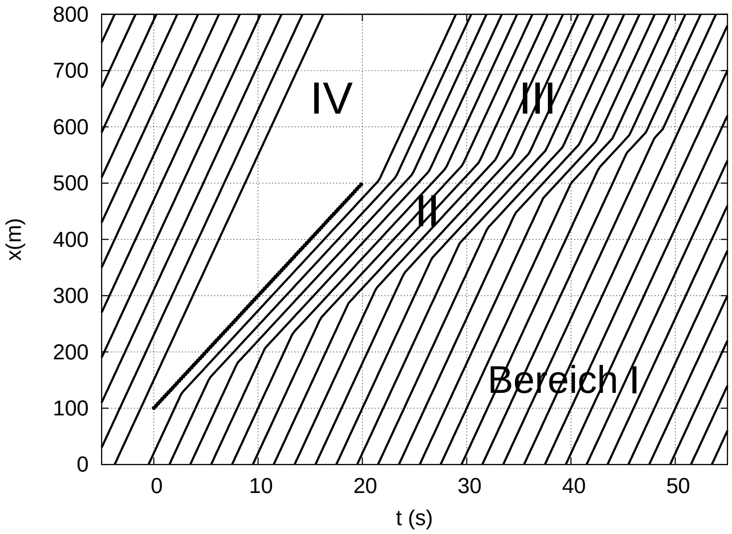
Name:	Vorname:	Matrikel-Nr.:

Klausur zur Vorlesung
Verkehrsdynamik und -simulation
WS 2008/2009
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Gegeben sind folgende Trajektoriendaten, welche vom linken Fahrstreifen einer in jeder Richtung zweistreifigen Autobahn stammen.



(a) *Welche Situation könnte dies darstellen? Berücksichtigen Sie dabei auch, dass nicht alle Trajektorien durchgehend sind.*

Es ist ein bewegliches, temporäres Hindernis, welches nur im Intervall $0 \leq t \leq 20\,\mathrm{s}$ aktiv ist, also wohl ein “Jumborennen”.

(b) Ermitteln Sie aus der Grafik für allen vier angegebene Bereiche (i) Dichte, (ii) Verkehrsfluss und (iii) Geschwindigkeit.

- Bereich I:
  - Dichte: 5 Linien/400 m = $\underline{\underline{12.5\,\mathrm{Fz/km}}}$.
  - Fluss: 5 Linien/10 s=0.5/s=$\underline{\underline{1\,800\,\mathrm{Fz/h}}}$
  - Geschwindigkeit: Entweder Q/ρ oder 400 m/10 s = $40\,\mathrm{m/s}$=$\underline{\underline{144\,\mathrm{km/h}}}$.
- Bereich II
  - Dichte: 4 Linien/100 m = $\underline{\underline{40\,\mathrm{Fz/km}}}$.
  - Fluss: 8 Linien/10 s=0.8/s=$\underline{\underline{2\,880\,\mathrm{Fz/h}}}$

- $*$ Geschwindigkeit: 200 m/10 s $=\underline{\underline{72\,\mathrm{km/h}}}$.
- Bereich III
  - $*$ Dichte: 2 Linien/100 m $=\underline{\underline{20\,\mathrm{Fz/km}}}$.
  - $*$ Fluss: 7 Linien/10 s=0.7/s=$\underline{\underline{2\,520\,\mathrm{Fz/h}}}$
  - $*$ Geschwindigkeit: Wie Bereich I, $\underline{\underline{144\,\mathrm{km/h}}}$.
- Bereich IV: Dichte=Fluss=0, Geschwindigkeit nicht definiert.

(c) *Ermitteln Sie aus der Grafik die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Übergänge I-II, II-III und II-IV.*

- Übergang I-II: 100 m/10 s $=\underline{\underline{36\,\mathrm{km/h}}}$
- Übergang II-III: 100 m/30 s $=\underline{\underline{12\,\mathrm{km/h}}}$
- Übergang II-IV: Geschwindigkeit gleich der im Bereich II $\Rightarrow$ $\underline{\underline{72\,\mathrm{km/h}}}$.

