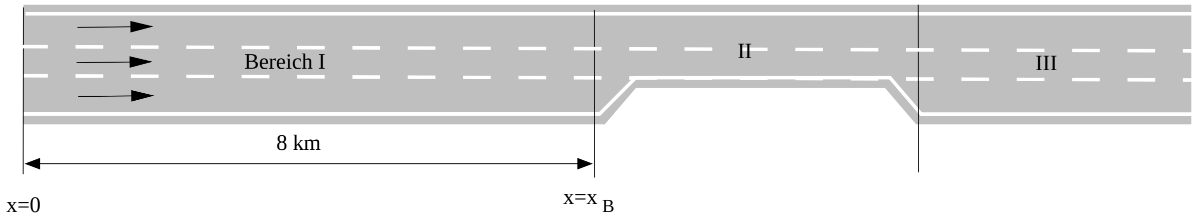
Klausur zur Vorlesung
Verkehrsdynamik und -simulation, SS 2014
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (50 Punkte)

Gegeben ist ein dreistreifiger Autobahnabschnitt mit einer bei $x = 8\,\text{km}$ beginnenden Baustelle, in welcher eine Reduktion auf 2 Streifen stattfindet:



Der Verkehrsfluss wird durch ein LWR-Modell mit dem Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \min\left[v_0\rho, \frac{1}{T}\left(1 - \rho/\rho_{\max}\right)\right]$$

mit den Parametern $v_0 = 80\,\text{km/h}$, $T = 1.4\,\text{s}$ und $\rho_{\max} = 100\,\text{Fz/km/Spur}$ beschrieben.

(a) Kapazität pro Fahrstreifen (beachten Sie die Umrechnung in SI-Einheiten, $v_0 = 80/3.6\,\text{m/s}$, $\rho_{\max} = 0.1\,\text{Fz/m}$):

$$Q_{\max} = \frac{v_0}{v_0 T + 1/\rho_{\max}} = 0.545\,\text{Fz/s} = 1\,946\,\text{Fz/h}$$

Damit hat der Baustellenabschnitt eine Kapazität von $K_{\text{II}} = 2Q_{\max} = 3\,891\,\text{Fz/h}$ und die Bereiche I und III $K_{\text{I}} = K_{\text{III}} = 3Q_{\max} = 5\,838\,\text{Fz/h}$, welches beides oberhalb der Nachfrage von $2\,500\,\text{Fz/h}$ liegt.

(b) Da $K_{\text{I}} = K_{\text{III}} = 5\,838\,\text{Fz/h}$, nehmen die dreistreifigen Abschnitte auch die höhere Nachfrage von $4\,500\,\text{Fz/h}$ auf.

Es sei t die Zeit in Sekunden ab 16:00. Dann passiert die Nachfrageerhöhung zur Zeit $t = 0$ die Stelle $x = 0$. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist durch die Schockwellengleichung bzw. die Steigung $Q_e'(\rho) = v_0$ gegeben. Die Position der Nachfrageerhöhung ist damit durch $x(t) = v_0 t$ gegeben. Zur Zeit

$$t_B = \frac{x_B}{v_0} = \frac{8\,000\,\text{m}}{80/3.6\,\text{m/s}} = 360\,\text{s}$$

erreicht der nachfragesprung damit die Baustelle.

(c) Es kommt am Beginn der Baustelle zum Stau, da dort erstmals die Nachfrage von $4\,500\,\text{Fz/h}$ die lokale Kapazität von $3\,891\,\text{Fz/h}$ überschreitet.

(d) Nach der Stauentstehung ist der gesamte Verkehrsfluss im Baustellenabschnitt und stromabwärts durch die Baustellenkapazität begrenzt. Ebenfalls gilt diese Begrenzung für den Fluss im gestauten bereich, da im Stau Informationen, in diesem Fall die der Engstellenkapazität, sich stromaufwärts ausbreiten: Im freien Bereich Ia hingegen ist der Fluss nach wie vor durch die Nachfrage bestimmt:

$$Q_{\text{Ia}}^{\text{tot}} = 4\,500\,\text{Fz/h}, \quad Q_{\text{Ib}}^{\text{tot}} = Q_{\text{II}}^{\text{tot}} = Q_{\text{III}}^{\text{tot}} = 2Q_{\max} = 3\,891\,\text{Fz/h}.$$

Die *fahrstreifengemittelten* Flüsse ergeben sich nach Division durch die Fahrstreifenzahl:

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{Ia}} &= \frac{Q_{\mathrm{Ia}}^{\mathrm{tot}}}{3} = 1\,500\,\mathrm{Fz/h}, \\
Q_{\mathrm{Ib}} &= \frac{Q_{\mathrm{Ib}}^{\mathrm{tot}}}{3} = 1\,297\,\mathrm{Fz/h}, \\
Q_{\mathrm{II}} &= \frac{Q_{\mathrm{II}}^{\mathrm{tot}}}{2} = 1\,946\,\mathrm{Fz/h}, \\
Q_{\mathrm{III}} &= \frac{Q_{\mathrm{III}}^{\mathrm{tot}}}{3} = 1\,297\,\mathrm{Fz/h}.
\end{aligned}$$

Die fahrstreifengemittelten Dichten ergeben sich durch den freien Zweit (Ia,II,III) bzw. den gestauten Zweig (Ib) der Umkehrfunktion des Fundamentaldiagramms,[1]

$$\rho_{\mathrm{free}}(Q) = \frac{Q}{v_0}, \quad \rho_{\mathrm{cong}}(Q) = \rho_{\max}(1 - QT).$$

Damit

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{Ia}} &= \rho_{\mathrm{free}}(Q_{\mathrm{Ia}}) = 18.75\,\mathrm{Fz/km}, \\
\rho_{\mathrm{Ib}} &= \rho_{\mathrm{cong}}(Q_{\mathrm{Ib}}) = 49.55\,\mathrm{Fz/km}, \\
\rho_{\mathrm{II}} &= \rho_{\mathrm{free}}(Q_{\mathrm{II}}) = 24.32\,\mathrm{Fz/km}, \\
\rho_{\mathrm{III}} &= \rho_{\mathrm{free}}(Q_{\mathrm{III}}) = 16.21\,\mathrm{Fz/km}.
\end{aligned}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Staufront zwischen Ia und Ib:

$$c^{\mathrm{rush}} = \frac{Q_{\mathrm{Ib}} - Q_{\mathrm{Ia}}}{\rho_{\mathrm{Ib}} - \rho_{\mathrm{Ia}}} = -1.83\,\mathrm{m/s} = -6.58\,\mathrm{km/h}.$$

(e) Nach Ende der Rush-hour herscht wieder eine Nachfrage von $2\,500/3\,\mathrm{Fz/h}$ und damit $Q_{1\mathrm{a}}^{\mathrm{nach}} = 2\,500/3\,\mathrm{Fz/h} = 833\,\mathrm{Fz/h}$ und $\rho_{1\mathrm{a}}^{\mathrm{nach}} = Q_{1\mathrm{a}}^{\mathrm{nach}}/v_0 = 10.4\,\mathrm{Fz/km}$. Damit ändert sich die Stau-Ausbreitungsgeschwindigkeit auf

$$c^{\mathrm{nach}} = \frac{Q_{\mathrm{Ib}} - Q_{\mathrm{Ia}}^{\mathrm{nach}}}{\rho_{\mathrm{Ib}} - \rho_{\mathrm{Ia}}} = 3.29\,\mathrm{m/s} = 11.9\,\mathrm{km/h}.$$

(f) Nach Stauentstehung zur Zeit t_1 lautet die Bewegungsgleichung der Position x_{ab} der stromaufwärtigen Staufront während der Rush Hour

$$x_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{rush}}(t) = x_B + c^{\mathrm{rush}}(t - t_1)$$

Die Zeit $t_1 = 600\,\mathrm{s}$, die Position $x_B = 8\,000\,\mathrm{m}$ und die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c^{\mathrm{rush}} = -1.8\,\mathrm{m/s}$ ist der Aufgabenstellung zu entnehmen.

Die Information über das Ende der Rush Hour breitet sich mit v_0 aus und erreicht um 17:00 ($t = t_2 = 3\,600\,\mathrm{s}$) die Stelle $x = 0$. Die Ausbreitungsgleichung ist also durch

$$x^{\mathrm{end}}(t) = v_0(t - t_2)$$

gegeben. Dieser Nachfragesprung erreicht zur Zeit t_3 die Staufront. Zu dieser Zeit gilt

$$x^{\mathrm{end}}(t_3) = x_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{rush}}(t_3)$$

und damit

$$t_3 = \frac{x_B - c^{\mathrm{rush}} t_1 + v_0 t_2}{v_0 - c^{\mathrm{rush}}} = 3\,690\,\mathrm{s}.$$

[1] Im Bereich II herrscht der Maximalflusszustand. Man hätte also auch den gestauten Zweig für diesen bereich nehmen können.

