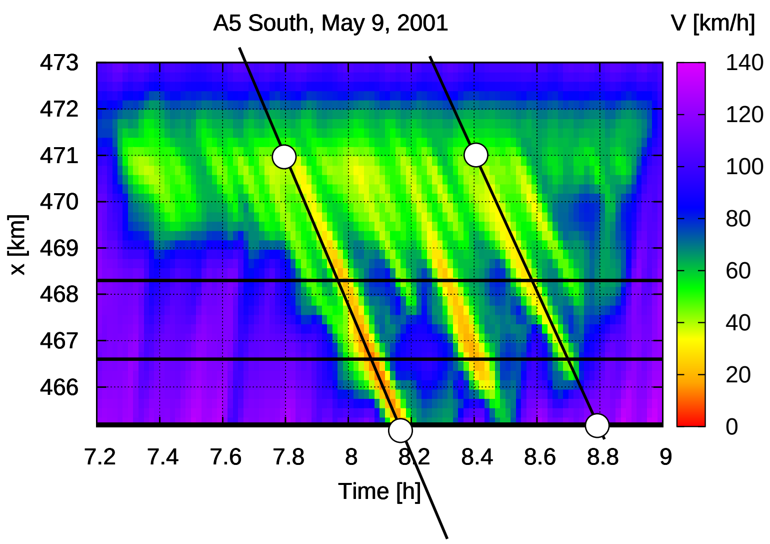
Verkehrsdynamik und -simulation

SS 2024, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 5

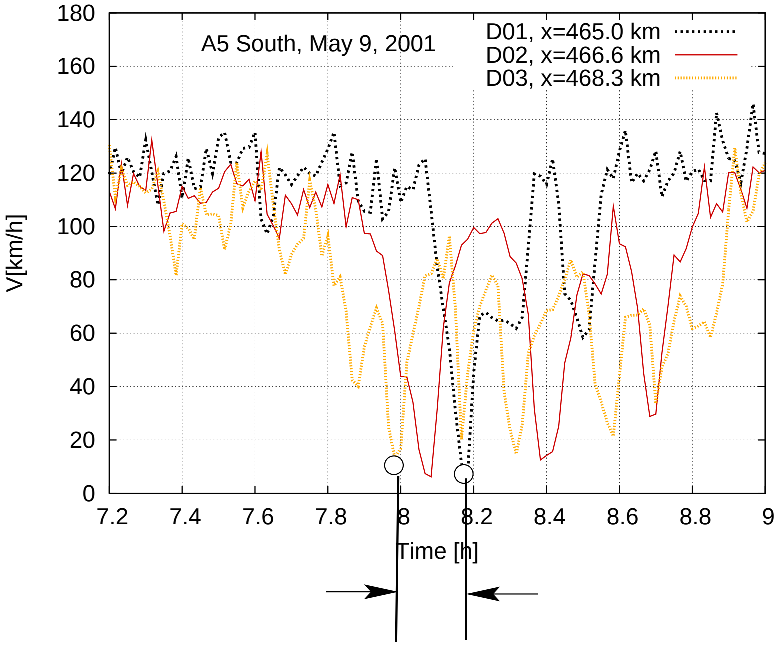
Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.1: Aus raumzeitlichen Stauverläufen rekonstruiertes Fundamentaldiagramm

(a) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Dichte- uund Geschwindigkeitsschwankunegn im Stau ist durch die Steigung der parallelen Strukturen (=Stauwellen) im Bereich niedrigerer Geschwindigkeiten (hellgrün, gelb, rot) gegeben:



$$c = -\frac{6\,\mathrm{km}}{0.38\,\mathrm{h}} = -16\,\mathrm{km/h}.$$

(b) Die markanteste Stauwelle erreicht den stromaufwärtigen Rand des Untersuchungsgebietes (Detektor D1 um etwa $t_1 = 8.2\,\text{Stunden} = 8:12\,\mathrm{h}$. Den Detektor D3 passierte diese Welle etwa 0.2 Stunden früher.