(d) *Ermitteln Sie nun die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Übergänge I-II, II-III und II-IV anhand der makroskopischen Größen in den jeweiligen Bereichen.*

Lösung mit den angegebenen Größen:

- Übergang I-II: $c_{12} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \underline{\underline{36\,\mathrm{km/h}}}$
- Übergang II-III: $c_{23} = \frac{Q_3 - Q_2}{\rho_3 - \rho_2} = \underline{\underline{12\,\mathrm{km/h}}}$
- Übergang II-IV: $c_{24} = \frac{Q_4 - Q_2}{\rho_4 - \rho_2} = \underline{\underline{78\,\mathrm{km/h}}}$.

(e) *Wieviel Zeitverlust ergibt sich durch die Störung im Bereich II insgesamt bei allen beteiligten Fahrern im Vergleich zu einer Situation, in der der nur eine Situation wie im Bereich I herrscht?*

Es sind 18 Fahrzeuge betroffen, welche maximal 10 s Verzögerung erfahren, im Mittel aber nur halb so viel. Also

$$\Delta t_{\mathrm{tot}} = \frac{18 * 10\,\mathrm{s}}{2} = \underline{\underline{90\,\mathrm{s}}}.$$

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Der Verkehrsfluss auf jedem Fahrstreifen einer dreispurigen Autobahn wird mit dem Lighthill-Whitham-Richards-Modell mit dem Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} V_0\rho & \rho \leq \rho_c \\ \frac{1}{T}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) & \textit{sonst} \end{cases}$$

modelliert.

(a) *Die Gesamtkapazität (auf allen drei Spuren der Richtungsfahrbahn) beträgt an Sonntagen (ohne LKW) 6480 Fz/h. Bei stehendem Verkehr ist der Bruttoabstand im Mittel 5 m. Ohne jede Behinderung beträgt die mittlere Geschwindigkeit 108 km/h. Ermitteln Sie daraus die Parameter V_0, $\rho_{\max}$ und T. Nehmen Sie dabei eine gleiche Verkehrszusammensetzung auf allen drei Fahrstreifen an.*

- Ohne jede Behinderung ist die Geschwindigkeit maximal, also $V_0 = 108\,\text{km/h} = 30\,\text{m/s}$.
- Bei stehendem Verkehr ist der Fluss $Q = 0$, also

$$1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} = 0 \quad \Rightarrow \rho = \rho_{\max}$$

  Aus den Angaben $\rho = \rho_{\max} = 1\,\text{Kfz}/5\,\text{m} = \underline{\underline{200\,\text{Kfz/km}}}$.
- Die Kapazität pro Fahrstreifen beträgt $K = \frac{6480\,\text{Fz/h}}{3\,\text{Spuren}} = 2160\,\text{Fz/h/Spur}$.
  Damit mit einer Formel aus dem Skript

$$K = \frac{1}{T + \frac{1}{\rho_{\max} V_0}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{K} - \frac{1}{\rho_{\max} V_0} = \underline{\underline{1.5\,\text{s}}}.$$

(b) *Zwischen 16:00 und 16:30 kommt es bei einer konstanten Nachfrage von 4500 Fahrzeugen pro Stunde an der Position $x = 0$ zu einer Totalsperrung. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich die stromaufwärtige Staufront (freier Verkehr → Stillstand) ausbreitet. Nehmen Sie dazu $V_0 = 30$ m/s, $T = 1.5$ s und $\rho_{\max} = 200$ Fz/h an.*

Lösung mit $Q_1 = 1\,500\,\text{Kfz/h/Spur}$ und $\rho_1 = Q_1/V_0$:

$$c_{\text{up}} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{0 - Q_1}{\rho_{\max} - \rho_1} = \frac{-Q_1}{\rho_{\max} - \frac{Q_1}{V_0}} = \underline{\underline{-8.06\,\text{km/h}}}.$$