Dies entspricht einer Staufrontposition von $x_3 = x_{\text{ab}}^{\text{rush}}(t_3) = 2\,006\,\text{m}$ und damit einer maximalen Staulänge von

$$L_{\max} = x_B - x_3 = 5\,993\,\text{m}.$$

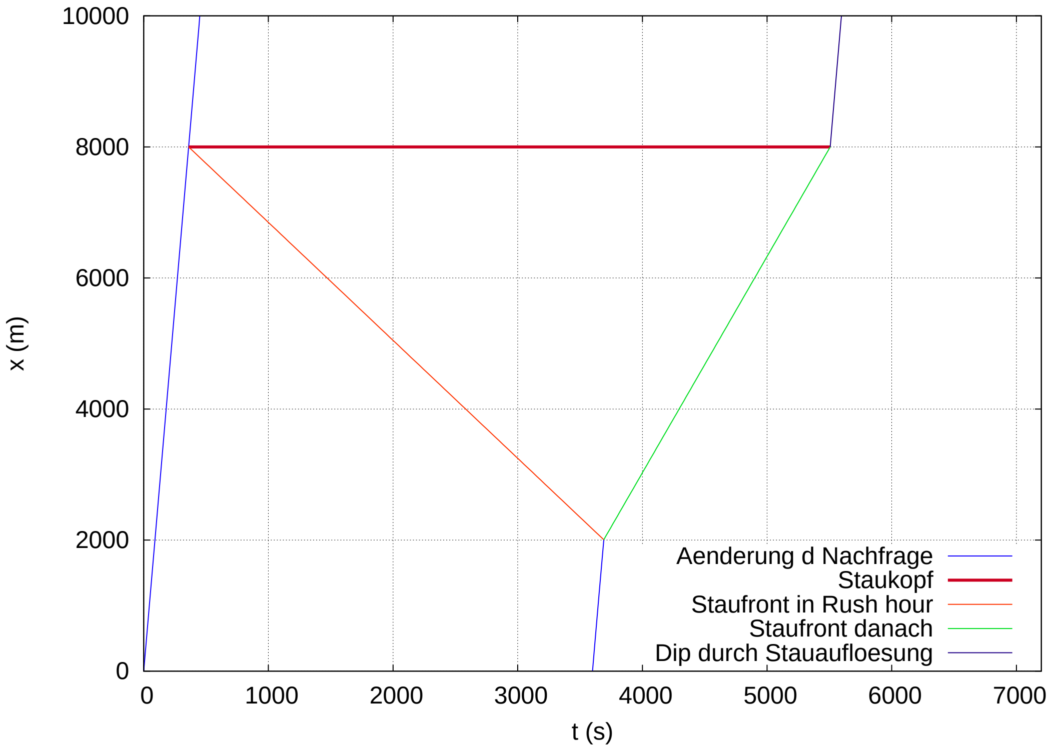
Danach weicht der Stau zurück und die Staufront bewegt sich gemäß

$$x_{\text{ab}}^{\text{nach}}(t) = x_3 + c^{\text{nach}}(t - t_3)$$

und löst sich zu der Zeit t_4 auf, bei der die Staufront an der Baustelle angekommen ist und damit den Staukopf trifft:

$$x_{\text{ab}}^{\text{nach}}(t) = x_B \quad \Rightarrow \quad t_4 = t_3 + \frac{x_B - x_3}{c^{\text{nach}}} = 5\,507\,\text{s}.$$

Veranschaulichung (nicht verlangt):



Aufgabe 2 (40 Punkte)

Gegeben ist ein zeitkontinuierliches Fahrzeugfolgemodell mit folgender Beschleunigungsgleichung als Funktion der Lücke s, der Geschwindigkeit v und der Geschwindigkeit v_l des Vorderfahrzeugs:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} := a(s, v, v_l) = \min\left[\beta_1\big(v_0 - v\big), \beta_1\left(\frac{s}{T} - v\right) + \beta_2(v_l - v)\right].$$

(a)
- β_1: Stärke der Reaktion (Sensitivität) auf Abweichungen der aktuellen Geschwindigkeit v von der Zielgeschwindigkeit. $1/\beta_1$ ist die Geschwindigkeits-Anpassungszeit (nicht verlangt)
- β_1: Stärke der Reaktion (Sensitivität) auf Geschwindigkeitsdifferenzen zum Vorderfahrzeug
- v_0: Wunschgeschwindigkeit bei freiem Verkehr
- T: Folgezeit be igebundenem Verkehr

(b) (i) $\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = 0$: Es gibt keine Beschleunigungen. Alle Fahrzeuge fahren mit konstanter Geschwindigkeit.