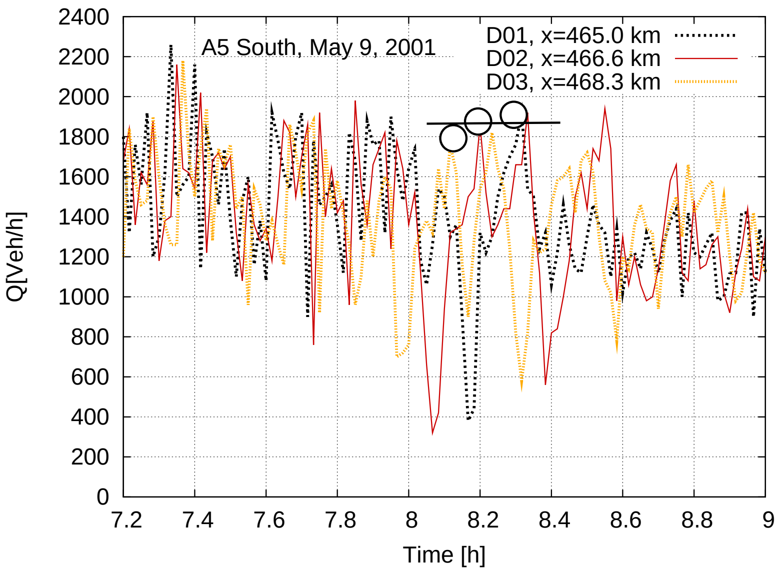


Aus dem Abstand $x_{13} = 3.3\,\text{km}$ ergibt sich

$$c = \frac{x_1 - x_3}{t_1 - t_3} = \frac{-3.3\,\text{km}}{0.2\,\text{h}} = -16.5\,\text{km/h}.$$

Das Ergebnis ist also (im Rahmen der Ableseungenauigkeit) konsistent mit (a).

(c) Aus den Geschwindigkeitszeitreihen (oder der raumzeitlichen Verkehrslage) ergibt sich, dass nach der bei Punkt (b) benutzten Stauwelle freier Verkehr herrscht und der entsprechende Verkehrsfluss damit ein Maß für die Kapazität Q_{max} ist (der maximale Fluss *vor* Zusammenbruch ist wegen des Phänomens des *Capacity drop* etwas höher). Wir nehmen den Mittelwert der drei Werte bei den drei Detektoren (vgl. Abb),



also

$$Q_{\text{max}} \overset{!}{=} \frac{1}{3}\left(Q_{\text{max}}^{\text{D1}} + Q_{\text{max}}^{\text{D2}} + Q_{\text{max}}^{\text{D3}}\right) \approx 1\,850\,\text{Fz/h}.$$

(d) Zunächst ergbt sich die Dichte beim Flussmaximum (*at capacity*) aus der Gleichsetzung

$$V_0\rho = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho_K = \frac{1}{V_0 T + \frac{1}{\rho_{\text{max}}}} = \frac{1}{V_0 T + l_{\text{eff}}}$$

Daraus die Kapazität

$$Q_{\text{max}} = V_0 \rho_K = \frac{1}{T + \frac{1}{\rho_{\text{max}} V_0}} = \frac{1}{T + \frac{l_{\text{eff}}}{V_0}} \tag{1}$$

(e) Die mittlere Wunschgeschwindigkeit V_0 wird aus der Geschwindigkeitszeitreihe als Geschwindigkeit des freien Verkehrs geschätzt:

$$V_0 \approx 120\,\text{km}$$

Man beachte, dass die Geschwindigkeit auf leerer Strecke vermutlich noch höher ist (vgl. die Fluss-Dichte-Daten), dass das dreieckige Fundamentaldiagramm dies aber nicht berücksichtigt.