(c) *Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die stromabwärtige Staufront (Ausfluss aus dem Stau) nach Aufhebung der Sperrung um 16:30 fort? Wann und wo treffen sich die beiden Staufronten? Was bedeutet dieser Punkt im verkehrlichen Zusammenhang?*

Der Ausfluss aus dem Stau findet im LWR mit dem maximalen Fluss und entsprechender Dichte statt (alle Größen pro Fahrstreifen):

$$Q_3 = Q_{\text{out}} = K = \frac{1}{T + \frac{1}{\rho_{\max} V_0}} = 2\,160\,\text{Kfz/h}, \quad \rho_3 = \frac{Q_3}{V_0} = 20\,\text{Kfz/km}.$$

Damit mit $Q_2 = 0$:

$$c_{\text{down}} = \frac{Q_3 - Q_2}{\rho_3 - \rho_2} = \underline{\underline{-12\,\text{km/h}}}$$

Sei t die Zeit nach 16:00 in Stunden und damit $t_1 = 0.5$ die Zeit der Aufhebung der Totalsperrung. Dann gilt für die Zeit t_2 Kreuzungspunkt der beiden Staufronten

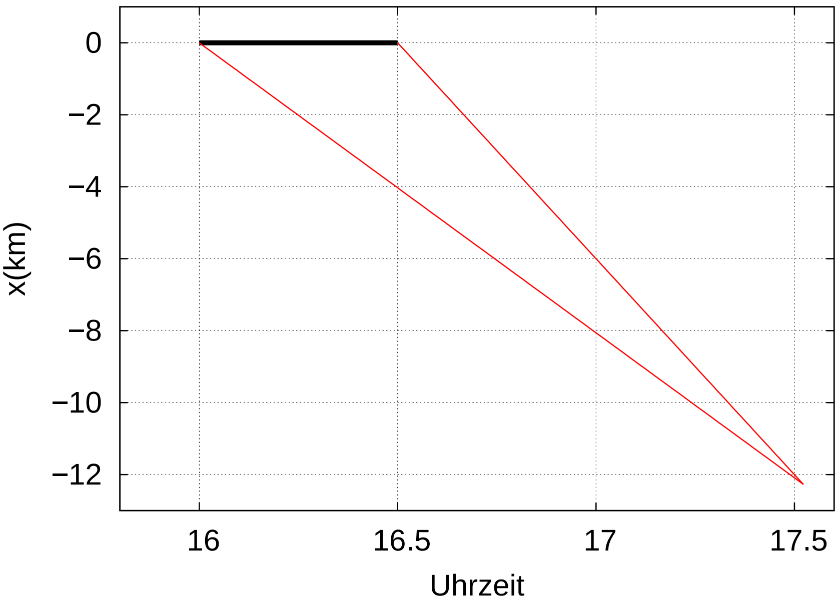
$$c_{\text{up}} t = c_{\text{down}}(t - t_2) \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{c_{\text{down}} t_1}{c_{\text{down}} - c_{\text{up}}} = \underline{\underline{1.52\,\text{h}}}.$$

Den dazugehörigen Ort erhält man durch Einsetzen dieser Zeit in eine der beiden Gleichungen der Fronten, z.B.

$$x_2 = c_{\text{up}} t_2 = \underline{\underline{-12.3\,\text{km}}}.$$

Der Stau dehnt sich also bis maximal 12.3 km stromaufwärts der Sperrung aus (Allerdings ist er immer kleiner als 12 km da er sich ja schon ab $t_1 = 0.5$ (bzw. ab 16:30) aufzulösen beginnt.