(ii) $v_l = v$: Alle Fahrzeuge gleich schnell. Damit gibt es auch keine Änderungen der Abstände.

(c) generell gilt im Fließgleichgewicht

$$0 = \min\left[\beta_1\big(v_0 - v\big), \beta_1\left(\frac{s}{T} - v\right)\right].$$

Damit fällt auch die Sensitivität β_1 aus der Bedingung heraus.

- *Freier Verkehr*: Hier ist der erste Ausdruck der Minimum-Bedingung entscheidend, also der kleinere und gleich null, $v_0 - v = 0$ bzw. $v = v_0$, während der dann positive zweite Ausdruck die Bedingung für freien Verkehr angibt: $s/T - v_0 > 0$, also $s > v_0T$.
- *Gebundener Verkehr*: Hier ist der zweite Ausdruck der Minimum-Bedingung entscheidend und gleich null, $s/T - v = 0$, während der erste positiv ist, $v_0 - v = v_0 - s/T > 0$ bzw. $s < v_0T$, sodass dieser Fall tatsächlich als gebundener Verkehr anzusehen ist.
- Der Fall, dass beide Ausdrücke der Min-Bedingung =0 sind, kann beliebig einem der beiden Bereiche zugeordnet werden

Zusammen also

$$v_e(s) = \begin{cases} v_0 & s > v_0T \\ s/T & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d) Erfüllung der Konsistenzbedingungen:

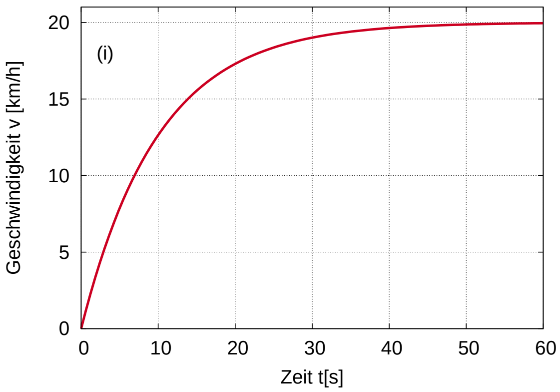
(i) $\frac{\partial a(s,v,v_l)}{\partial v} = -\beta_1$ für freien Verkehr und gleich $-(\beta_1 + \beta_2)$ für gebundenen Verkehr. Unabhängig vom Verkehrszustand ist die Ableitung also immer negativ (wenn, wie vorausgesetzt, $\beta_1 > 0$ und $\beta_2 > 0$ ist).

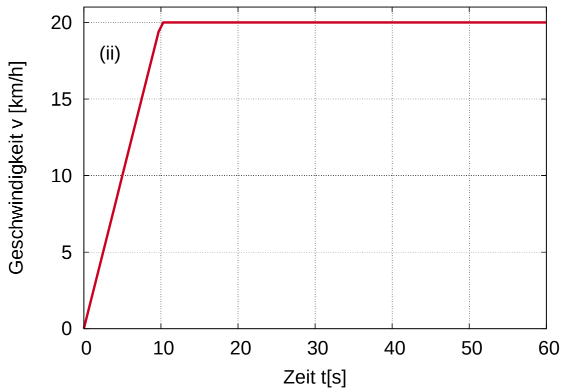
(ii) $\frac{\partial a(s,v,v_l)}{\partial v_l} = 0$ für freien und gleich β_2 für gebundenem Verkehr. Die Änderung mit der Geschwindigkeit v_l des Vorderfahrzeugs ist also nie negativ und damit die Abhängigkeit selbst monoton (wenngleich nicht streng monoton) steigend.

(iii) $\frac{\partial a(s,v,v_l)}{\partial s} = 0$ für freien und gleich β_1/T für gebundenem Verkehr. Die Änderung der Beschleunigung mit dem Abstand s ist also nie negativ und damit die Abstandsabhängigkeit monoton (wenngleich nicht streng monoton) steigend.