Aus der Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit, $c = -l_{\text{eff}}/T$ und Gl. (1) für die Kapazität kann man die nur verzerrt messbare maximale Dichte $\rho_{\text{max}} = 1/l_{\text{eff}}$ eliminieren:

$$Q_{\text{max}} = \frac{1}{T + \frac{l_{\text{eff}}}{V_0}} = \frac{1}{T - \frac{cT}{V_0}}$$

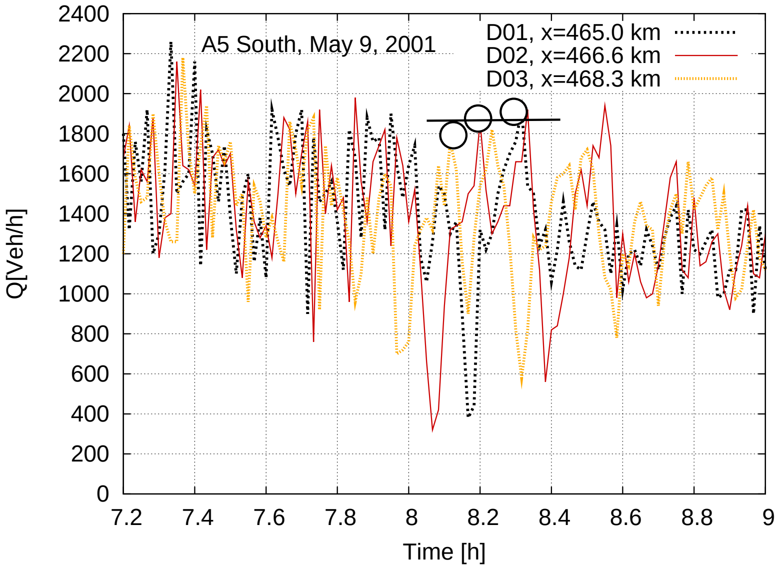
und daraus letztendlich

$$T = \frac{1}{Q_{\max}\left(1 - \frac{c}{V_0}\right)} = 1.7\,\mathrm{s},$$

$$\rho_{\max} = \frac{1}{l_{\text{eff}}} = -\frac{1}{cT} = 130\,\mathrm{Fz/km}.$$

Dies entspricht einer effektiven Fahrzeuglänge $l_{\text{eff}} = 1/\rho_{\max} = 7.6\,\mathrm{m}$, also einem plausiblen Wert.

(f) Ablesen der Parameter aus der an die Fluss-Dichte-Daten gefitteten "Staugeraden":



Der Fit resultiert in folgenden Schätzungen:

$$\rho_{\max} = 75\,\mathrm{Fz/km},$$

$$T = \frac{1}{2\,500\,1/\mathrm{h}} = 1.44\,\mathrm{s},$$

$$Q_{\max} = 1\,850\,\mathrm{Fz/h}$$

sowie aus der Steigung der Staugeraden hergeleiteten Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{-1}{\rho_{\max} T} = -\frac{l_{\text{eff}}}{T} = -9.1\,\mathrm{m/s} = -33\,\mathrm{km/h}$$

Während die Kapazität konsistent mit der direkt aus der Fluss-Zeitreihe ehrgeleiteten ist und die Folgezeit deutlich unterschätzt wird, gibt es bei der maximalen Dichte eine systematische Unterschätzung um nahezu den Faktor zwei und dementsprechend bei der effektiven Fahrzeuglänge und der Ausbreitungsgeschwindigkeit eine Überschätzung um den Faktor zwei.

Diskussion

Diese Verzerrungen kommen im Wesentlichen durch die systematische Unterschätzung der realen Dichte, welche wiederum von einer systematischen Überschätzung der Geschwindigkeit in Staubereichen herrührt. Diese Verzerrung ist so stark, das es bisweilen nicht einmal einen Sinn ergibt, überhaupt eine Staugerade an die Fluss-Dichte-Daten egstauten Verkehrs anzufitten. Die Geschwindigkeit bei *freiem* Verkehr unterliegt hingegen keiner/nur einer insignifikanten systematischen Verzerrung.