(d) *Zeichnen Sie die raumzeitliche Region des Staus in untenstehendes Diagramm*



(e) *Geben Sie die Trajektorie des Fahrzeugs an, welches durch diesen Stau maximal an Zeit verliert.* Das ist die Trajektorie, welche um 16:00 den Punkt $x = 0$ der beginnenden Vollsperrung erreicht. Dieses Fahrzeug muss 30 min warten.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Ein Fahrzeugfolgemodell ist durch folgende Gleichung definiert, wobei s durch den Stoßstange-zu-Stoßstange-Abstand zum Vorderfahrzeug definiert ist und Δv die Geschwindigkeitsdifferenz zu diesem Fahrzeug (positiv bei Annäherungen) bedeutet:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= \beta_1\left(v_e(s(t)) - v(t)\right) - \beta_2 \Delta v(t),\\ v_e(s) &= \min\left(v_0, \frac{s-s_0}{T}\right).\end{aligned}$$

(a) *Geben Sie alle unabhängigen Variablen und ihre Bedeutung an. Welches ist die abhängige Variable?*

Unabhängige Variable: Geschwindigkeit $v(t)$, Abstand $s(t)$, Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta v(t)$. Die abhängige Variable ist die Beschleunigung.

(b) *Identifizieren Sie nun die Modellparameter und geben Sie für jeden Modellparameter an, was er bedeutet.*

- Wunschgeschwindigkeit bzw. Maximalgeschwindigkeit v_0 (wegen der min-Bedingung),
- Mindestabstand bzw. Abstand in einer stehenden Kolonne s_0 (bei diesem Abstand zu einem stehenden Vorderfahrzeug fährt ein stehendes Fahrzeug nicht mehr an)
- Folgezeit T (abgesehen vom kleinen Mindestabstand ist der zeitliche Abstand $s/v = sT/(s-s_0) \approx T$ durch T gegeben).
- Der Parameter β_1 gibt an, um wieviel weniger ein Fahrzeug beschleunigt (bzw. um wieviel mehr es bremst), wenn sich die Geschwindigkeit um eine Einheit erhöht: Sensitivität bezüglich Geschwindigkeiten:
- Analog gibt der Parameter β_2 die Sensitivität bezüglich Geschwindigkeitsdifferenzen an.

Welchen oder welche Parameter muss man insbesondere ändern

- *um die simulierten Fahrer schneller zu machen?* v_0 hoch.
- *um sie dichter auffahren zu lassen?* T runter.
- *um sie aggressiver beschleunigen zu lassen?* β_1 (und β_2) hoch.
- *um sie vorausschauender auf langsamen Verkehr oder bei Annäherung an einen Stau zu machen?* β_2 hoch.
- *um sie bei Ampelstopps bis zur Berührung der Stoßstange des Vorderfahrzeugs heranrücken zu lassen?* s_0 auf 0 reduzieren.

(c) *Unzulänglichkeiten dieses Modells treten bei sehr großen Abständen sowie bei sehr kleinen Abständen zum Vorderfahrzeug auf. Betrachten Sie dazu, was passiert, wenn (i) das nächste Fahrzeug 1 km entfernt ist und plötzlich um 36 km/h beschleunigt, (ii) das betrachtete und das Vorderfahrzeug stehen und der Abstand beträgt 1 m. Sind die Reaktionen jeweils realisitisch? Nehmen Sie für die Diskussion die eigentlich realistischen Werte $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, $s_0 = 2\,\mathrm{m}$, $T = 1\,\mathrm{s}$, $\beta_1 = 0.1\,\mathrm{s}^{-1}$ und $\beta_2 = 0.2\,\mathrm{s}^{-1}$ an.*

(i) Einen km Abstand zum Vorderfahrzeug: Fährt dieses plötzlich um 36 km/h=10 m/s schneller, beschleunigt das betrachtete Fahrzeug um $\beta_2 \Delta v = 2\,\mathrm{m/s}^2$ stärker. Dies ist eine beträchtliche Beschleunigung, die als Reaktion auf ein 1 km entferntes Fahrzeug völlig unangemessen ist. (Bei z.B. 50 m Abstand und plötzlich um 36 km/h langsamer fahrenden Fahrzeug ist es hingegen vernünftig, mit einer Beschleunigung von $-2\,\mathrm{m/s}^2$ zu verzögern.)