(iv) Der Ausdruck $\beta_1(v_0 - v)$ entspricht der Beschleunigung auf freier Strecke bei gegebener Geschwindigkeit v. Ein "Mitzieheffekt" tritt auf, wenn bei irgendeinem s und v_l eine höhere Beschleunigung bei gleicher Geschwindigkeit möglich wäre. Dies wird automatisch durch die Minimum-Bedingung verhindert.

(e) Gegeben sind zwei mögliche Geschwindigkeitsverläufe eines Fahrzeugs, welches auf eine leere Strecke auffährt und dort beschleunigt:





Der Geschwindigkeitsverlauf (i) entspricht dem Modell, da nur in diesem Verlauf wie im Modell die Beschleunigung (Steigung) mit der Geschwindigkeit abnimmt, was auch duech die Konsistenzbedingung (i) des Aufgabenteils (d) gefordert wird.

(f) Das Auto fährt mit der Wunschgeschwindigkeit v_0 an die Ampel heran, es gilt also solange $\beta_1(v_0 - v) = 0$ und damit Konstantfahrt mit v_0, bis die rechte Seite der Minimum-Bedingung erstmals negativ wird. Die Haltelinie ist ein stehendes virtuelles Auto der Länge 0, so dass $v_l = 0$ ist und s den Abstand zur Haltelinie angibt. Also gilt für den rechte Ausdruck der Minimum-Bedingung erstmals

$$\beta_1 \left(\frac{s}{T} - v_0 \right) - \beta_2 v_0 < 0,$$

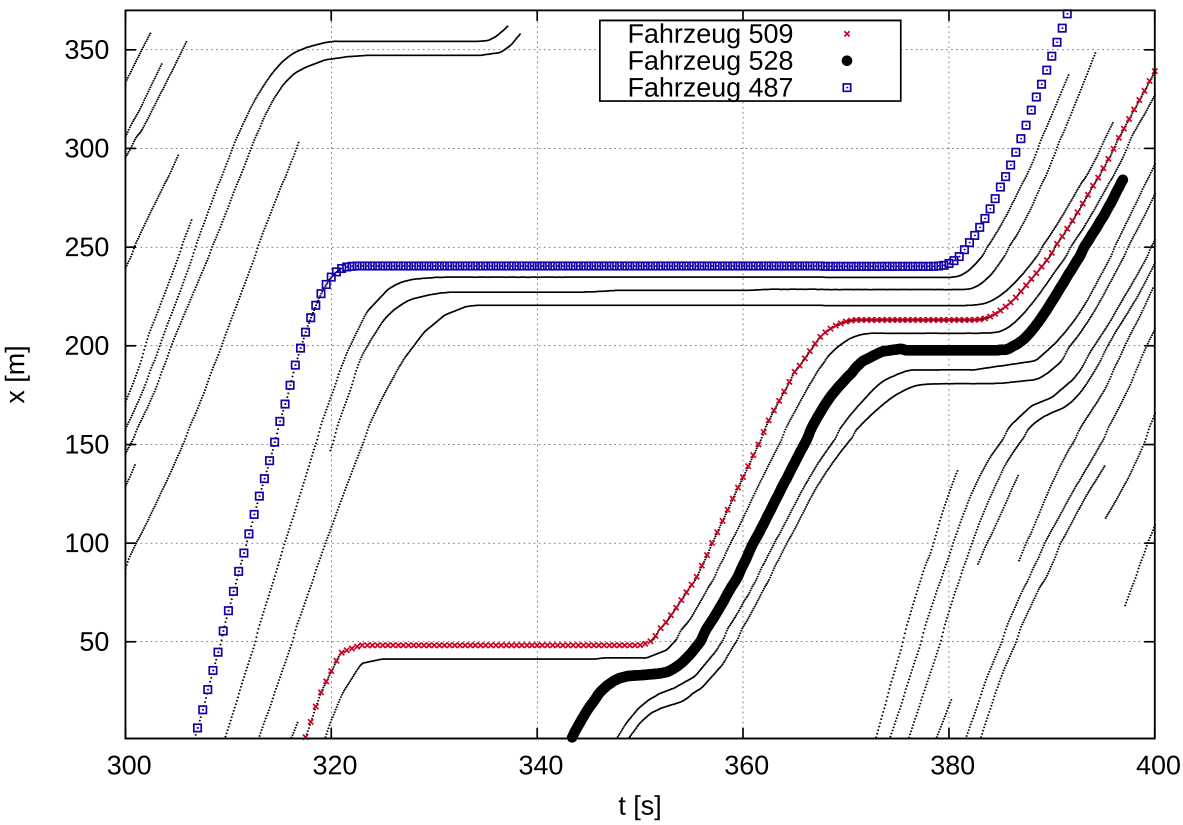
wenn für den Abstand

$$s < (\beta_1 + \beta_2) v_0 T = 100\,\mathrm{m}$$

gilt. Das Auto beginnt 100 m vor der Haltelinie zu bremsen.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Gegeben sind Trajektoriendaten des zweiten Fahrstreifens einer vierstreifigen Richtungsfahrbahn in einer amerikanischen Stadt:



(a) Die temporären Halte und Warteschlangen deuten auf Lichtsignalanlagen (LSA) hin. Deren Haltelinien in Fahrtrichtung sind wenige Meter vor den Positionen des jeweils ersten haltenden Fahrzeugs positioniert. Hier kann man drei LSA mit Haltelinien bei etwa 55 m, 250 m und 365 m identifizieren.

(b) Trajektorien beginnen innerhal des raumzeitlichen Bereichs, wenn Fahrzeuge von anderen Streifen auf Spur 2 wechseln. Sie enden, wenn sie von Spur 2 auf andere Streifen wechseln. (Ob dies Wechsel nach links oder rechts sind, kann nicht bestimmt werden.).

(c) Fahrzeug 487:

– Die Wunschgeschwindigkeit ist gleich der Maximalgeschwindigkeit, wenn (i) keine Beschleunigung mehr auftritt und (ii) ein großer Abstand zu weiteren Fahrzeugen oder Haltelinien herrscht. Dies ist hier auf den ersten 100 m der Fall. Die Steigung der Trajektorie in diesem bereich ist etwa

$$v_0 = \frac{300\,\mathrm{m}}{13\,\mathrm{s}} = 23\,\mathrm{km/h} = 83\,\mathrm{km/h}$$

(jede Angabe zwischen etwa 70 km/h und 90 km/h ist OK)

– Der Bremsweg dieses Fahrzeugs (=räumlicher Bereich, in dem die Steigung der Trajektorie nicht mehr maximal ist, ist etwa $s_B = 50\,\mathrm{m}$. Damit ergibt sich nach einer elementaren kinematischen Formel die mittlere Bremsverzögerung durch

$$b \approx \frac{v_0^2}{2s_B} = 5.3\,\mathrm{m/s^2}$$

(Dieser hohe Wert kommt vermutlich daher, dass dieser Fahrer beim Heranfahren von der rot werdenden Ampel "erwischt" wurde; Werte zwischen $3\,\mathrm{m/s^2}$ und $8\,\mathrm{m/s^2}$ sind OK.)

– Der Beschleunigungsweg dieses Fahrzeugs ab etwa $t = 380\,\mathrm{s}$ ist etwa $s_A = 100\,\mathrm{m}$ und die Endgeschwindigkeit etwas geringer, z.B. $v = 20\,\mathrm{km/h}$. Damit ergibt sich die mittlere Beschleunigung durch

$$a \approx \frac{v^2}{2s_A} = 2\,\mathrm{m/s^2}$$

(Werte zwischen $1.5\,\mathrm{m/s^2}$ und $3\,\mathrm{m/s^2}$ sind OK, solange sie niedriger als die für b sind).

– Eine Folgezeit kann man für Fahrzeug 487 nicht schätzen, da dieses Fahrzeug nie irgendwelchen anderen Fahrzeugen folgt.

(d) Die Trajektorie des Fahrzeugs 528 enthält Folgefahrten mit etwa gleichbleibender Geschwindigkeit, woraus man (bei Kenntnis der Fahrzeuglängen) die Folgezeit bestimmen kann. Es fährt aber nie frei mit maximaler Geschwindigkeit. Deshalb ist v_0 nicht bestimmbar. Fahrzeug 509 enthält Verzögerungen vor einem stehenden Hindernis, freie Beschleunigungen, freie Fahrt bei Maximalgeschwindigkeit und gleichmäßige Folgefahrten. Deshalb kann man direkt alle Parameter schätzen.

(e) Fahrzeug 528 wechselt bei etwa $t = 396\,\mathrm{s}$ die Spur und nähert sich vorher dem Vorderfahrzeug auf der alten Spur an. Dies kann als antizipative Beschleunigung aufgefasst werden, um sich der Geschwindigkeit auf der Zielspur anzupassen. (Da der Wechsel beschlossen ist, stört diesem Fahrer ein kurzzeitiges Unterschreiten des Sicherheitsabstandes nicht.)