist für $s \geq s_0 + v_0 T$ (freier Verkehr) der Fall. Dann ist $v_e = v_0$.
- Der zweite Ausdruck der Minimums-Bedingung entscheidet, wenn der erste Ausdruck bei $v_e = (s - s_0)/T$ (dann ist der zweite Ausdruck =0) positiv ist. Dies ist für $v_e < v_0$ bzw. $s < s_0 + v_0 T$ der Fall (gebundener Verkehr).

Beides zusammengenommen ergibt die Geschwindigkeits-Abstands-Relation im Fließgleichgewicht:[3]

$$v_e(s) = \begin{cases} v_0 & s \geq s_0 + v_0 T, \\ \frac{s - s_0}{T} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d) Konsistenzbedingungen an die Beschleunigungsfunktion $f(s, v, v_l) = a \min[1 - (v/v_0)^4, 1 - (s^*/s)^2]$ mit $s^* = s_0 + vT + v(v - v_l)/(2\sqrt{ab})$:

(i) Die Beschleunigung $f(s, v, v_l)$ nimmt streng monoton mit der Geschwindigkeit ab, also $\frac{\partial f}{\partial v} < 0$. Für den freien Teil gilt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{\text{frei}} = -4a \frac{v^3}{v_0^4}$$

was immer negativ ist. Für gebundenem Verkehr gilt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{\text{geb}} = -2a \frac{s^*}{s^2} \frac{\partial s^*}{\partial v}.$$

[3] Zu beachten ist, dass für $s < s_0$ die Geschwindigkeit negativ wird. Das muss separat (z.B. durch eine Max-Bedingung) abgefangen werden, war aber nicht Gegenstand der Aufgabe.

Dies ist negativ, wenn $\frac{\partial s^*}{\partial v} > 0$, der Wunschabstand also mit der Geschwindigkeit zunimmt. Dies ist i.d.R. erfüllt.[4]

(ii)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v_l}\right)_{\text{frei}} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v_l}\right)_{\text{geb}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\frac{vs^*}{s^2} > 0.$$

Damit ist wegen der Stetigkeit der Min-Bedingung der Beschleunigungsfunktion die Abhängigkeit von v_l monoton (aber nicht streng monoton, wie bei der eigenen Geschwindigkeit!) steigend.

(iii)

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \begin{cases} 0 & \text{frei} \\ 2a\frac{s*^2}{s^3} \geq 0 & \text{gebundener Verkehr} \end{cases}$$

(iv) Falls $s > s_0 + v_0 T$, gilt $v_e(s) = v_0$.

(v) Das Vorderfahrzeug spielt dann keine Rolle mehr, wenn der erste Term der Minimum-Bedingung der Beschleuniungsfunktion der Entscheidende ist. Also (man beachte die Umkehrung des Ungleichheits-Operators bei Multiplikation mit -1)

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^4 &< 1 - \left(\frac{s^*}{s}\right)^2 \\ \left(\frac{v}{v_0}\right)^4 &> \left(\frac{s^*}{s}\right)^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$s > s^* \left(\frac{v_0}{v}\right)^2$$

Die rechte Seite ist, außer bei $v = 0$, immer endlich.[5] Es gibt also einen definierten Abstand, ab welchem das Vorderfahrzeug oder seine dynamischen Eigenschaften (Abstand, Geschwindigkeit) keine Rolle mehr spielen.

(vi) Die Aussage "Bei endlichem Abstand zum Vorderfahrzeug ist die Beschleunigung nie höher als bei gleicher Geschwindigkeit auf völlig freier Strecke (kein 'Mitzieheffekt')" folgt direkt aus der Monotonizität bezüglich des Abstandes, $\frac{\partial f}{\partial s} \geq 0$.

[4] In extremen Fällen, $v_l \gg v$, kann es wegen des Terms proportional zu v_l in s^* auch positiv sein, dann versagt aber die Formel. Hier benötigt man eine zusätzliche Maximums-Bedingung, welche s^* immer oberhalb von s_0 hält. Diese Überlegung ist aber hier nicht verlangt.

[5] Allerdings ist seltsam, dass der Grenzabstand mit steigender Geschwindigkeit v und z.B. $v_l = v$, also $s^* = s_0 + vT$, *abnimmt.*

(e) Heranfahren an eine rote Ampel, deren Haltelinie durch ein stehendes virtuelles fahrzeug ($v_l = 0$) der Länge 0 modelliert wird. Ferner ist $v = v_0$ sowie $a = b$. Das Beschleunigungsmodell wird unter diesen Bedingungen zu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \min\left[0, 1 - \left(\frac{s_0 + vT + \frac{v^2}{2b}}{s}\right)^2\right].$$

Das Bremsmanöver beginnt, sobald der rechte Term in der Minimums-Bedingung negativ und damit entscheidend wird. Der zugehörige Grenzabstand ist daher durch

$$s = s_c = s_0 + v_0 T + \frac{v_0^2}{2b} = 73.25\,\mathrm{m}.$$

gegeben.

Bemerkung (nicht in der Aufgabe verlangt): Der kritische Abstand ist genau der Mindestabstand s_0 zuzüglich dem Anhalteweg (Brems- und Reaktionsweg), wenn man die Reaktionszeit gleich der Folgezeit setzt und beim Bremsweg von der komfortablen Verzögerung b ausgeht!

(f) Zunächst ist bei einer Folgefahrt mit $v = 10\,\mathrm{m/s}$ der Gleichgewichtsabstand $s_e = s_0 + vT = 12\,\mathrm{m}$.

(i) Führungsfahrzeug plötzlich um 5 km/h=1.39 m/s langsamer, also $v_l = 8.61\,\mathrm{m/s}$: Resultierender dynamischer Wunschabstand und Beschleunigung:

$$s^* = s_0 + vT + \frac{v(v - v_l)}{2\sqrt{ab}} = 15.47\,\mathrm{m}, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a\left[1 - \left(\frac{s^*}{s}\right)^2\right] = -1.32\,\mathrm{m/s^2}.$$

(ii) Führungsfahrzeug nun gleich schnell ($v_l = 10\,\mathrm{m/s}$, aber der Abstand um 2 m geringer als der Gleichgewichtsabstand:

$$s^* = s_e = 12\,\mathrm{m}, \quad s = 10\,\mathrm{m}, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a\left[1 - \left(\frac{s^*}{s}\right)^2\right] = -0.88\,\mathrm{m/s^2}.$$