(ii) Die “optimale Geschwindigkeit” ist in diesen Fall $v_e = -1\,\mathrm{m/s}$ und die Beschleunigung damit $-0.1\,\mathrm{m/s^2}$. Das Fahrzeug würde rückwärts anfahren, ebenfalls unrealistisch.

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Es wird überlegt, an einer neu zu bauenden Straßenkreuzung entweder eine Lichtsignalanlage (LSA) zu installieren oder die Kreuzung als Kreisverkehr zu gestalten. Ein Kriterium der Entscheidung ist der Treibstoffverbrauch. Zur Abschätzung des Verbrauchs sollen folgende Spezifikation der Kreuzung zugrundegelegt werden:

- *Nenngeschwindigkeit 54 km/h*
- *Minimalgeschwindigkeit in den Kreisverkehrssegmenten 18 km/h*
- *Schaltzyklus der LSA-Variante: 30 s rot und 30 s grün*
- *Alle Beschleunigungen auf und Verzögerungen von der Maximalgeschwindigkeit mit* $1\,\mathrm{m/s^2}$

Im Folgenden soll immer der Kraftstoffverbrauch für die gesamte 400 m lange Strecke berechnet werden, und zwar für folgende Fahrzeugparameter: Grundleistung P_0=2 kW, Fahrzeugmasse 1.5 t, konstanter Wirkungsgrad 0.3, Brennwert $40*10^6$ J *pro l Kraftstoff, Reibungskoeffizient* $\mu = 0.02$, *Stirnfläche* $3\,\mathrm{m}^2$, *cw-Wert 0.3, Dichte der Luft* $1.3\,\mathrm{kg/m^3}$.

(a) *Berechnen Sie zunächst den Kraftstoffverbrauch für die Variante "grüne LSA", also Konstantfahrt mit der Nenngeschwindigkeit.*

Der Verbrauch ist gegeben durch die Zeit Δt, um diese Strecke zurückzulegen, multipliziert mit der Verbrauchsrate $\dot{C} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}$ bei konstanter Geschwindigkeit (hier könnte man auch die Formel für den Verbrauch pro 100 km mit der entsprechenden Streckenlänge multiplizieren, dieser Ansatz funktioniert aber bei den folgenden Teilaufgabe nicht.) Mit $L = 400\,\mathrm{m}$, $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$, $\Delta t = L/v_0 = 26.67\,\mathrm{s}$ und den Größen der Aufgabenstellung ergibt sich

$$C = \dot{C}(v_0)\Delta t = \frac{\dot{C}L}{v_0} = \frac{L}{\gamma w_{\mathrm{cal}}}\left[\frac{P_0}{v_0} + m\mu g + \frac{1}{2}c_w\rho A v_0^2\right] = \underline{\underline{18.6\,\mathrm{ml}}}$$

(b) *Zeigen Sie, dass bei einer Beschleunigung vom Stillstand auf $v = v_0$ bei konstanter Beschleunigung a die Formel aus der Aufgabenstellung folgt*

Verbrauch aus der allgemeinen Verbrauchsratenformel aus dem Skript, integriert über die Zeit $\Delta t = v_0/a$ der Beschleunigung:

$$C_{\mathrm{acc}}(v_0) = \frac{1}{\gamma w_{\mathrm{cal}}}\int_0^{v_0/a}\left[P_0 + v(t)\left(m(\mu g + a) + \frac{1}{2}c_w\rho A v^2(t)\right)\right]\,\mathrm{d}t$$

Nun wird $v(t) = at$ eingesetzt und *danach* integriert:

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{acc}}(v_0) &= \frac{1}{\gamma w_{\mathrm{cal}}}\int_0^{v_0/a}\left[P_0 + m(\mu g + a)at + \frac{1}{2}c_w\rho A a^3 t^3\right]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\gamma w_{\mathrm{cal}}}\left[\frac{P_0 v_0}{a} + m(\mu g + a)a\,\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}c_w\rho A a^3\,\frac{1}{4}\left(\frac{v_0}{a}\right)^4\right] \\
&= \frac{1}{a\gamma w_{\mathrm{cal}}}\left[P_0 v_0 + m(\mu g + a)\frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{8}c_w\rho A v_0^4\right],
\end{aligned}$$

also die angegebene Formel.

(c) *Berechnen Sie nun den Verbrauch für die Variante "rote LSA". Nehmen Sie dabei an, dass die Fahrer "auf den Punkt" an der Haltelinie anhalten und durchschnittlich 15 s anhalten müssen. Außerdem wird während der Abbremsphase kein Kraftstoff verbraucht. Hinweis: Bremsweg und Beschleunigungsweg betragen je 112.5 m.*

Der Verbrauch setzt sich zusammen aus

- Verbrauch bei $L - 2 * 112.5\,\mathrm{m} = 175\,\mathrm{m}$ Konstantfahrt,
- Verbrauch beim Halten
- Verbrauch beim Beschleunigen (beim Bremsen wird ja nach Aufgabenstellung nichts verbraucht).

Also

$$C = \dot{C}(v_0)\frac{175\,\mathrm{m}}{v_0} + \frac{P_0\ 15\,\mathrm{s}}{\gamma w_{\mathrm{cal}}} + C_{\mathrm{acc}}(v_0) = \underline{\underline{30.6\,\mathrm{ml}}}.$$

(d) *Berechnen Sie nun den Verbrauch bei der Variante "Kreisverkehr". Vernachlässigen Sie dabei die Ausdehnung des Kreisverkehrs selbst. Hinweis: Bremsweg und Beschleunigungsweg betragen je 100 m.*

Hier setzt sich der Verbrauch zusammen aus

- Verbrauch bei $L - 2 * 100\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{m}$ Konstantfahrt,
- Verbrauch beim Beschleunigen. Da hier nicht bis auf Null abgebremst wird, muss man vom Beschleunigungsverbrauch bei der Ampel den Verbrauch für die "fehlende" Beschleunigung von 0 auf $v_{\mathrm{Kreis}} = 5\,\mathrm{m/s}$ abziehen (beim Bremsen wird natürlich auch hier nichts verbraucht):

Also

$$C = \dot{C}(v_0)\frac{200\,\mathrm{m}}{v_0} + C_{\mathrm{acc}}(v_0) - C_{\mathrm{acc}}(v_{\mathrm{Kreis}}) = \underline{\underline{26.6\,\mathrm{ml}}}.$$

(e) *Bei welcher Kreuzungsvariante wird im Mittel weniger Kraftstoff verbraucht?*

Kreisverkehr: Hier muss immer abgebremst werden, also ist der mittlere Verbrauch gleich dem oben berechneten: $\underline{\underline{26.6\,\mathrm{ml}}}$.

Ampel: Hier kann man in 50% der Fälle durchfahren und muss ansonsten anhalten. Verbrauch im Mittel also

$$\bar{C} = \frac{18.6 + 30.6}{2}\,\mathrm{ml} = \underline{\underline{24.6\,\mathrm{ml}}}$$

Also wird bei der LSA im Mittel etwa 6% weniger verbraucht! (Hintergrund dieses vielleicht überraschenden Ergebnisses ist, dass die kinetische Energie, also die beim Bremsen vernichtete und beim Beschleunigen wieder aufzubauende Energie, quadratisch mit der Geschwindigkeit wächst. Abbremsen auf die halbe Geschwindigkeit und Wiederbeschleunigen benötigt also bereits 3/4 der Energie, die Abbremsen zum Stillstand und Wiederbeschleunigen benötigen würde.