Nutzt man die raumzeitliche Stauausbreitung, um c direkt zu messen, sind die systematischen Fehler der Dichte bzw. Geschwindigkeit egal, da man zur Bestimmung der Grenzen nur die *qualitative* Aussage "frei oder gestaut" benötigt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5.2: Marathonlauf

(a) Spezifische Kapazität = Maximum der aus dem Fundamentaldiagramm entnommenen Flussdichte. Am Maximum des dreieckigen Fundamentaldiagramms schneiden such der freie Zweig und die "Staugerade" des Fundamentaldiagramms:

$$V_0 \rho^* = \frac{1}{T^*}\left[1 - \frac{\rho^*}{\rho^*_{\text{max}}}\right]$$

Daraus die kritische Dichte bei $V_0 = 11/3.6\,\text{m/s}$:

$$\rho^*_c = \frac{1}{V_0 T^* + \frac{1}{\rho^*_{\text{max}}}} = 0.64\,\text{Läufer/m}^2$$

und die spezifische Kapazität

$$K^* = Q^*_e(\rho^*_c) = V_0 \rho^*_c = 1.96\,\text{Läufer/(ms)}$$

Spezifische Kapazität als Funktion der Maximalgeschwindigkeit (Wunschgeschwindigkeit) V_0:

$$K^*(V_0) = \frac{V_0}{V_0 T^* + \frac{1}{\rho^*_{\text{max}}}} = \frac{1}{T^*}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{V_0 T^* \rho^*_{\text{max}}}}\right)$$

Daraus

$$K^*(8/3.6\,\text{m/s}) = 1.81\,\text{Läufer/(ms)}, \quad K^*(15/3.6\,\text{m/s}) = 2.08\,\text{Läufer/(ms)}.$$

Die spezifische Kapazität ändert sich nur unwesentlich. Der asymptotische Wert für "unendlich schnelle" Läufer ist gleich $1/T^* = 2.5\,\text{Läufer/(ms)}$.

(b) Kapazität an der $b = 5\,\text{m}$ breiten Unterführung für mittelschnelle Läufer (mit $V_0 = 11\,\text{km/h}$ angenommen):

$$K = bK^* = b\ 1.96\,\text{Läufer/(ms)} = 9.8\,\text{Läufer/s}$$

(c) Die Geschwindigkeiten V seien gaußverteilt mit der Dichtefunktion

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp\left[-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Nach einer Laufstrecke der Länge x "übersetzen" sich die Geschwindigkeiten in Laufzeiten (es gibt ja einen Massenstart und jeder Läufer bleibt immer gleich schnell):

$$\tau = \frac{x}{v} \quad \text{bzw.} \quad v(\tau) = \frac{x}{\tau}$$

Die Dichtefunktion $g(\tau)$ der Laufzeiten ergibt sich aus der Definition der Dichte: Dichte mal differentielle Änderung der unabhängigen Größe = differentielle Wahrscheinlichkeit dp:

$$\text{d}p = f(v)\ |\,\text{d}v| = g(\tau)\ |\,\text{d}\tau|$$

(falls $g(\tau)$ streng monoton ist, ansonsten könnten mehrere τ-Werte auf der rechten Seite beitragen). Damit

$$g(\tau) = f(v(\tau)) \left| \frac{\mathrm{d}v(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right| = f\left(\frac{v}{\tau}\right) \frac{x}{\tau^2}$$

bzw. nach Einsetzen von $f(.)$:

$$g(\tau) = \frac{x}{\tau^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \; \exp\left[-\frac{\left(\frac{x}{\tau}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Diese Dichtefunktion ist in Teil (d) der Aufgabenstellung geplottet.

(d) Die Dichtefunktion $g(\tau)$ gibt die differenzielle Wahrscheinlichkeit des Durchgangs eines Läufers im differenziellen Zeitintervall $\mathrm{d}\tau$ an. Damit ist bei N Läufern die Verkehrsstärke der Läufer an der Stelle x zur Zeit τ nach dem Start gegeben durch

$$Q(\tau) = N g(\tau)$$

Zur Vermeidung von Staus muss das Flussmaximum der Stärke

$$\hat{Q} = N\hat{g} = N \max_{\tau} g(\tau)$$

kleiner als die Kapazität K sein. Mit $\hat{g} = 1.95\,\mathrm{h}^{-1}$ aus der Abbildung ergibt sich die kritische Teilnehmerzahl N_c durch

$$N_c = \frac{K}{\hat{g}} = \frac{9.8\,\text{Läufer/s}}{\frac{1.95}{3\,600}\,\mathrm{s}^{-1}} = 18\,000\,\text{Läufer}.$$